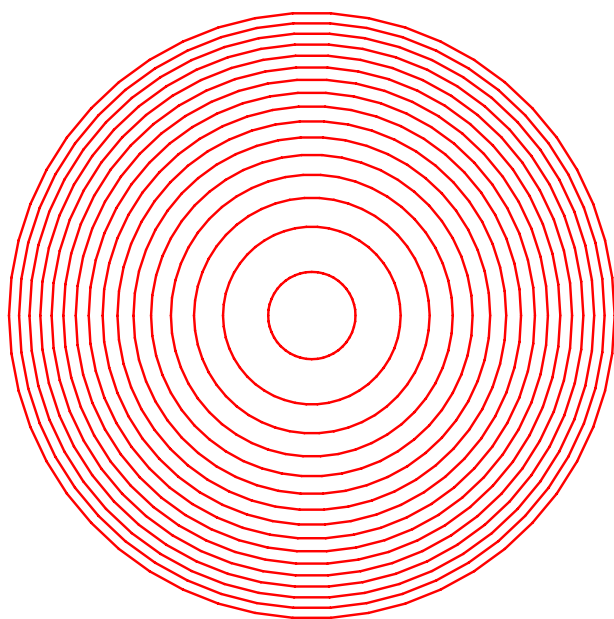


Université Paris-Sud Orsay

DEUG S3 SMR

OPTIQUE  
ONDULATOIRE



J.-J. LABARTHE



# OPTIQUE ONDULATOIRE

Mise à jour de ce cours sur le site  
<http://www.deugs3smr.u-psud.fr/DEUGS3SMR>

Début de rédaction : 2 février 2003  
Première version : 17 novembre 2003  
Cette version : 16 août 2004

**Jean-Jacques LABARTHE**

Laboratoire Aimé-Cotton

[www.lac.u-psud.fr](http://www.lac.u-psud.fr)

Bât 505 CNRS II

91405 ORSAY Cedex

Tél. : 01 69 35 20 49

Fax : 01 69 35 21 00

[labarthe@lac.u-psud.fr](mailto:labarthe@lac.u-psud.fr)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Optique géométrique</b>	<b>7</b>
1.1	Champ électromagnétique . . . . .	8
1.2	Approximation de l'optique géométrique . . . . .	11
1.2.1	Des solutions des équations de Maxwell . . . . .	11
1.2.2	Surfaces d'onde et rayons lumineux . . . . .	13
1.2.3	Ondes plane, sphérique et cylindrique . . . . .	16
1.3	Lois de Snell-Descartes . . . . .	17
1.3.1	Rayon lumineux réfracté . . . . .	17
1.3.2	Rayon lumineux réfléchi . . . . .	19
1.4	Limite de validité de l'optique géométrique . . . . .	20
1.5	Chemin optique . . . . .	21
1.5.1	Définition . . . . .	21
1.5.2	Propriété fondamentale . . . . .	22
1.6	Principe de Fermat . . . . .	23
1.7	Chemin optique entre deux surfaces d'onde . . . . .	28
1.7.1	Principe de l'égalité des chemins optiques . . . . .	28
1.7.2	Exemple de la réfraction par un dioptré plan . . . . .	28
1.7.3	Mirage optique . . . . .	29
1.8	Principe d'Huygens . . . . .	31
1.8.1	Principe d'Huygens . . . . .	31
1.8.2	Construction d'Huygens du rayon lumineux réfracté . . . . .	32
1.9	Stigmatisme . . . . .	34
1.9.1	Chemin optique entre un point et son image . . . . .	34
1.9.2	Exemple d'une lentille mince . . . . .	36
1.10	Différence de marche . . . . .	37
1.10.1	Rayons qui traversent une lentille . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Sources de lumière</b>	<b>41</b>
2.1	Phénomènes quantiques . . . . .	41
2.1.1	Niveaux d'énergie . . . . .	41
2.1.2	Interaction lumière-atome . . . . .	41
2.2	Sources lumineuses . . . . .	43
2.2.1	Sources thermiques . . . . .	43

2.2.2	Sources spectrales . . . . .	44
2.2.3	Laser . . . . .	44
2.3	Description de la lumière . . . . .	46
2.3.1	Durée et longueur de cohérence . . . . .	46
2.3.2	Le modèle de la succession des trains d'ondes . . . . .	48
2.3.3	Lumière quasi-monochromatique non polarisée . . . . .	48
2.3.4	Le vrai champ électromagnétique . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Photométrie</b>	<b>51</b>
3.1	Rayonnement d'une source ponctuelle . . . . .	51
3.2	Définitions photométriques . . . . .	52
3.2.1	Flux . . . . .	53
3.2.2	Intensité . . . . .	53
3.2.3	Éclairement . . . . .	54
3.2.4	Source étendue . . . . .	54
3.3	Photométrie visuelle . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Interférences</b>	<b>59</b>
4.1	L'expérience des trous ou fentes d'Young . . . . .	60
4.2	Théorie scalaire . . . . .	61
4.2.1	Calcul de l'éclairement . . . . .	61
4.2.2	L'éclairement en fonction du déphasage . . . . .	63
4.2.3	Franges d'interférence . . . . .	63
4.3	Cohérence temporelle . . . . .	64
4.3.1	Mesure de l'éclairement . . . . .	64
4.3.2	Cas de deux sources lumineuses distinctes . . . . .	65
4.3.3	Utilisation d'une seule source lumineuse ponctuelle . . . . .	66
4.4	Deux sources secondaires ponctuelles . . . . .	68
4.4.1	Franges rectilignes . . . . .	70
4.4.2	Anneaux d'interférence . . . . .	71
4.5	Cohérence spatiale . . . . .	72
4.6	Interféromètre de Michelson . . . . .	74
4.6.1	Réglage en lame à faces parallèles . . . . .	75
4.6.2	Réglage en lame à faces parallèles et source étendue . . . . .	76
4.6.3	Application : mesure des longueurs . . . . .	76
4.6.4	Réglage en coin d'air . . . . .	76
4.7	Deux catégories de dispositifs interférentiels . . . . .	77
4.8	Théorie vectorielle . . . . .	77
4.9	Conditions d'interférence . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Diffraction</b>	<b>79</b>
5.1	Définition . . . . .	79
5.2	Le principe d'Huygens-Fresnel . . . . .	80
5.3	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	81

5.3.1	Le dispositif . . . . .	81
5.3.2	Expression de l'amplitude complexe diffractée . . . . .	81
5.3.3	Source sur l'axe optique . . . . .	83
5.4	Diffraction par une ouverture rectangulaire . . . . .	84
5.4.1	Calcul de l'éclairement . . . . .	84
5.4.2	Étude du sinus cardinal . . . . .	85
5.4.3	Absence de diaphragme . . . . .	85
5.4.4	Figure de diffraction d'une fente fine . . . . .	86
5.4.5	Interprétation physique du premier minimum . . . . .	87
5.4.6	Figure de diffraction d'un rectangle . . . . .	87
5.5	Fentes d'Young (ou bifente) . . . . .	88
5.6	Ouverture circulaire . . . . .	89
5.7	Rôle de la diffraction . . . . .	92
5.7.1	Pouvoir séparateur d'une lunette astronomique . . . . .	93
5.8	Relations d'incertitude . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Réseaux</b>	<b>97</b>
6.1	Définition . . . . .	97
6.2	La fonction réseau . . . . .	97
6.3	Réseau de fentes . . . . .	99
6.3.1	Calcul des interférences des N ondes . . . . .	100
6.3.2	Relation fondamentale et dispersion des réseaux . . . . .	101
6.4	Largeur angulaire du pic de diffraction . . . . .	102
6.5	Pouvoir de résolution . . . . .	103
6.6	Fente source . . . . .	104
6.7	Rôle du motif du réseau . . . . .	105
6.8	Réseau échelle . . . . .	107
6.9	Réseau de N antennes radar . . . . .	107
6.9.1	Le radar . . . . .	107
6.9.2	Le radar à balayage électronique . . . . .	109
6.10	Réseau interférométrique de radiotélescopes . . . . .	111
<b>A</b>	<b>Index des principaux symboles</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Index des noms propres</b>	<b>115</b>
	<b>Références</b>	<b>117</b>





## 1

# Optique géométrique

L'**optique** est l'étude de la lumière, c'est à dire des ondes électromagnétiques dans la gamme de fréquences  $3,8 \cdot 10^{14}$ – $7,7 \cdot 10^{14}$  Hz (en longueurs d'onde dans le vide : 780–390 nm).

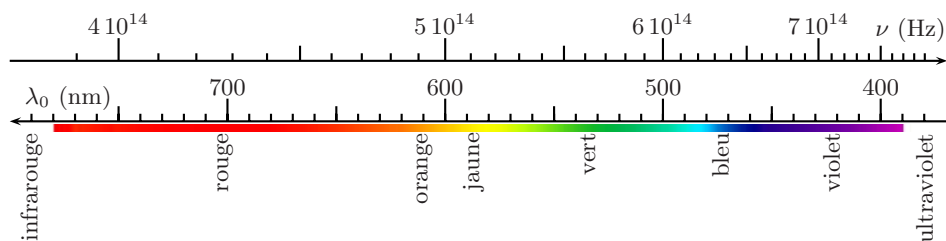


FIG. 1.1 – Fréquences et longueurs d'onde dans le vide de la lumière.

L'**optique géométrique** est une description de la propagation de la lumière en terme de lois géométriques qui s'appuient sur la notion de rayons lumineux (propagation rectiligne dans un milieu homogène, lois de Snell<sup>1</sup>-Descartes<sup>2</sup> au changement de milieu, principe de Fermat<sup>3</sup>, faisceaux lumineux, surfaces d'onde, ...).

Le but de ce chapitre est d'indiquer comment et dans quelles conditions les « lois » et « principes » de l'optique géométrique découlent de la théorie de Maxwell<sup>4</sup> (ce sont des « théorèmes »). On se limitera à une onde monochromatique de fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  et longueur d'onde dans le vide

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \quad (c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}). \quad (1.1)$$

On ne considérera que la propagation dans des milieux transparents et **isotropes**, mais pas nécessairement homogènes (cf. définition 1.1 page 9).

- 
1. Willebrord Snell van Royen, dit Willebrordus Snellius (1580-1626)
  2. René du Perron Descartes (1596-1650)
  3. Pierre de Fermat (1601-1665)
  4. James Clerk Maxwell (1831-1879)

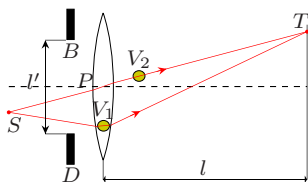


FIG. 1.2 – La lumière issue de la source  $S$  converge au point  $T$  après avoir traversé un diaphragme  $D$  et une lentille bi-convexe.

L'optique géométrique permet de décrire des expériences, analogues à celle de la figure (1.2), où la longueur d'onde est très petite devant toutes les autres longueurs du système (diamètre des lentilles, rayon de courbure des dioptrés, taille des objets et des images, échelle des inhomogénéités, ...)

Lorsque ce n'est pas le cas (section 1.4), il apparaît des phénomènes d'**optique ondulatoire** (interférences et diffraction). En vue de leur étude, dans les chapitres suivants, quelques notions d'optique ondulatoire sont aussi introduites ici (les surfaces d'ondes qui sont « géométriques », mais ont une signification « ondulatoire », le principe d'Huygens<sup>5</sup>, ...).

Les principes de l'optique géométrique s'appliquent en fait à la propagation de toutes sortes d'ondes dans un milieu inhomogène et pas seulement de la lumière : ondes électromagnétiques infrarouges et ultraviolettes, ondes radio et même des ondes non électromagnétiques (ondes acoustiques).

## 1.1 Champ électromagnétique

*Dans cette section, nous allons écrire la forme du champ électromagnétique pour les ondes qui font l'objet de l'optique géométrique.*

Découpons le milieu en *petits* volumes  $V_1, V_2, \dots$  de dimension linéaire de l'ordre de  $a$ , la longueur  $a$  étant très petite par rapport aux dimensions  $l, l', \dots$  des éléments optiques et très grande par rapport à la longueur d'onde :

$$\lambda_0 \ll a \ll l. \quad (1.2)$$

C'est possible pour une situation semblable à la figure 1.2 où typiquement  $l \gtrsim 1 \text{ cm}$  et  $\lambda_0 \lesssim 1 \mu\text{m}$ .

Nous ferons l'hypothèse que le milieu peut être considéré comme linéaire, homogène, isotrope (lhi) d'indice uniforme dans chacun des petits volumes. Dans la boule  $V_1$ , en désignant par  $n_1$  l'indice du milieu, la vitesse de phase de la lumière est

$$\boxed{v_1 = \frac{c}{n_1}} \quad (1.3)$$

et la longueur d'onde

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n_1}}. \quad (1.4)$$

Nous négligerons la dispersion du milieu (la variation de l'indice  $n_1$  avec la fréquence  $\nu$ ) de sorte que  $v_1$  est aussi la vitesse de groupe et la vitesse de propagation de l'énergie lumineuse dans la boule  $V_1$ .

Nous n'excluons pas la possibilité que l'indice varie sur des distances beaucoup plus grandes que  $a$  (verre d'indice variable, gaz de température

5. Christiaan Huygens (1629-1695)

non uniforme). D'après (1.3) et (1.4), non seulement l'indice mais aussi la vitesse de la lumière et la longueur d'onde varient d'un point à un autre.

**Définition 1.1.** Un tel milieu, d'indice non uniforme, sera qualifié d'**inhomogène isotrope**.

Par contre, nous ne traiterons pas les milieux **anisotropes** (quartz, mica, spath, ...) où l'indice, la vitesse de la lumière et la longueur d'onde dépendent de la direction de propagation et de la polarisation.

Nous avons supposé  $\lambda_1 \ll a$  (cette condition découle de (1.2), l'indice étant de l'ordre de 1) : par rapport à l'onde, la boule forme un milieu lhi pratiquement infini. On peut assimiler l'onde lumineuse dans la boule  $V_1$  à une onde plane progressive harmonique de vecteur d'onde

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \vec{u} = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \vec{u} \quad (1.5)$$

où  $\vec{u}$  un vecteur unitaire. Les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  au point  $M \in V_1$  (repéré par rapport à une origine  $O$  par le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ) forment avec  $\vec{u}$  un trièdre direct.

Nous écrivons, en notation complexe, le champ électrique  $\vec{E}$  de cette onde au point  $M \in V_1$  sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1 e^{i\phi_1} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} = \vec{A}_1 e^{i[\omega t + \phi(\vec{r})]} \quad (1.6)$$

où nous avons introduit la **phase**

$$\phi(M) = \phi(\vec{r}) = \phi_1 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} \quad (1.7)$$

et une **amplitude** complexe  $\vec{A}_1 \perp \vec{k}_1$ .

La constante  $\phi_1$  peut être changée arbitrairement ; on peut en effet effectuer la transformation

$$\phi_1 \longrightarrow \phi_1 + \alpha, \quad \vec{A}_1 \longrightarrow \vec{A}_1 e^{-i\alpha} \quad (1.8)$$

où  $\alpha$  est une constante. Cette transformation conserve le produit  $\vec{A}_1 e^{i\phi_1}$  et le champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Si l'onde est polarisée rectilignement on peut choisir  $\phi_1$  pour rendre  $\vec{A}_1$  réel. Si l'onde est polarisée elliptiquement, les deux composantes transverses du vecteur  $\vec{A}_1$  sont des nombres complexes d'arguments différents et  $\vec{A}_1$  ne peut pas être réel.

Le vecteur d'onde s'obtient à partir de la phase  $\phi(\vec{r})$  par

$$\vec{k}_1 = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}). \quad (1.9)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}_1}{\omega} \wedge \vec{E}. \quad (1.10)$$

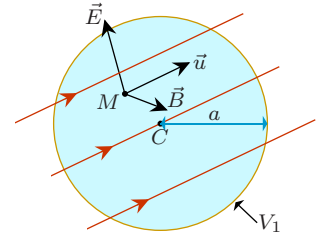


FIG. 1.3 – La petite boule  $V_1$  de centre  $C$  et de rayon  $a$ . Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  au point  $M$ .

Nous avons une description analogue dans les divers petits volumes  $V_1, V_2, V_3, \dots$ . Dans chacun de ces petits volumes, l'onde peut être assimilée à une onde plane, mais les vecteurs d'onde  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots$  et les amplitudes complexes  $\vec{A}_1 e^{i\phi_1}, \vec{A}_2 e^{i\phi_2}, \vec{A}_3 e^{i\phi_3}, \dots$  respectives varient d'un volume à l'autre.

Écrivons une expression du champ électrique  $\vec{E}$  en un point  $M$  quelconque de l'espace :

$$\boxed{\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{i[\omega t + \phi(\vec{r})]},} \quad (1.11)$$

$$\boxed{\vec{k}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}).} \quad (1.12)$$

Le champ électrique d'une onde monochromatique peut toujours s'écrire sous la forme  $\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}) e^{i\omega t}$ . Il y a donc une infinité de façons de choisir  $\vec{A}(\vec{r})$  complexe et  $\phi(\vec{r})$  réel dans l'équation (1.11) tels que  $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})}$ .

Nous poserons ( $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ )

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &\approx \vec{A}_1, & \vec{k}(\vec{r}) &\approx \vec{k}_1 & \text{et} & \phi(\vec{r}) &\approx \phi_1 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} & \text{pour } M \in V_1, \\ \vec{A}(\vec{r}) &\approx \vec{A}_2, & \vec{k}(\vec{r}) &\approx \vec{k}_2 & \text{et} & \phi(\vec{r}) &\approx \phi_2 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} & \text{pour } M \in V_2, \\ \vec{A}(\vec{r}) &\approx \vec{A}_3, & \vec{k}(\vec{r}) &\approx \vec{k}_3 & \text{et} & \phi(\vec{r}) &\approx \phi_3 - \vec{k}_3 \cdot \vec{r} & \text{pour } M \in V_3, \\ & & & & & & & \dots \end{aligned}$$

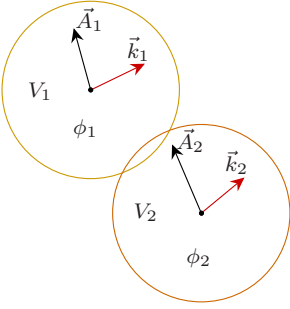


FIG. 1.4 – Le vecteur d'onde varie légèrement entre boules voisines : la fonction  $\vec{k}(\vec{r})$  est continue. On choisit  $\phi_1$  et  $\phi_2$  pour rendre les fonctions  $\phi(\vec{r})$  et  $\vec{A}(\vec{r})$  continues.

Nous ferons l'hypothèse qu'en utilisant la transformation (1.8) dans les divers volumes  $V_1, V_2, V_3, \dots$  il est ainsi possible de déterminer des fonctions continues  $\vec{A}(\vec{r}), \vec{k}(\vec{r})$  et  $\phi(\vec{r})$ .

Les volumes  $V_1, V_2, V_3, \dots$  étant grands devant la longueur d'onde ( $\lambda \ll a$ ), les fonctions  $\vec{A}(\vec{r})$  et  $\vec{k}(\vec{r})$  vérifient les conditions

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \text{ et } \vec{k}(\vec{r}) \text{ varient très peu sur des distances de l'ordre de } \lambda.} \quad (1.13)$$

Rappelons que le champ est transverse

$$\vec{A}(\vec{r}) \perp \vec{k}(\vec{r}) \quad (1.14)$$

et que  $k$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et l'indice  $n$  dépendent de  $\vec{r}$ :

$$k(\vec{r}) = \frac{\omega n(\vec{r})}{c} = \frac{2\pi}{\lambda(\vec{r})} = \frac{2\pi n(\vec{r})}{\lambda_0}. \quad (1.15)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par la généralisation de l'équation (1.10)

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}(\vec{r})}{\omega} \wedge \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}(\vec{r}) \wedge \vec{A}(\vec{r})}{\omega} e^{i[\omega t + \phi(\vec{r})]}. \quad (1.16)$$

La fonction  $\vec{k}(\vec{r})$  donne la valeur locale du **vecteur d'onde**. Nous appellerons la fonction  $\psi(M, t) = \psi(\vec{r}, t) = \omega t + \phi(\vec{r})$  l'**eikonale**<sup>6</sup> du champ électromagnétique, la fonction  $\phi(M) = \phi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, 0)$  la **phase** et  $\vec{A}(\vec{r})$  l'**amplitude** du champ électrique.

Le vecteur de Poynting<sup>7</sup>,

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = \frac{E^2}{\omega\mu} \vec{k}, \quad (1.18)$$

qui donne la direction de propagation de l'énergie, est parallèle au vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de même sens.

La fonction  $\vec{k}(\vec{r})$  est uniquement déterminée, mais il n'en est pas de même des fonctions  $\psi$ ,  $\phi$  et  $\vec{A}$ . On peut, sans que le champ électromagnétique ne change, effectuer la transformation

$$\psi(\vec{r}, t) \longrightarrow \psi(\vec{r}, t) + \alpha, \quad \phi(\vec{r}) \longrightarrow \phi(\vec{r}) + \alpha, \quad \vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\alpha} \quad (1.19)$$

où  $\alpha$  est une constante. Cela revient à effectuer la transformation (1.8) dans les divers volumes  $V_1, V_2, V_3, \dots$  avec la même constante  $\alpha$  pour préserver la continuité de  $\phi(\vec{r})$ .

En **résumé**, dans la situation de la figure 1.2 l'onde a localement la structure d'une onde plane : les vecteurs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{k}(\vec{r})$  forment un trièdre orthogonal direct pour tout  $t$  et  $\vec{r}$ . L'onde lumineuse est approximativement décrite par les équations (1.11–1.16).

En réalité, comme nous le verrons plus loin, les conditions (1.13) ne sont pas bien vérifiées en certains endroits (au bord  $B$  du diaphragme, en  $S, \dots$ ).

## 1.2 Approximation de l'optique géométrique

*Dans cette section, nous indiquons comment l'optique géométrique découle de la théorie de Maxwell pour certaines ondes, à savoir les ondes de la forme (1.11–1.16).*

Ces ondes ont localement la structure des ondes planes. Il s'agit donc d'une classe assez restreinte d'ondes, mais qui permettent de représenter de manière très convenable les phénomènes qui interviennent en optique.

### 1.2.1 Des solutions des équations de Maxwell

Tout d'abord, vérifions que notre point de départ est correct.

**Théorème 1.1.** *Les ondes (1.11–1.16) sont (approximativement) solutions des équations de Maxwell.*

---

6. Mot formé à partir du grec *eikôn* « image ». Certains auteurs appellent *eikonale* la fonction

$$S(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \phi(\vec{r}). \quad (1.17)$$

7. [John Henry Poynting \(1852-1914\)](#)

*Première démonstration.* Dans le petit volume  $V_1$ , le champ de l'onde est approximativement donné par les expressions (1.6) et (1.10). Ce champ est celui d'une onde plane progressive harmonique que l'on sait solution des équations de Maxwell.  $\square$

*Remarque.* Cette première démonstration revient en fait à négliger les variations de  $\vec{A}$  et  $\vec{k}$  (ces vecteurs sont remplacés par des constantes dans le petit volume  $V_1$ ). Nous donnons une deuxième démonstration où il apparaît clairement que, grâce à la condition (1.13), les termes comportant des dérivées (gradient ou rotationnel) de  $\vec{A}$  et  $\vec{k}$  sont en effet négligeables par rapport aux termes comportant  $\vec{\nabla}\phi$ .

*Deuxième démonstration.* Pour un milieu linéaire inhomogène isotrope, sans charges ni courants libres ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ), écrivons les équations de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.22)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.23)$$

qui ne diffèrent de celles dans un milieu lhi que par le fait que  $\frac{n^2}{c^2} = \mu_0\epsilon$  est une fonction de  $\vec{r}$ . Portons les champs (1.11) et (1.16) dans ces équations.

- L'équation (1.20) devient, en utilisant  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$  et  $\vec{\nabla}e^{i\phi} = ie^{i\phi}\vec{\nabla}\phi = -i\vec{k}e^{i\phi}$ ,

$$\left[ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\sim A/l} - i\vec{A} \cdot \vec{k} \right] e^{i(\omega t + \phi)} = 0. \quad (1.24)$$

L'ordre de grandeur du premier terme est  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \sim A/l$  où  $l$  est une longueur qui, d'après la condition (1.13), est très grande par rapport à  $\lambda$ . En négligeant ce terme, parce que son ordre de grandeur  $A/l$  est très petit devant  $Ak = 2\pi A/\lambda$ , l'équation est satisfaite puisque  $\vec{A} \cdot \vec{k} = 0$  d'après l'équation (1.14). On peut remarquer que l'équation (1.24), écrite sans approximation, indique que  $\vec{A}$  a en toute rigueur une très petite composante parallèle à  $\vec{k}$ .

- L'équation (1.21) devient

$$\left[ \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{A})}_{\sim Ak/l} - i \underbrace{(\vec{k} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{k}}_{=0} \right] e^{i(\omega t + \phi)} = 0 \quad (1.25)$$

qui est approximativement vérifiée : on néglige le premier terme qui est le gradient de la fonction  $\vec{k} \wedge \vec{A}$  et varie très peu sur des distances de l'ordre de  $\lambda$ .

– L'équation (1.22) devient, en utilisant  $\vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f) \wedge \vec{A} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ,

$$\left[ -i \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{A}}_{\sim kA} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}_{\sim A/l} \right] e^{i(\omega t + \phi)} = -i(\vec{k} \wedge \vec{A}) e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (1.26)$$

Cette équation est approximativement vérifiée puisqu'on peut négliger le terme d'ordre  $A/l$  par rapport au terme d'ordre  $kA \sim A/\lambda$ .

– L'équation (1.23) devient

$$\left[ -i \underbrace{\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{A})}_{=-k^2 \vec{A}} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{A})}_{\sim kA/l} \right] \frac{e^{i(\omega t + \phi)}}{\omega} = i\omega \frac{n^2}{c^2} \vec{A} e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (1.27)$$

et, en négligeant le terme d'ordre  $kA/l$  par rapport au terme d'ordre  $k^2 A$

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \quad \text{soit} \quad k = \frac{n\omega}{c} \quad (1.28)$$

qui est vérifié d'après l'équation (1.15).  $\square$

### 1.2.2 Surfaces d'onde et rayons lumineux

On définit dans cette section les rayons lumineux et les surfaces d'onde. On démontre quelques lois de l'optique géométrique qui découlent simplement des définitions.

**Définition 1.2.** Les **rayons lumineux** sont les lignes du champ de vecteur  $\vec{k}(\vec{r})$  (les lignes tangentes au vecteur d'onde en tout point).

**Théorème 1.2 (transversalité).** Le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires entre-eux et perpendiculaires aux rayons lumineux.

*Démonstration.* C'est une autre façon de dire que les vecteurs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , et  $\vec{k}(\vec{r})$  forment un trièdre orthogonal.  $\square$

**Théorème 1.3 (propagation de l'énergie).** L'énergie de l'onde se propage en suivant les rayons lumineux.

*Démonstration.* Le courant d'énergie est défini par le vecteur de Poynting, équation (1.18). Il est de même sens et de même direction que  $\vec{k}$ . L'énergie se propage donc en suivant les rayons lumineux.  $\square$

**Définition 1.3.** Les **surfaces d'onde** sont les surfaces définies par

$$\boxed{\psi(\vec{r}, t) = \omega t + \phi(\vec{r}) = K,} \quad \text{où } K \text{ est une constante.} \quad (1.29)$$

Pour  $K$  donné, l'équation (1.29) définit une surface  $\Sigma_t$  pour chaque valeur de  $t$ . On peut exprimer le phénomène de propagation en disant que la surface  $\Sigma_t$  à l'instant  $t$  se transforme à l'instant  $t'$  dans la surface  $\Sigma_{t'}$  (cf. figure 1.6). L'équation  $\omega t' + \phi(\vec{r}) = K$  de  $\Sigma_{t'}$  s'écrit aussi

$$\omega t + \phi(\vec{r}) = K + \omega(t - t') = K' \quad (1.30)$$

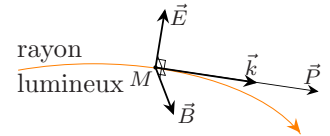


FIG. 1.5 – Le champ électrique  $\vec{E}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$ , le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et le vecteur de Poynting  $\vec{P}$  au point  $M$  ainsi que le rayon lumineux passant en  $M$ .

qui est l'équation d'une autre surface d'onde à l'instant  $t$  (pour la valeur  $K'$  de la constante).

FIG. 1.6 – Visualisation de la propagation par le déplacement d'une surface d'onde au cours du temps.

FIG. 1.7 – Famille des surfaces d'onde.

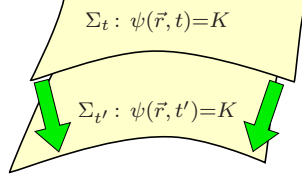


FIG. 1.6.

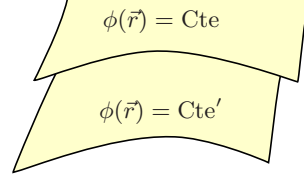


FIG. 1.7.

La famille des surfaces d'onde (cf. figure 1.7), est ainsi la même à tout instant. Elle est simplement donnée par (surfaces équiphasés)

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \text{Cte.}} \quad (1.31)$$

Il existe une analogie, purement mathématique, entre l'optique géométrique et l'électrostatique. La table 1.1 met en parallèle les notions de l'optique géométrique et de l'électrostatique (potentiel  $U$ , champ électrostatique  $\vec{E}(\vec{r})$ , équipotentielles, lignes du champ). Toutefois l'analogie ne va pas très loin : l'équation (1.15) ( $k = 2\pi n/\lambda_0$ ) vérifiée par  $\vec{k}$  n'a pas la même forme que l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  vérifiée par  $\vec{E}$ .

TAB. 1.1 – Analogie entre l'optique géométrique et l'électrostatique.

optique géométrique	électrostatique
$\phi(\vec{r})$	$U(\vec{r})$
$\vec{k}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$	$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{k} = 0$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$
surfaces d'onde $\phi(\vec{r}) = \text{Cte}$	équipotentielles $U(\vec{r}) = \text{Cte}$
rayons lumineux	lignes de champ

De la même façon qu'on démontre que le champ électrostatique est orthogonal aux équipotentielles, on montre le théorème suivant.

**Théorème 1.4.** *Le vecteur d'onde  $\vec{k}(\vec{r})$  est perpendiculaire aux surfaces d'onde.*

*Démonstration.* La variation infinitésimale  $d\phi = \phi(\vec{r} + \vec{dr}) - \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{dr} = -\vec{k} \cdot \vec{dr}$  est nulle lorsque les points  $M$  et  $M + \vec{dr}$  sont sur la même surface d'onde. On en déduit que  $\vec{k}$  est perpendiculaire à tout vecteur tangent à la surface d'onde en  $M$  (cf. figure 1.8).  $\square$

Ce théorème s'énonce aussi (cf. figures 1.8 et 1.9) :

**Théorème 1.5 (théorème de Malus<sup>8</sup> et Dupin<sup>9</sup>).** *Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde.*



**Théorème 1.6 (différence de phase).** *La différence de phase  $\phi(A) - \phi(B)$  est donnée par la circulation du vecteur d'onde  $\vec{k}$  le long de tout chemin  $\Gamma$  allant de  $A$  à  $B$  :*

$$\phi(A) - \phi(B) = \int_{\Gamma} \vec{k} \cdot \vec{dr} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{\Gamma} n \vec{u} \cdot \vec{dr}. \quad (1.32)$$

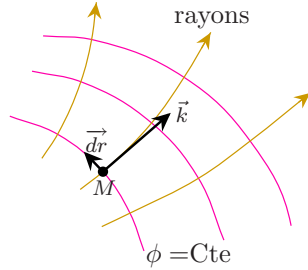


FIG. 1.8.

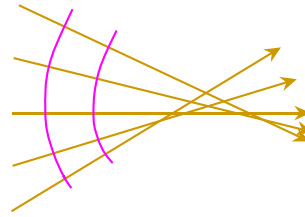


FIG. 1.9.

FIG. 1.8 – Surfaces d'onde et rayons lumineux (milieu inhomogène). Les rayons lumineux sont courbes.

FIG. 1.9 – Surfaces d'onde et rayons lumineux (milieu homogène). Les rayons lumineux sont rectilignes.

*Démonstration.* En effet

$$\phi(A) - \phi(B) = - \int_{\Gamma} d\phi = \int_{\Gamma} \underbrace{-\vec{\nabla}\phi}_{\vec{k}} \cdot \vec{dr} = \int_{\Gamma} \vec{k} \cdot \vec{dr}. \quad (1.33)$$

La dernière forme dans l'équation (1.32) s'obtient en posant  $\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dans le sens et direction du rayon lumineux.  $\square$

Dans l'analogie avec l'électrostatique (cf. table 1.1), cette relation correspond à l'expression

$$U(A) - U(B) = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr} \quad (1.34)$$

qui donne la différence de potentiel en fonction de la circulation du champ  $\vec{E}$  le long du chemin  $\Gamma$ . Le champ de vecteurs  $\vec{k}$  (ou  $n\vec{u}$ ) est, comme le champ  $\vec{E}$  de l'électrostatique, un champ de vecteurs irrotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{k} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge (n\vec{u}) = 0 \quad \text{sont analogues à} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0. \quad (1.35)$$

Il est conservatif :

$$\oint \vec{k} \cdot \vec{dr} = 0, \quad \oint n \vec{u} \cdot \vec{dr} = 0 \quad \text{sont analogues à} \quad \oint \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0 \quad (1.36)$$

pour les intégrales le long d'une boucle.

En **résumé** nous avons retrouvé quelques résultats de l'optique géométrique. La fin de cette section décrit les surfaces d'onde et les rayons lumineux

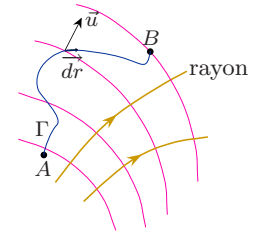


FIG. 1.10 – Calcul de la circulation du vecteur d'onde.

8. Etienne-Louis Malus (1775-1812)

9. Pierre Charles François Dupin (1784-1873)

pour quelques exemples d'ondes dans un milieu homogène. On y retrouvera que les rayons lumineux sont rectilignes. La démonstration générale de la propagation rectiligne dans un milieu linéaire homogène isotrope sera donnée page 24.

### 1.2.3 Ondes plane, sphérique et cylindrique

FIG. 1.11 – Onde plane.

FIG. 1.12 – Onde sphérique.

FIG. 1.13 – Onde cylindrique.

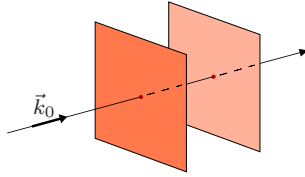


FIG. 1.11.

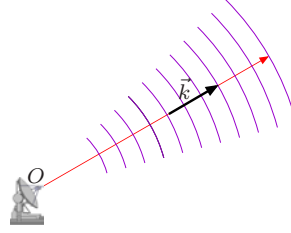


FIG. 1.12.

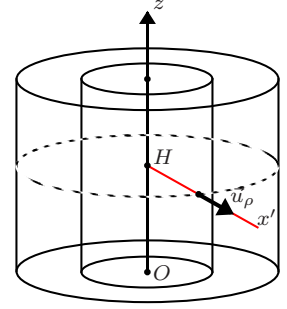


FIG. 1.13.

**Onde plane.** Pour une phase de la forme

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}, \quad \text{avec } \phi_0 \text{ et } \vec{k}_0 \text{ constants,} \quad (1.37)$$

le vecteur d'onde est uniforme  $\vec{k}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi = \vec{k}_0$ . Les équations (1.11–1.16) correspondent à une onde plane (cf. figure 1.11). Les surfaces d'onde, données par l'équation (1.31), sont les plans perpendiculaires à  $\vec{k}_0$ . Les rayons lumineux sont les droites parallèles à  $\vec{k}_0$ . Si  $\vec{A}(\vec{r})$  est uniforme (resp. non uniforme), l'onde plane est **homogène** (resp. **inhomogène**).

On peut vérifier que l'équation (1.15) est compatible avec l'hypothèse d'un milieu homogène :  $\vec{k} = \vec{k}_0 = \text{Cte}$  et l'indice  $n$  est uniforme.

**Onde sphérique.** Pour une phase de la forme

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - kr, \quad \text{avec } \phi_0 \text{ et } k \text{ constants,} \quad (1.38)$$

le vecteur d'onde vaut  $\vec{k}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi = k\vec{u}_r$ . L'équation (1.31) donne  $r = \text{Cte}$  : les surfaces d'onde sont les sphères centrées en  $O$ . Les rayons lumineux sont les demi-droites issues de  $O$  : l'onde est sphérique (cf. figure 1.12). L'amplitude  $\vec{A}(\vec{r})$  ne peut pas être continue et de module constant sur toute une surface d'onde (sphère) par suite de la contrainte  $\vec{A}(\vec{r}) \perp \vec{u}_r$  : une onde sphérique monochromatique est toujours inhomogène.

**Onde cylindrique.** Utilisons un système de coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$  avec  $\vec{r} = (\rho, \theta, z)$ . Pour une phase de la forme

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - k\rho, \quad \text{avec } \phi_0 \text{ et } k \text{ constants,} \quad (1.39)$$

le vecteur d'onde vaut  $\vec{k}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi = k\vec{u}_\rho$ . Les surfaces d'onde ont l'équation  $\rho = \text{Cte}$ : ce sont les cylindres d'axe  $Oz$ . Les rayons lumineux sont les demi-droites  $Hx'$  perpendiculaires à  $Oz$  où  $H$  est un point de l'axe  $Oz$ : l'onde est cylindrique (cf. figure 1.13).

### 1.3 Lois de Snell-Descartes

L'approximation de l'optique géométrique vue dans la section précédente ne s'applique que lorsque l'échelle des inhomogénéités du milieu est grande par rapport à  $\lambda_0$ . En effet il est clair que les équations (1.13) et (1.15) ne sont compatibles que dans cette situation.

*Dans cette section, nous examinons le cas du dioptre où ces hypothèses ne sont plus vérifiées (l'indice est discontinu). Nous verrons que l'on peut continuer d'utiliser l'optique géométrique, les phénomènes au voisinage du dioptre étant décrits par les lois de Snell-Descartes.*

Considérons un dioptre  $\mathcal{S}$  (cf. figure 1.14) qui sépare deux milieux homogènes  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  d'indices respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Une onde lumineuse (l'onde incidente) se propageant dans le milieu  $\mathcal{E}_1$  arrive en  $P$  sur le dioptre  $\mathcal{S}$ . Dans la petite boule  $V_P$  centrée en  $P$  nous connaissons la structure de l'onde : Dans  $V_P \cap \mathcal{E}_1$  c'est la superposition de l'onde incidente et d'une onde réfléchie. Dans  $V_P \cap \mathcal{E}_2$  c'est l'onde transmise.

Il n'est plus possible de définir un seul vecteur d'onde constant dans le volume  $V_P$  et les expressions (1.11–1.13) ne s'appliquent pas dans la petite boule  $V_P$ . L'optique géométrique n'est plus strictement valable au voisinage de  $\mathcal{S}$ . Cependant, les **lois de Snell-Descartes**, établies dans le cours d'électromagnétisme, permettent de construire géométriquement les rayons lumineux réfléchis et transmis connaissant le rayon lumineux incident arrivant en  $P$  et d'étendre l'utilisation de l'optique géométrique pour décrire des systèmes comportant plusieurs milieux.

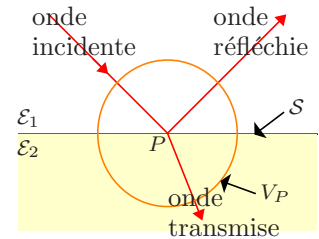


FIG. 1.14 – Changement de milieu.

#### 1.3.1 Rayon lumineux réfracté

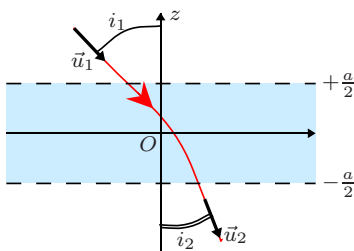


FIG. 1.15.

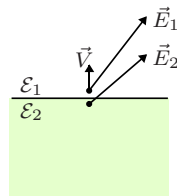


FIG. 1.16.

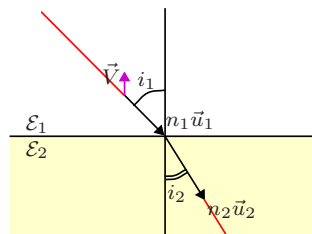


FIG. 1.17.

FIG. 1.15 – Indice continu.

FIG. 1.16 – Électrostatique.

FIG. 1.17 – Les lois de Snell-Descartes de la réfraction.

Négligeons pour commencer les rayons réfléchis par le dioptre. La figure 1.15 représente un milieu où l'indice varie continûment avec la hauteur  $z$  entre deux valeurs constantes  $n_1$  et  $n_2$  :

$$n(z) = \begin{cases} n_1 & \text{si } z \geq a/2 \\ n_2 & \text{si } z \leq -a/2. \end{cases} \quad (1.40)$$

Pour  $a \gg \lambda_0$ , l'approximation de l'optique géométrique s'applique et les rayons lumineux se courbent dans la zone d'épaisseur  $a$  d'indice variable.

Que ce passe-t-il lorsqu'on prend la limite  $a \rightarrow 0$  de ce système? Cela nous oblige aussi à prendre la limite  $\lambda_0 \rightarrow 0$  pour continuer à avoir  $a \gg \lambda_0$ . Le milieu lui-même tend vers le dioptre de la figure 1.14. Pour trouver ce que deviennent les vecteurs unitaires  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sur les rayons lumineux de part et d'autre du dioptre, on peut utiliser l'analogie avec l'électrostatique, équation (1.35) ou (1.36). En électrostatique, l'équation  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  (ou  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ ) permet de montrer que les champs électrostatiques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  de part et d'autre de  $\mathcal{S}$  sont liés par la relation (cf. figure 1.16)

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \vec{V} \quad (1.41)$$

où  $\vec{V} \perp \mathcal{S}$ . L'analogie nous donne l'équation (cf. figure 1.17)

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \vec{V} \quad (1.42)$$

où  $\vec{V}$  est un vecteur<sup>10</sup> perpendiculaire au dioptre  $\mathcal{S}$ . Cette relation exprime que la composante parallèle au dioptre du vecteur  $n\vec{u}$  (ou du vecteur d'onde  $\vec{k}$ ) est continue au passage du dioptre (analogue à la continuité de la composante parallèle du champ électrostatique  $\vec{E}$ ). Elle conduit aux **lois de Snell-Descartes de la réfraction** :

- le rayon réfracté est dans le plan d'incidence (le plan qui contient le rayon incident et la normale au dioptre) ;
- les angles d'incidence et de réfraction sont liés par :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (1.43)$$

En effet, l'équation (1.42) montre d'abord que  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et la normale au dioptre sont coplanaires, puis donne la relation (1.43) par projection sur le dioptre.

En conclusion, l'optique géométrique dans la limite  $a \rightarrow 0$ ,  $\lambda_0 \rightarrow 0$  donne le rayon réfracté prévu par la théorie de Maxwell. Les propriétés des rayons et surface d'ondes que nous avons montrées section 1.2, dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, et les propriétés que nous verrons plus loin, restent valables pour les ondes réfractées par des dioptres. La

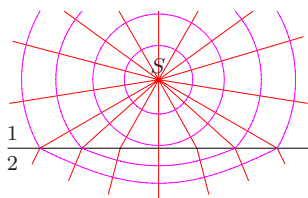


FIG. 1.18 – Onde sphérique réfractée par un dioptre. On n'a pas représenté l'onde réfléchie.

<sup>10</sup> En électrostatique,  $V = \sigma/\epsilon_0$  s'exprime en fonction des charges surfaciques  $\sigma$ . En optique géométrique, vous pouvez vérifier que  $V$  s'exprime en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $i_1$  et  $i_2$  sans besoin d'autres données.

figure 1.18, qui représente une onde émise par une source ponctuelle  $S$  et réfractée par un dioptré plan, en donne un exemple. Les rayons lumineux et surfaces d'ondes existent pour ce système. Le théorème de Malus et Dupin reste valable : les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde. L'onde est sphérique autour de  $S$  dans le milieu 1, mais cesse de l'être dans le milieu 2 (les rayons réfractés ne sont pas concourants).

### 1.3.2 Rayon lumineux réfléchi

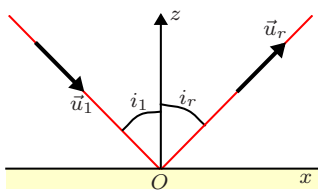


FIG. 1.19.

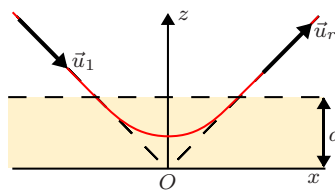


FIG. 1.20.

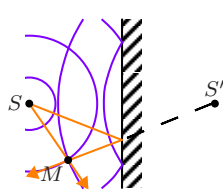


FIG. 1.21.

FIG. 1.19 – Les lois de Snell-Descartes de la réflexion.

FIG. 1.20 – Indice continu.

FIG. 1.21 – Réflexion sur un miroir d'une onde sphérique.

Le rayon lumineux réfléchi est dans le sens et direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  tel que

$$n_1 \vec{u}_1 - n_1 \vec{u}_r = \vec{V}' \quad (\vec{V}' \text{ perpendiculaire au dioptré } \mathcal{S}) \quad (1.44)$$

qui est semblable à l'équation (1.42). Cette équation conduit aux **lois de Snell-Descartes de la réflexion** (cf. figure 1.19) :

- le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (le plan qui contient le rayon incident et la normale au dioptré) ;
- les angles d'incidence et de réflexion sont égaux.

L'équation (1.44) peut être considérée comme la limite  $a \rightarrow 0$  d'un système (non physique) où l'indice varie de 0 à  $n_1$  dans l'épaisseur  $a$  (cf. figure 1.20).

On va pouvoir utiliser l'optique géométrique pour décrire l'onde réfléchie. La figure 1.21 représente une onde émise par une source lumineuse ponctuelle  $S$  et réfléchie par un miroir plan. L'onde réfléchie est sphérique : elle semble être émise par le point  $S'$  symétrique de  $S$  par rapport au miroir. Toutefois, il y a une difficulté si on veut décrire en même temps l'onde incidente et réfléchie. Au point  $M$  il passe deux rayons lumineux et deux surfaces d'onde : il n'existe pas de phase  $\phi(\vec{r})$  qui décrive à la fois l'onde incidente et réfléchie. En optique géométrique, on doit séparer les deux ondes.

Si un observateur se place en  $M$ , il peut en orientant son œil, séparer les deux ondes. Par contre si on place en  $M$  un écran d'observation on obtient le dispositif de la figure 1.22, appelé **miroir de Lloyd**<sup>11</sup>. Deux ondes se superposent (interfèrent) au point  $M$  : l'onde qui arrive directement suivant

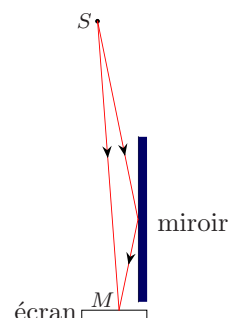


FIG. 1.22 – Miroir de Lloyd.

11. Humphrey Lloyd (1800-1881)

le rayon lumineux  $SM$  et une autre qui arrive après réflexion sur le miroir. L'optique géométrique ne suffit plus pour interpréter l'aspect de l'écran bien que les expressions (1.11–1.16) décrivent correctement chacune des deux ondes qui arrivent sur l'écran. Nous verrons dans le chapitre 4 la théorie des **interférences** qui permet de traiter ce type de problème.

## 1.4 Limite de validité de l'approximation de l'optique géométrique

En nous reportant à la figure 1.2, nous allons examiner d'autres cas que le dioptre où le le champ électrique n'est plus de la forme (1.11–1.13). L'optique géométrique n'est plus suffisante pour interpréter certains phénomènes et doit être complétée par l'optique ondulatoire.

**Phénomène de diffraction** (cf. figures 1.2 et 1.23). Dans le petit volume  $V_B$  près du bord  $B$  du diaphragme l'onde n'a plus la structure d'une onde plane. Par exemple, si le diaphragme est un métal parfait, le champ électrique doit être perpendiculaire en tout point de sa surface, ce qui est impossible pour une onde plane. À des distances de quelques longueurs d'onde des obstacles, la condition (1.13) ne s'applique plus et l'optique géométrique cesse d'être valable. Il apparaît le phénomène de **diffraction** qui sera étudié au chapitre 5.

FIG. 1.23 – Près du bord du diaphragme.

FIG. 1.24 – Onde diffractée par une fente.

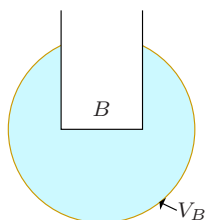


FIG. 1.23.

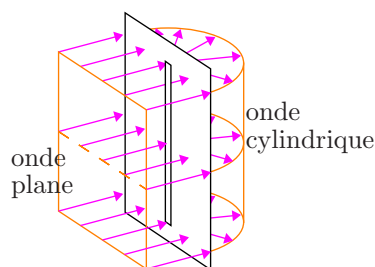


FIG. 1.24.

La figure 1.24 représente une onde plane qui tombe sur une fente très fine (largeur de quelques longueurs d'onde). Par suite du phénomène de diffraction il apparaît dans le demi espace derrière la fente une onde cylindrique non homogène. L'onde cylindrique est semblable à celle de la figure 1.13, la fente étant assimilée à l'axe  $Oz$ .

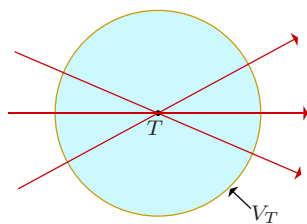


FIG. 1.25 – La boule  $V_T$  est centrée au point de focalisation  $T$ .

**Voisinage de la source ou d'un point de focalisation** (cf. les figures 1.2 et 1.25). Dans le petit volume  $V_T$  entourant le point de focalisation  $T$  les rayons lumineux convergent vers le point  $T$ . Il n'est plus possible de définir un vecteur d'onde constant dans le volume  $V_T$  et les expressions (1.11–1.16)

ne s'appliquent pas au voisinage de  $T$ . Il en est de même au voisinage de la source  $S$ .

L'optique géométrique n'est plus strictement valable au voisinage des sources et des points de focalisation, mais l'utilisation de rayons lumineux issus de  $S$  ou se prolongeant au delà du point de focalisation  $T$  conduit une description correcte des phénomènes observés.

**L'optique géométrique et l'optique ondulatoire.** Désignons par  $d$  une longueur telle que l'indice du milieu ou l'amplitude de l'onde varie beaucoup sur la distance  $d$ . Au voisinage des obstacles et des points de focalisation, et plus généralement lorsque

$$d \sim \lambda \quad (1.45)$$

l'approximation de l'optique géométrique cesse d'être valable. Pour une situation donnée, il est clair que si on peut diminuer la longueur d'onde  $\lambda$ , l'approximation s'améliorera. En pratique, on peut utiliser l'approximation de l'optique géométrique lorsque

$$\boxed{\lambda \ll d.} \quad (1.46)$$

On retiendra que **l'optique géométrique correspond aux ondes dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$** . Lorsque les effets dus à la longueur d'onde finie interviennent, on utilise **l'optique ondulatoire** qui traite des interférences et de la diffraction.

## 1.5 Chemin optique

*Le chemin optique va nous permettre d'obtenir les lois fondamentales de l'optique géométrique que nous n'avons pas encore montrées. Dans la suite, il sera très utile pour les calculs d'interférence et de diffraction.*

### 1.5.1 Définition

Considérons un chemin  $\Gamma = \widehat{AB}$  allant d'un point  $A$  à un point  $B$ . L'indice  $n(\vec{r})$  n'est pas nécessairement continu (changement de milieu admis).

**Définition 1.4.** Le **chemin optique** de  $A$  à  $B$  le long du chemin  $\Gamma = \widehat{AB}$  est l'intégrale

$$\boxed{[AB] = \int_{\widehat{AB}} n dl} \quad (\text{cf. figure 1.26}). \quad (1.47)$$

Le chemin  $\Gamma$  sera souvent le trajet d'un rayon lumineux, mais la définition ci-dessus s'applique à un chemin quelconque. La notation  $[AB]$ , qui est conventionnelle, n'est pas très précise. Il y a une infinité de chemins allant de  $A$  à  $B$ , et le chemin optique dépend du chemin  $\Gamma$  et pas seulement des points

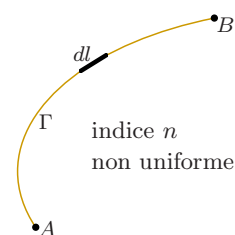


FIG. 1.26 – Chemin optique.

$A$  et  $B$ . Les notations  $[AKB]$ ,  $[AKLB]$ , ... permettent de préciser le chemin  $\Gamma$ . Le chemin optique  $[AB]$  est une longueur. Dans un milieu homogène ( $n = \text{Cte}$ ), le chemin optique est l'indice  $n$  multiplié par la longueur  $L$  du chemin :

$$[AB] = n \int_{\widehat{AB}} dl = nL \quad \text{si } n = \text{Cte}. \quad (1.48)$$

**Exemple** (cf. figure 1.27). Soit un dioptre plan séparant deux milieux homogènes d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Considérons le chemin  $\Gamma = \widehat{AB}$  formé des deux segments de droite  $AK$  et  $KB$  de longueurs respectives  $l_1$  et  $l_2$ . Le chemin optique de  $A$  à  $B$  le long de ce chemin est :

$$[AKB] = n_1 l_1 + n_2 l_2. \quad (1.49)$$

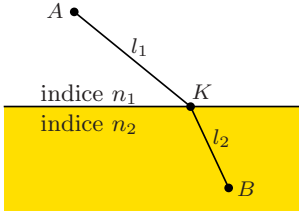


FIG. 1.27 – Le chemin optique est  $[AKB] = n_1 l_1 + n_2 l_2$ .

Soit  $t_{AB}$  le temps que met la lumière pour parcourir le chemin  $\Gamma = \widehat{AB}$ , l'élément  $dl$  étant parcouru à la vitesse  $v = c/n$  dans le temps  $dt = dl/v$ . On a :

$$t_{AB} = \int_{\widehat{AB}} dt = \int_{\widehat{AB}} \frac{dl}{v} = \int_{\widehat{AB}} \frac{n dl}{c} = \frac{[AB]}{c}. \quad (1.50)$$

Nous énonçons ce résultat sous forme de théorème :

**Théorème 1.7 (temps de parcours par la lumière).** *Le temps  $t_{AB}$  que met la lumière pour parcourir un chemin  $\Gamma$  d'un point  $A$  à un point  $B$  est égal au chemin optique  $[AB]$  le long de  $\Gamma$  divisé par la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  :*

$$t_{AB} = \frac{[AB]}{c}. \quad (1.51)$$

### 1.5.2 Propriété fondamentale

**Théorème 1.8 (propriété fondamentale du chemin optique).** *Soient  $A$  et  $B$  deux points d'un même rayon lumineux. La différence de phase  $\phi(A) - \phi(B)$  est donnée en fonction du chemin optique  $[AB]$  le long de ce rayon lumineux et de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  par*

$$\boxed{\phi(A) - \phi(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [AB]}. \quad (1.52)$$

*Démonstration.* Le long d'un rayon lumineux, l'équation (1.32) donne

$$\phi(A) - \phi(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{\Gamma} n \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{dr}}_{dl} = \frac{2\pi [AB]}{\lambda_0}. \quad \square$$

Le théorème 1.8, comme l'équation (1.32), s'applique tant à un milieu d'indice variable qu'à un instrument d'optique (téléscope, appareil photographique, ...) qui comporte des dioptries et des miroirs (système **catadioptrique**). Il permet d'écrire l'eikonale au point  $B$  en fonction du chemin



optique  $[AB]$  le long du rayon lumineux  $\widehat{AB}$  :

$$\psi(B, t) = \omega t + \phi(B) = \omega t + \phi(A) - \frac{2\pi[AB]}{\lambda_0}. \quad (1.53)$$

D'après l'équation (1.51), on a aussi

$$\psi(B, t) = \omega(t - t_{AB}) + \phi(A) \quad \text{car} \quad \omega t_{AB} = \frac{2\pi\nu[AB]}{c} = \frac{2\pi[AB]}{\lambda_0}. \quad (1.54)$$

L'eikonale au point  $B$  et à l'instant  $t$  est donc l'eikonale au point  $A$  et à l'instant  $t - t_{AB}$  :

$$\psi(B, t) = \omega(t - t_{AB}) + \phi(A) = \psi(A, t - t_{AB}) \quad (1.55)$$

qui montre que la durée  $t_{AB}$  du parcours du rayon lumineux  $AB$  est le temps que met l'onde (l'eikonale) pour se propager de  $A$  à  $B$ .

Les champs électriques  $\vec{E}_A$  et  $\vec{E}_B$  aux points  $A$  et  $B$  d'un même rayon lumineux sont donnés par l'équation (1.11) :

$$\hat{\vec{E}}_A(t) = \vec{A}_A e^{i[\omega t + \phi(A)]} \quad (1.56)$$

et

$$\hat{\vec{E}}_B(t) = \vec{A}_B e^{i[\omega t + \phi(B)]} = \vec{A}_B e^{i(\omega t + \phi(A) - 2\pi[AB]/\lambda_0)}. \quad (1.57)$$

Les amplitudes  $\vec{A}_A$  et  $\vec{A}_B$  peuvent être différentes (d'après (1.13), elles sont approximativement égales lorsque la distance entre  $A$  et  $B$  est de l'ordre de quelques  $\lambda_0$ ).

La propriété suivante, illustrée figure 1.28, permet de retenir assez facilement les équations (1.52) et (1.57).

**Théorème 1.9.** *Soient  $A$  et  $B$  deux points d'un même rayon lumineux. Les champs électriques en  $A$  et  $B$  vibrent en phase si le chemin optique  $[AB]$  le long du rayon lumineux est égal à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .*

En effet, la différence de phase des champs  $\vec{E}_A$  et  $\vec{E}_B$  est alors

$$\phi(A) - \phi(B) = 2\pi. \quad \square$$

Pour retrouver (1.52), il suffit de se souvenir que la différence de phases  $\phi(A) - \phi(B)$  est proportionnelle au chemin optique (soit  $\phi(A) - \phi(B) = \alpha[AB]$ ) et que pour  $[AB] = \lambda_0$  la différence de phases est  $\phi(A) - \phi(B) = 2\pi$ .

## 1.6 Principe de Fermat

Dans cette section, nous montrons le principe de Fermat, qui apparaît donc comme une conséquence des équations de Maxwell. Ce principe, qui fut introduit au XVII<sup>e</sup> siècle, est très puissant : il peut servir de postulat de base

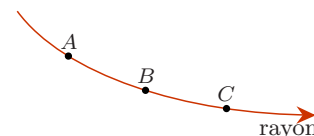


FIG. 1.28 – Les champs électriques en  $A$ ,  $B$  et  $C$  vibrent en phase.  $[AB] = [BC] = \lambda_0$ .

de l'optique géométrique, les trajectoires des rayons lumineux et les lois de Snell-Descartes s'en déduisent.

Considérons un rayon lumineux  $AB$ . Il peut correspondre à des ondes lumineuses différentes (dans un milieu homogène il pourrait faire partie d'une onde plane, d'une onde sphérique, ...). Supposons qu'il existe une région  $\mathcal{V}$ , qui contient le rayon lumineux  $AB$ , et où on peut créer une onde lumineuse telle que par tout point  $M \in \mathcal{V}$  il passe un seul rayon lumineux et une seule surface d'onde (cf. figure 1.29). Nous appellerons une telle région un **voisinage régulier** du rayon lumineux  $AB$ .

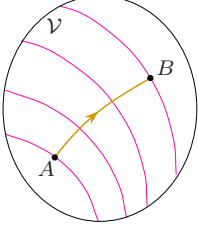


FIG. 1.29 – Rayon lumineux dans un voisinage régulier.

*Remarque.* Un rayon subissant une réflexion (cf. figure 1.21) n'a pas de voisinage régulier.

**Théorème 1.10 (principe de Fermat).** *Le chemin optique compté le long de toute courbe allant de  $A$  à  $B$  dans un voisinage régulier est le plus court le long du rayon lumineux  $AB$ .*

Le principe de Fermat est aussi connu sous les noms de **principe de moindre chemin optique** et de **principe de moindre temps**. En effet, d'après le théorème 1.7, page 22, il peut s'énoncer en disant que *la durée que met la lumière pour aller de  $A$  à  $B$  est la plus courte en suivant le rayon lumineux*.

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un chemin allant de  $A$  à  $B$  dans un voisinage régulier du rayon lumineux  $AB$  et soient  $[A\Gamma B]$  et  $[AB]$  les chemins optiques comptés le long de  $\Gamma$  et du rayon lumineux  $AB$  respectivement (cf. figure 1.30). Nous devons montrer que  $[A\Gamma B] \geq [AB]$ .

Rappelons l'équation (1.32)

$$\phi(A) - \phi(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{\Gamma} n \vec{u} \cdot \vec{dr}$$

et l'équation (1.52)

$$\phi(A) - \phi(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [AB].$$

On en déduit le chemin optique le long du rayon lumineux  $AB$  comme une intégrale le long de  $\Gamma$  :

$$[AB] = \int_{\Gamma} n \vec{u} \cdot \vec{dr}. \quad (1.58)$$

Comme  $|\vec{u} \cdot \vec{dr}| \leq |\vec{dr}| = dl$  et  $n > 0$ , on a

$$[AB] \leq \int_{\Gamma} n |\vec{u} \cdot \vec{dr}| = \int_{\Gamma} n dl = [A\Gamma B] \quad (1.59)$$

ce qui montre que le chemin optique compté le long de  $\Gamma$  est plus long que le chemin optique compté le long du rayon lumineux  $AB$ .  $\square$

**Théorème 1.11 (principe de la propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène).** *Dans un milieu linéaire homogène isotrope, les rayons lumineux sont rectilignes.*

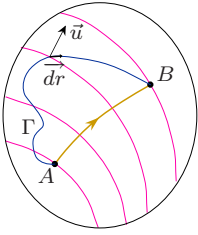


FIG. 1.30 – Principe de Fermat.

*Démonstration.* Dans un milieu homogène (cf. équation (1.48)) le chemin optique est l'indice  $n$  multiplié par la longueur du chemin. Le principe de Fermat revient à dire que le rayon lumineux  $AB$  est le plus court chemin pour aller de  $A$  à  $B$ . Le rayon lumineux est donc rectiligne.  $\square$

**Théorème 1.12 (principe du retour inverse de la lumière).** *La lumière peut aller d'un point  $B$  à un point  $A$  en suivant le même trajet, en sens inverse, que lorsqu'elle va de  $A$  à  $B$ .*

*Démonstration.* Le chemin optique le long d'un chemin ne dépend pas du sens du chemin. Le principe de Fermat implique alors que le trajet suivi par la lumière pour aller de  $B$  à  $A$  ou de  $A$  à  $B$  est le même.  $\square$

Le principe de Fermat, tel qu'il est énoncé dans le théorème 1.10, présente l'inconvénient de faire intervenir un voisinage régulier. On préfère utiliser la formulation suivante qui est plus simple à utiliser.

**Théorème 1.13 (principe de Fermat).** *Le chemin optique compté le long d'un rayon lumineux allant de  $A$  à  $B$  est stationnaire.*

Nous ne démontrerons pas cette formulation, mais nous allons expliquer le mot **stationnaire**.

Pour une fonction  $f(x)$  d'une variable, on dit que la fonction est stationnaire en  $x = x_0$  si

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \tag{1.60}$$

La figure 1.31 représente les 3 cas possibles.

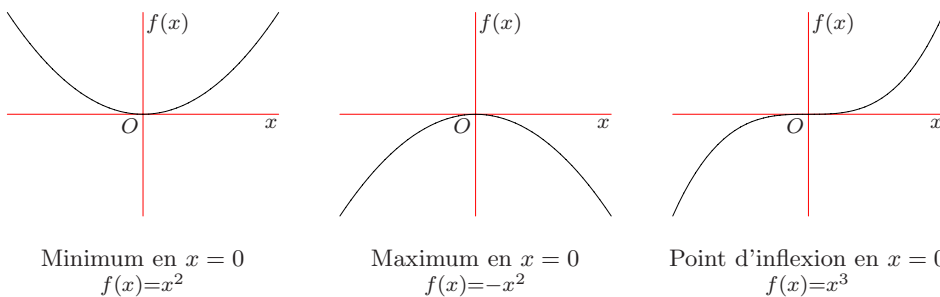


FIG. 1.31 – Types de points stationnaires d'une fonction réelle  $f(x)$  à une variable : extremum (minimum ou maximum) et point d'inflexion.

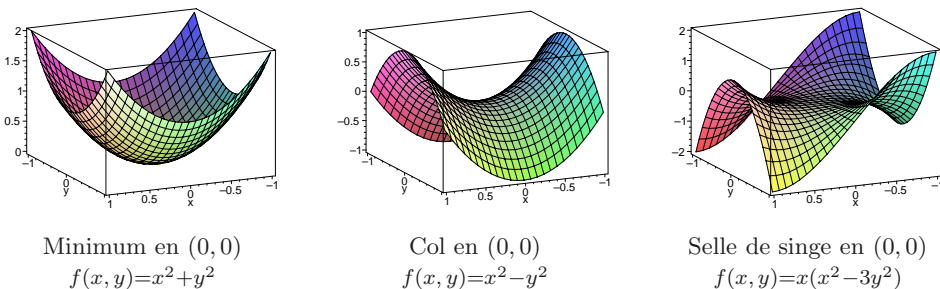


FIG. 1.32 – Quelques types de points stationnaires d'une fonction réelle  $f(x, y)$  à deux variables : minimum, col (ou point selle), selle de singe (que le singe peut enfourcher une jambe à gauche, une jambe à droite et la queue derrière).

Pour une fonction  $f(x, y)$  de deux variables, on dit que la fonction est stationnaire en  $(x_0, y_0)$  si

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x, y)=(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x, y)=(x_0, y_0)} = 0. \quad (1.61)$$

Autrement dit, la fonction  $f(x, y)$  est stationnaire par rapport aux variations de chacune des variables  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire que  $f(x, y_0)$ , considérée comme fonction de  $x$ , est stationnaire en  $x_0$  et  $f(x_0, y)$ , considérée comme fonction de  $y$ , est stationnaire en  $y_0$ . La figure 1.32 représente quelques situations possibles.

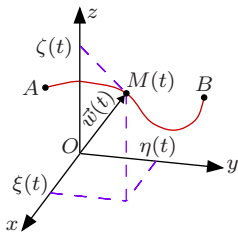


FIG. 1.33 – Chemin  $\Gamma$  de  $A$  à  $B$ .

Donnons nous le chemin  $\Gamma$  de  $A$  à  $B$  comme la trajectoire d'un point  $M(t)$ , repéré par rapport à une origine  $O$ , lorsque le paramètre  $t$  varie de 0 à 1 (cf. figure 1.33). Le chemin  $\Gamma$  est défini par une fonction vectorielle  $\vec{w}(t)$  (ou trois fonctions réelles  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  et  $\zeta(t)$  donnant les composantes cartésiennes de  $\vec{w}(t)$ ):

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{w}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)), \quad \text{avec } \vec{w}(0) = \overrightarrow{OA} \text{ et } \vec{w}(1) = \overrightarrow{OB}. \quad (1.62)$$

Le chemin optique le long du trajet  $\Gamma$  peut être considéré comme une fonction de l'infinité de variables réelles qui définissent la courbe  $\Gamma$  ( $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  et  $\zeta(t)$  pour chacune des valeurs  $t \in [0, 1]$ ). Dire que le chemin optique est stationnaire pour le chemin  $\Gamma$  signifie en quelque sorte qu'il est stationnaire par rapport aux variations d'une quelconque de ces variables comme par exemple  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2)$ ,  $\eta(t_3)$  ou  $\zeta(t_4)$ . C'est la généralisation à une infinité de variables du cas des fonctions d'une ou deux variables examiné plus haut. L'étude de la condition de stationnarité s'appelle le **calcul des variations**. Il ne sera pas entrepris dans ce cours.

On peut remarquer que lorsque le chemin optique le long d'un chemin  $\Gamma$  allant de  $A$  à  $B$  est minimum, comme dans la première formulation du principe de Fermat, il est aussi stationnaire : les deux formulations du principe de Fermat affirment que ce chemin  $\Gamma$  est un rayon lumineux. La deuxième formulation est intéressante, parce qu'il existe des rayons lumineux où le chemin optique n'est pas minimum, mais seulement stationnaire. Bien sûr, cela veut dire qu'un tel rayon lumineux n'a pas de voisinage régulier et que la première formulation ne s'applique pas.

La situation se présente sur la figure 1.22 où il y a deux rayons lumineux qui vont du point  $S$  au point  $M$  : le chemin optique n'est minimum que sur le rayon direct.

*Pour terminer cette section, montrons comment le principe de Fermat permet de retrouver les lois de Snell-Descartes.*

**Réfraction par un dioptre** (cf. figure 1.34). Soit un dioptre plan limitant deux milieux homogènes 1 et 2 d'indices  $n_1$  et  $n_2$  respectivement ( $n_1 < n_2$ )

et deux points  $A$  et  $B$  de part et d'autre du dioptre. Le trajet en ligne droite de  $A$  à  $B$  n'est pas le plus rapide. On obtient un trajet plus rapide  $AKB$  en diminuant le chemin parcouru dans le milieu 2 où la vitesse de la lumière est plus petite.

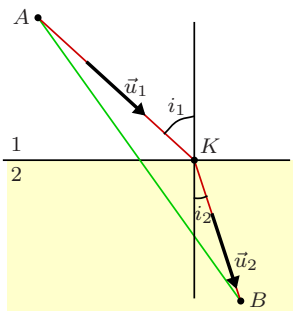


FIG. 1.34.

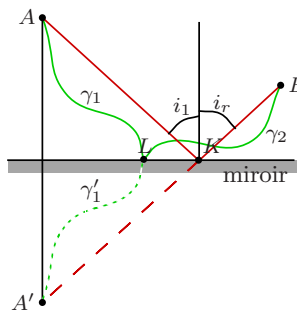


FIG. 1.35.

FIG. 1.34 – Réfraction.

FIG. 1.35 – Réflexion.

Reprenant les notations de la figure 1.27 et de l'équation (1.49), recherchons le point  $K$  du dioptre qui minimise le chemin optique  $[AKB] = n_1 l_1 + n_2 l_2$ . Choisissons un point  $O$  comme origine et posons  $\vec{r} = \overrightarrow{OK}$ . Les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  sont des fonctions de  $\vec{r}$ . On a

$$\vec{\nabla} l_1 = \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AK}}{l_1} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} l_2 = -\vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BK}}{l_2}. \quad (1.63)$$

La position de  $K$  correspondant au rayon lumineux étant stationnaire, on a

$$d(n_1 l_1 + n_2 l_2) = \vec{\nabla}(n_1 l_1 + n_2 l_2) \cdot d\vec{r} = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.64)$$

pour tout  $d\vec{r}$  infinitésimal parallèle au dioptre. Cela donne la condition (1.42) équivalente aux lois de Snell-Descartes de la réfraction.

**Réflexion sur un miroir** (cf. figure 1.35). Considérons les chemins  $\Gamma$  allant d'un point  $A$  à un point  $B$  dans le vide en se réfléchissant sur un miroir. Sur la figure on a représenté un tel chemin formé du trajet  $\gamma_1$  allant de  $A$  à un point  $L$  sur le miroir et du trajet  $\gamma_2$  allant de  $L$  à  $B$ . Le chemin optique étant la longueur du chemin ( $n = 1$ ), pour trouver le trajet de la lumière, on recherche le chemin  $\Gamma$  de longueur minimale. Soit  $\gamma'_1$  le chemin symétrique de  $\gamma_1$  par rapport au miroir. Ce chemin va du point  $A'$ , symétrique de  $A$  par rapport au miroir, au point  $L$ . La longueur du chemin  $\Gamma$  est la même que celle du chemin  $\Gamma'$  allant de  $A'$  à  $B$  formé de  $\gamma'_1$  et  $\gamma_2$ . Le chemin  $\Gamma'$  est le plus court pour la droite  $A'B$  qui coupe le miroir en  $K$ . Il en résulte que le chemin  $\Gamma$  cherché est le chemin formé des rayons rectilignes  $AK$  et  $KB$  qui vérifient les lois de Snell-Descartes de la réflexion ( $i_r = i_1$  sur la figure).

*Remarque.* Le trajet trouvé n'est le plus court que parmi les chemins qui passent par un point du miroir. Le chemin rectiligne  $AB$  direct est évidemment plus court que le chemin  $AKB$ .

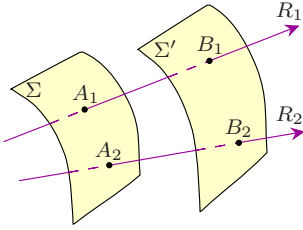


FIG. 1.36 – Chemin optique entre deux surfaces d’onde.

## 1.7 Chemin optique entre deux surfaces d’onde

Dans cette section, nous continuons l’étude des propriétés du chemin optique.

### 1.7.1 Principe de l’égalité des chemins optiques

Considérons deux surfaces d’onde  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  (au même instant  $t$ ) et des rayons lumineux  $R_1, R_2, \dots$ . Le rayon lumineux  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) coupe la surface  $\Sigma$  en  $A_i$  et la surface  $\Sigma'$  en  $B_i$  (cf. figure 1.36).

**Théorème 1.14 (principe de l’égalité des chemins optiques).** *Les chemins optiques le long des rayons lumineux entre deux surfaces d’onde sont égaux entre-eux :*

$$[A_1 B_1] = [A_2 B_2] = \dots \quad (1.65)$$

Leur valeur commune est appelée le **chemin optique entre les surfaces d’onde  $\Sigma$  et  $\Sigma'$** .

*Remarque.* D’après le théorème 1.7, page 22, on en déduit que les temps de propagation de la lumière le long des rayons lumineux entre deux surfaces d’onde sont égaux entre-eux.

*Démonstration.* La phase aux points  $A_i \in \Sigma$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) est la même (cf. l’équation (1.31) qui définit les surfaces d’onde) :

$$\phi(A_1) = \phi(A_2) = \dots \quad (1.66)$$

De même, pour les points  $B_i \in \Sigma'$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),

$$\phi(B_1) = \phi(B_2) = \dots \quad (1.67)$$

On en déduit par différence

$$\phi(A_1) - \phi(B_1) = \phi(A_2) - \phi(B_2) = \dots \quad (1.68)$$

Le théorème 1.8, page 22, donne alors les égalités (1.65) des chemins optiques.  $\square$

### 1.7.2 Exemple de la réfraction par un dioptre plan

Dans cette section, nous examinons la signification physique du principe de l’égalité des chemins optiques (théorème 1.14) dans le cas de la réfraction d’une onde plane par un dioptre plan.

Considérons un dioptre plan séparant deux milieux homogènes 1 et 2 d’indices  $n_1$  et  $n_2$  respectivement (cf. figure 1.37). Une onde plane dans le milieu 1 tombe sur ce dioptre. Les rayons lumineux incidents font l’angle  $i_1$  avec la normale au dioptre. Nous savons qu’il apparaît dans le milieu 2

une onde plane réfractée (transmise) dont la direction des rayons lumineux est donnée par les lois de Snell-Descartes. Il apparaît également une onde réfléchie dans le milieu 1 que nous négligeons et qui n'est pas représentée sur la figure.

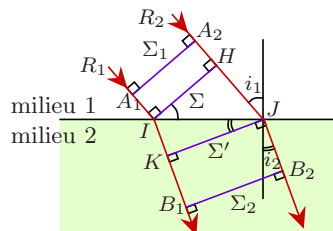


FIG. 1.37 – Réfraction d'une onde plane sur un dioptre plan.

Considérons deux rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  et deux plans d'onde  $\Sigma_1$  (onde incidente) et  $\Sigma_2$  (onde réfractée). Soient  $A_i$  et  $B_i$  les points où les rayons lumineux  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) coupent ces plans d'onde. Le théorème 1.14 nous dit que les chemins optiques entre les deux plans d'onde  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont égaux :

$$[A_1B_1] = [A_2B_2] \tag{1.69}$$

Introduisons les points  $I$  et  $J$ , où les rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  coupent le dioptre, et les points  $H$  et  $K$ , respectivement projections de  $I$  et  $J$  sur l'autre rayon lumineux. Désignons par  $\Sigma$  le plan d'onde qui passe par les points  $I$  et  $H$ , et par  $\Sigma'$  celui qui passe par les points  $J$  et  $K$ . L'égalité (1.69) équivaut à l'égalité des chemins optiques entre les plans d'onde  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  :

$$[IK] = [HJ]. \tag{1.70}$$

Désignant par  $PQ$  la longueur du segment de droite  $PQ$ , on a

$$[HJ] = n_1 HJ = n_1 IJ \sin i_1 \tag{1.71}$$

et

$$[IK] = n_2 IK = n_2 IJ \sin i_2. \tag{1.72}$$

L'égalité (1.70) donne la relation

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{1.73}$$

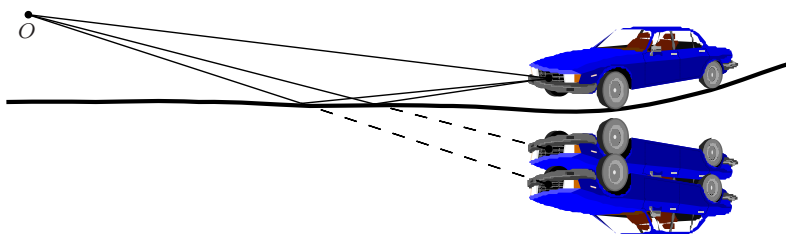
qui est une des lois de Snell-Descartes.

### 1.7.3 Mirage optique

La figure 1.38 représente les trajets lumineux venant d'une voiture en présence du phénomène de **mirage optique**. Les rayons lumineux dirigés vers le bas se courbent au ras du sol, dans une couche de quelques millimètres d'épaisseur, et repartent vers le haut. On peut alors observer une ou plusieurs images inversées, souvent assez déformées, en plus de l'image directe.

Sur la figure, au point  $O$ , on peut observer ainsi deux images inversées et partiellement superposées de la voiture.

FIG. 1.38 – Mirage : observation d'une image directe et de deux images inversées.



Le phénomène de mirage optique est dû à des variations de l'indice de l'air engendrées par des variations de sa température  $T$ . La loi de Gladstone<sup>12</sup>, affirme que l'indice de réfraction  $n$  d'un gaz est tel que  $n - 1$  est proportionnel à sa masse volumique  $\mu = \frac{M\nu}{V}$  où  $M$  est la masse molaire moyenne et  $\nu$  le nombre de moles dans le volume  $V$ . Désignant par  $\alpha$  la constante de proportionnalité (elle ne dépend que de la nature du gaz et de la fréquence de la lumière) on écrit

$$n = 1 + \alpha\mu. \quad (1.74)$$

FIG. 1.39 – Les rayons issus du ciel ont l'air de venir du bas et donnent l'impression d'une nappe d'eau sur le sol. La déviation des rayons est faible ( $\lesssim 10^{-3}$  rad). Le mirage apparaît au loin ( $\gtrsim 1$  km) et les nappes d'eau semblent s'éloigner lorsqu'on s'en approche.

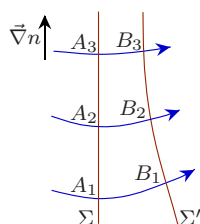
L'équation des gaz parfaits,

$$PV = \nu RT, \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M}, \quad (1.75)$$

où  $P$  est la pression et  $R$  la constante molaire des gaz parfaits, donne

$$n = 1 + \frac{\alpha MP}{RT}. \quad (1.76)$$

La pression peut en général être considérée comme uniforme, et l'indice varie avec la température. Cet effet se produit fréquemment au dessus d'une route goudronnée fortement chauffée au soleil. Dans une fine couche d'épaisseur  $\sim 1$  cm, la température  $T$  décroît et l'indice croît avec la hauteur au-dessus du sol.



Soit  $\Sigma$  la surface d'onde qui contient le point  $H$  (cf. figures 1.39 et 1.40). En ce point le rayon lumineux est horizontal et  $\Sigma$  est approximativement un plan vertical. Soit  $\Sigma'$  une deuxième surface d'onde, voisine de la précédente. L'égalité des chemins optiques (cf. théorème 1.14, page 28)

FIG. 1.40 – La courbure des rayons lumineux dans un milieu avec gradient d'indice.

$$[A_1B_1] = [A_2B_2] = [A_3B_3] \quad (1.77)$$

et le fait que l'indice croît avec la hauteur implique que les longueurs des arcs des rayons lumineux

$$\widehat{A_1B_1}, \quad \widehat{A_2B_2}, \quad \widehat{A_3B_3}$$

12. John Hall Gladstone (1827-1902)



sont en ordre décroissant. Ce n'est possible que si les rayons lumineux se courbent vers le haut. De façon plus générale, dans un milieu inhomogène, les rayons lumineux ont toujours une concavité tournée dans le sens de  $\vec{\nabla}n$ .

## 1.8 Principe d'Huygens

Dans cette section, nous dérivons le principe d'Huygens. Ce principe, sous une forme modifiée appelée principe d'Huygens-Fresnel<sup>13</sup>, sera à la base de la théorie de la diffraction.

### 1.8.1 Principe d'Huygens

Reprenons la situation de la figure 1.40, mais interprétons la autrement. La surface d'onde  $\Sigma = \Sigma_t$  correspond à l'équation

$$\psi(\vec{r}, t) = K \quad \text{avec } K = \omega t + \phi(A_1) \quad (1.78)$$

et, d'après l'équation (1.55), la surface d'onde  $\Sigma' = \Sigma_{t'}$  a pour équation

$$\psi(\vec{r}, t') = K \quad (1.79)$$

où le temps

$$t' - t = \frac{[A_1B_1]}{c} = \frac{[A_2B_2]}{c} = \frac{[A_3B_3]}{c} \quad (1.80)$$

est le temps de propagation de la lumière sur chacun des arcs  $A_1\widehat{B}_1$ ,  $A_2\widehat{B}_2$  et  $A_3\widehat{B}_3$ .

Huygens, dans son livre *Traité de la lumière*, publié en 1690, proposa l'idée suivante. Il considère qu'à l'instant  $t$  la lumière a atteint la surface d'onde  $\Sigma_t$ . Il postule que chaque point de la surface  $\Sigma_t$  se comporte comme une **source secondaire** et émet à l'instant  $t$  une ondelette (nous l'appellerons **ondelette d'Huygens**). La figure 1.41 représente l'ondelette émise au point  $A$  ainsi que plusieurs surfaces d'onde de cette ondelette. Dans la situation envisagée, le milieu n'est pas homogène et cette ondelette n'est pas une onde sphérique (elle le serait dans un milieu homogène). En  $B$ , le rayon lumineux est orthogonal à la fois à la surface d'onde de l'ondelette  $\sigma_{t'}$  atteinte au temps  $t'$  (nous appellerons  $\sigma_{t'}$  le **front d'onde** au temps  $t'$  de l'ondelette) et à la surface d'onde  $\Sigma_{t'}$  (cf. théorème 1.5, page 14).

On en déduit la propriété suivante (cf. figure 1.42), qui est connue sous le nom de **principe d'Huygens** ou **construction d'Huygens**.

**Théorème 1.15 (le principe d'Huygens).** *Chaque point de la surface d'onde  $\Sigma_t$  peut être considéré comme une source secondaire qui émet une ondelette à l'instant  $t$ . L'enveloppe des fronts d'onde à l'instant  $t'$  des ondelettes d'Huygens forme la surface d'onde  $\Sigma_{t'}$ .*

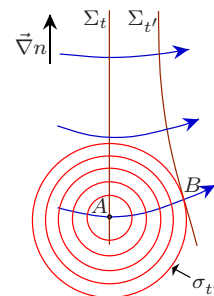


FIG. 1.41 – Ondelette émise en  $A$ .

13. Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)

*Démonstration.* Les surfaces  $\sigma_{t'}$  et  $\Sigma_{t'}$  sont tangentes en  $B$ , toutes deux étant perpendiculaires au rayon lumineux qui passe en  $B$  (cf. figure 1.41). La surface  $\Sigma_{t'}$ , tangente aux fronts d'onde à l'instant  $t'$  des ondelettes d'Huygens, s'obtient donc comme l'enveloppe de ces fronts d'onde.  $\square$

*Remarque.* Nous admettrons sans démonstration que le principe et la construction d'Huygens restent valables dans un instrument d'optique comportant des dioptrés et des miroirs.

FIG. 1.42 – Principe d'Huygens : la surface d'onde s'obtient comme enveloppe des ondelettes d'Huygens.

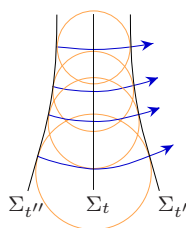


FIG. 1.42.

FIG. 1.43 – Onde sphérique dans un milieu homogène.

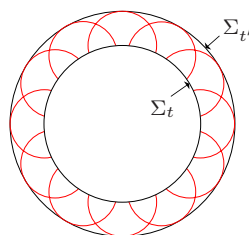


FIG. 1.43.

Dans le principe d'Huygens on ignore la partie de l'enveloppe  $\Sigma_{t''}$  ( $t-t'' = t' - t = [AB]/c$ ) qui correspond à une onde remontant le temps ( $t'' < t < t'$ ). On peut pour cela poser que les ondelettes d'Huygens ne sont émises que d'un seul côté de la surface d'onde  $\Sigma_t$ .

La construction d'Huygens permet de tracer toutes les surfaces d'onde à partir de l'une d'entre-elle. La figure 1.43 correspond à une onde sphérique dans un milieu homogène d'indice  $n$ . Les fronts d'onde des ondelettes d'Huygens de la surface d'onde  $\Sigma_t$  (sphère de rayon  $a$ ) sont des portions de sphères, limitées à l'extérieur de  $\Sigma_t$ , de même rayon  $c(t' - t)/n$ . L'enveloppe de ces fronts d'onde est la sphère  $\Sigma_{t'}$  de rayon  $a + c(t' - t)/n$  concentrique avec  $\Sigma_t$ .

Lorsque le milieu est inhomogène (cf. figure 1.44) on choisit  $t' - t = dt$  infinitésimal pour que les ondelettes d'Huygens soient sphériques. Chaque front d'onde est une sphère centrée sur la source secondaire et de rayon  $cdt/n$  où  $n$  varie d'un point à l'autre.

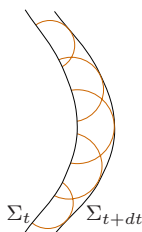


FIG. 1.44 – Pour  $t' - t = dt$  infinitésimal, les ondelettes sont sphériques.

### 1.8.2 Construction d'Huygens du rayon lumineux réfracté

*Dans cette section, nous considérons un dioptré plan. Le principe d'Huygens conduit à une construction géométrique du rayon lumineux réfracté.*

Dans le cas du dioptré plan, ce principe nous dit que le plan d'onde  $\Sigma'$  dans le milieu 2 s'obtient par l'enveloppe des fronts d'onde à l'instant  $t'$  des ondelettes d'Huygens du plan d'onde  $\Sigma$  (cf. figure 1.37).

L'ondelette émise en un point  $M \in \Sigma$  est sphérique dans le milieu 1, puis prend une forme plus compliquée non sphérique dans le milieu 2. Figure 1.45, on a représenté quelques surfaces d'onde et le front d'onde  $\sigma_{t'}$  à l'instant  $t'$  de cette ondelette. Les rayons lumineux  $MP$ ,  $MQ$ ,  $MRS$  (qui se réfracte en  $R$ ), ... sont orthogonaux aux surfaces d'onde de l'ondelette.

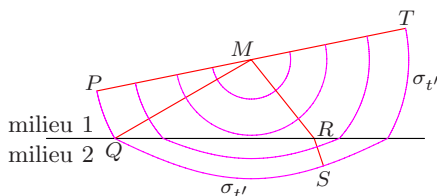


FIG. 1.45 – Ondelette émise en  $M$ .

*Remarque (tracé de  $\sigma_{t'}$ ).* Le chemin optique entre le point source  $M$  et la surface  $\sigma_{t'}$  (cf. section 1.9.1) est le chemin optique

$$a = [HJ] = [IK] = c(t' - t) \tag{1.81}$$

entre les plans d'onde  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Le chemin optique le long des rayons lumineux de l'ondelette entre  $M$  et la surface  $\sigma_{t'}$  est le même pour tous les rayons lumineux :

$$[MP] = [MQ] = [MRS] = [MT] = a. \tag{1.82}$$

Cela permet de tracer numériquement  $\sigma_{t'}$  dans le milieu 2 comme le lieu des points  $S$  situés sur les rayons lumineux réfractés issus de  $M$  et tels que  $[MRS] = a$ .

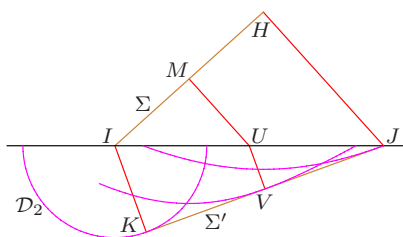


FIG. 1.46.

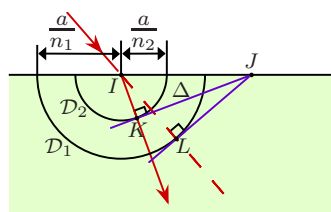


FIG. 1.47.

FIG. 1.46 – L'enveloppe des fronts d'onde est le plan d'onde  $\Sigma'$ .

FIG. 1.47 – La construction d'Huygens du rayon lumineux réfracté.

Le principe d'Huygens pour la réfraction par le dioptre plan est illustré sur la figure 1.46 où on a tracé trois ondelettes à l'instant  $t'$  :

- L'ondelette venant du point  $I$  que l'on suppose émise dans le milieu 2. Cette ondelette est donc sphérique et son front d'onde à l'instant  $t'$  est la demi-sphère  $\mathcal{D}_2$  de centre  $I$  et de rayon  $a/n_2$ .
- Le front d'onde, non sphérique, venant du point  $M$  milieu de  $IH$ .
- Le front d'onde, non sphérique, venant du point  $H$ . Ce front d'onde passe par  $J$ .

L'enveloppe des fronts d'onde est le plan d'onde  $\Sigma'$  : les trois fronts d'ondes représentés sont tangents à  $\Sigma'$  aux points  $K$ ,  $V$  et  $J$  respectivement. Cela conduit à une construction géométrique effectuée sur la figure 1.47 et connue sous le nom de **construction d'Huygens du rayon lumineux réfracté**.

*Pour construire le rayon lumineux réfracté en  $I$  :*

- Tracer le dioptre et le rayon lumineux  $R_1$  incident en  $I$ .

- Tracer les deux demi-cercles  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de centre  $I$ , situés dans le milieu 2, et de rayons  $\frac{a}{n_1}$  et  $\frac{a}{n_2}$  respectivement. La valeur du chemin optique  $a$  peut être choisie arbitrairement.
- Construire le point  $L$ , intersection du prolongement du rayon lumineux incident  $R_1$  et du demi-cercle  $\mathcal{D}_1$ . D'après la figure 1.37, où  $[HJ] = n_1 HJ = a$ , on a  $\vec{IL} = \vec{HJ}$ .
- Construire le point  $J$ , intersection de la tangente en  $L$  au demi-cercle  $\mathcal{D}_1$  et du dioptré.
- Construire la tangente  $\Delta$  au demi-cercle  $\mathcal{D}_2$  menée de  $J$ . La droite  $\Delta$  est dans le plan d'onde  $\Sigma'$ .
- Soit  $K$  le point de contact de  $\Delta$  avec le demi-cercle  $\mathcal{D}_2$ . La demi-droite  $IK$  est orthogonale au plan d'onde  $\Sigma'$  : c'est le rayon lumineux réfracté.

*Remarque :* la construction devient impossible lorsque  $n_1 \sin i_1 > n_2$  : le point  $J$  tombe alors à l'intérieur du demi-cercle  $\mathcal{D}_2$ . Il y a alors **réflexion totale** et pas de rayon lumineux réfracté.

## 1.9 Stigmatisme

*Dans cette section, nous étudions des propriétés du chemin optique dans un instrument d'optique stigmatique.*

### 1.9.1 Chemin optique entre un point et son image dans un instrument d'optique

Au voisinage d'un **point de focalisation** (source ponctuelle ou image ponctuelle dans un système optique) l'onde lumineuse peut en général être décrite par une onde sphérique (on considère un voisinage suffisamment petit pour que le milieu soit homogène).

*Nous allons montrer que le principe de l'égalité des chemins optiques (cf. théorème 1.14, page 28) s'étend au chemin optique entre un point de focalisation et une surface d'onde ou un autre point de focalisation. Autrement dit, dans ce principe, un point de focalisation peut être considéré comme une surface d'onde dégénérée à un point. Pour le cas d'un milieu homogène de la figure 1.48, la surface d'onde  $\Sigma$  étant une portion de sphère de rayon  $R$  centrée en  $S$ , la validité du principe de l'égalité des chemins optiques entre  $S$  et  $\Sigma$  est immédiate :*

$$[SA] = [SB] = [SC] = nR. \quad (1.83)$$

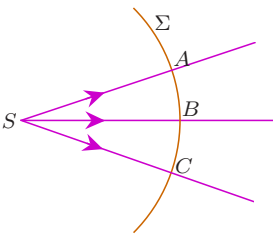


FIG. 1.48 – Onde sphérique dans un voisinage d'une source ponctuelle.

**Définition 1.5 (stigmatisme<sup>14</sup>).** On dira qu'un instrument d'optique est **stigmatique** (pour les points  $S$  et  $S'$ ) lorsque tous les rayons lumineux issus d'un point objet  $S$  convergent vers un point image  $S'$  après traversée de l'instrument.

On dit aussi que les points  $S$  et  $S'$  sont des **points conjugués** pour l'instrument optique.

La définition précédente correspond au stigmatisme **rigoureux**. Mais, plus souvent, l'instrument d'optique présente des **aberrations**. Les rayons lumineux issus d'un point objet  $S$ , après traversée de l'instrument, passent tous assez près d'un point  $S'$ , sans toutefois converger exactement en  $S'$ . Le point  $S'$  est appelé **image approchée** de  $S$  et le stigmatisme est dit **approché**.

**Théorème 1.16 (condition nécessaire de stigmatisme).** *Tous les chemins optiques le long des rayons lumineux allant d'un point source à son image dans un instrument d'optique stigmatique sont égaux entre eux.*

*Remarque 1.* D'après le théorème 1.7, page 22, on en déduit que les temps de propagation de la lumière le long de tous les rayons lumineux allant d'un point source à son image dans un instrument d'optique stigmatique sont égaux entre eux.

*Remarque 2.* À cause de la diffraction, l'image « physique » d'un point source donnée par un instrument d'optique, même rigoureusement stigmatique, forme toujours une petite tache (**tache de diffraction**). Le théorème s'applique à l'image « géométrique » du point source.

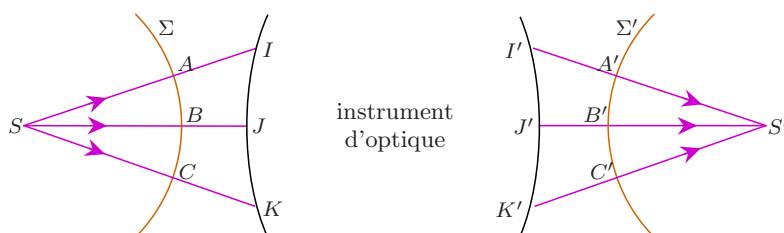


FIG. 1.49 – Système stigmatique.

*Démonstration.* Considérons un instrument d'optique, stigmatique pour les points  $S$  et  $S'$ , et plaçons en  $S$  une source lumineuse ponctuelle. Sur la figure 1.49 on a représenté des surfaces d'ondes  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  au voisinage des points focaux  $S$  et  $S'$  et des rayons lumineux ( $SAI I' A' S'$ ,  $SBJ J' B' S'$  et  $SCK K' C' S'$ ) sans préciser les trajets à l'intérieur de l'instrument. On se

14. **Stigmatisme** : (du grec *stigma* « piqûre, point ») qualité d'un instrument d'optique qui donne une image nette d'un point objet. Nous n'envisageons dans ce cours que les **images réelles**. L'extension aux **images virtuelles** ne présente pas de difficultés.

propose de montrer l'égalité des chemins optiques

$$\begin{aligned} [SAI'I'A'S'] &= [SA] + [AII'A'] + [A'S'] \\ [SBJJ'B'S'] &= [SB] + [BJJ'B'] + [B'S'] \\ [SCKK'C'S'] &= [SC] + [CKK'C'] + [C'S'] \end{aligned} \quad (1.84)$$

le long de ces rayons lumineux allant de  $S$  à  $S'$ .

L'onde émise est au voisinage de  $S$  une onde sphérique divergente : la surface d'onde  $\Sigma$  est une sphère. Le système étant stigmatique, l'onde lumineuse au voisinage de  $S'$  est une onde sphérique convergente : la surface d'onde  $\Sigma'$  est également une sphère.

Le principe de l'égalité des chemins optiques (cf. théorème 1.14, page 28) donne l'égalité des chemins optiques entre les surfaces d'ondes  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  :

$$[AII'A'] = [BJJ'B'] = [CKK'C']. \quad (1.85)$$

Ces égalités restent valables lorsque l'instrument comporte des dioptries (lentilles) et des miroirs.

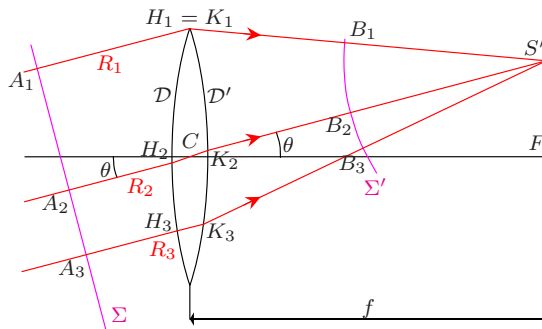
Pour le chemin optique entre un point de focalisation et une surface d'onde nous avons vu qu'au voisinage de  $S$  on a l'équation (1.83). De même au voisinage de  $S'$  on a

$$[A'S'] = [B'S'] = [C'S']. \quad (1.86)$$

L'égalité des chemins optiques (1.84) entre-eux résulte des égalités (1.83), (1.85) et (1.86).  $\square$

### 1.9.2 Exemple d'une lentille mince

FIG. 1.50 – Lentille stigmatique.



On considère (cf. figure 1.50) une lentille mince, convergente, supposée strictement stigmatique, de centre  $C$ , de foyer principal image  $F$ , de distance focale  $f$ . Une source ponctuelle lumineuse (étoile)  $S$  située à l'infini dans une

direction faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe optique de la lentille donne une image  $S'$  située dans le plan focal image de la lentille.

La lentille est biconvexe, en verre d'indice  $n$  et limitée par deux dioptries sphériques  $\mathcal{D}$  (entrée) et  $\mathcal{D}'$  (sortie).

On a représenté sur la figure trois rayons lumineux  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  issus de  $S$  et aboutissant en  $S'$  ainsi que deux surfaces d'ondes  $\Sigma$ , avant que la lumière n'atteigne la lentille, et  $\Sigma'$  après. Le rayon lumineux  $R_i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) coupe les surfaces  $\Sigma$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  et  $\Sigma'$  aux points  $A_i$ ,  $H_i$ ,  $K_i$  et  $B_i$  respectivement.

Appliquons quelques résultats vus précédemment pour décrire des propriétés de ce système.

- *La lentille est stigmatique pour les points  $S$  et  $S'$*  : les rayons lumineux  $R_i$  sont parallèles en entrée et convergent en  $S'$  en sortie de la lentille. Le rayon lumineux  $R_2$  qui passe par  $C$  fait le même angle  $\theta$  avec l'axe optique tant avant qu'après la lentille. Cela donne une construction géométrique de l'image  $S'$  comme intersection de ce rayon lumineux et du plan focal image.
- *Théorème de Malus et Dupin (les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde)* : la surface d'onde  $\Sigma$  est un **plan** perpendiculaire aux rayons lumineux d'entrée et la surface d'onde  $\Sigma'$  une **sphère** centrée en  $S'$ .
- *Principe de l'égalité des chemins optiques* : les chemins optiques le long des rayons lumineux (lentille placée dans le vide)

$$[A_1S'] = A_1H_1 + H_1S' \quad (1.87)$$

$$[A_2S'] = A_2H_2 + n H_2K_2 + K_2S' \quad (1.88)$$

$$[A_3S'] = A_3H_3 + n H_3K_3 + K_3S' \quad (1.89)$$

sont égaux entre eux. Les temps de propagation de la lumière le long des rayons lumineux de  $A_i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) à  $S'$  sont égaux entre-eux.

## 1.10 Différence de marche

Nous définissons dans cette section la *différence de marche* qui est à la base du calcul des interférences de deux ou plusieurs ondes en un point.

Considérons deux ondes sphériques monochromatiques 1 et 2 émises respectivement par les sources ponctuelles  $O_1$  et  $O_2$  qui vibrent en phase et à la même fréquence. La phase de l'onde  $i$  ( $i = 1, 2$ ) en  $M$  est d'après l'équation (1.38)

$$\phi_i(M) = \phi_0 - kr_i, \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \quad (1.90)$$

où  $r_i$  est la distance de  $M$  à  $O_i$ ,  $n$  l'indice du milieu et  $\phi_0$  est identique pour les deux ondes (hypothèse des sources qui vibrent en phase). La différence

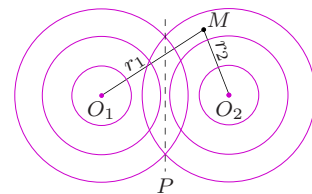


FIG. 1.51 – Calcul de la différence de phase en  $M$  des ondes issues de  $O_1$  et  $O_2$ .

de phase des deux ondes en  $M$  est

$$\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M) = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi n(r_1 - r_2)}{\lambda_0} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad (1.91)$$

où

$$\delta = n(r_1 - r_2) = [O_1M] - [O_2M] \quad (1.92)$$

est la **différence de marche** le long des rayons  $O_1M$  et  $O_2M$ . De façon plus générale nous posons la définition suivante.

**Définition 1.6 (différence de marche).** La **différence de marche** est la différence de deux chemins optiques aboutissant au même point.

Une autre façon d'arriver à (1.91) consiste à utiliser le théorème 1.8, page 22. On a

$$\phi_1(O_1) - \phi_1(M) = \frac{2\pi[O_1M]}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \phi_2(O_2) - \phi_2(M) = \frac{2\pi[O_2M]}{\lambda_0} \quad (1.93)$$

pour les ondes 1 et 2 et les rayons  $O_1M$  et  $O_2M$  respectivement. Les phases  $\phi_1(O_1) = \phi_2(O_2) = \phi_0$  sont égales par hypothèse. La différence des deux équations (1.93) redonne

$$\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M) = \frac{2\pi([O_1M] - [O_2M])}{\lambda_0} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}. \quad (1.94)$$

Cette deuxième démonstration reste valable pour des rayons non rectilignes et des ondes non sphériques. On a en fait montré le résultat plus général suivant.

**Théorème 1.17 (différence de phase).** Soient deux ondes 1 et 2, de même fréquence  $\nu$ , dont les vibrations respectives aux points  $O_1$  et  $O_2$  sont en phase. Soit  $M$  un point jusqu'où les ondes 1 et 2 se propagent en suivant respectivement deux rayons  $O_1M$  et  $O_2M$ . La différence de phase  $\phi$  des deux ondes en  $M$  est donnée en fonction de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = c/\nu$  et de la différence de marche  $\delta$  le long des rayons  $O_1M$  et  $O_2M$  par

$$\boxed{\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = [O_1M] - [O_2M]}. \quad (1.95)$$

Les points  $M$  où les ondes 1 et 2 sont en phase correspondent à une différence de phase  $\phi = p2\pi$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) et une différence de marche  $\delta = p\lambda_0$  multiple entier de la longueur d'onde dans le vide. Pour la figure 1.51, les deux ondes sont en phase ( $\delta = 0$  et  $\phi = 0$ ) dans le plan médiateur  $P$  du segment  $O_1O_2$ .



### 1.10.1 Rayons qui traversent une lentille

Cette section donne un exemple de calcul d'une différence de marche pour deux rayons parallèles qui traversent une lentille convergente. Il est recommandé de relire la section 1.9.2 avant de l'étudier.

Considérons (cf. figure 1.52) deux rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  parallèles qui tombent sur une lentille mince placée dans l'air (indice  $n = 1,000293$ ). Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dans le sens et direction des rayons lumineux incidents  $R_1$  et  $R_2$ . Les deux rayons lumineux, après traversée de la lentille, aboutissent au point  $M$  dans le plan focal image  $\Phi$  de la lentille. Soit  $\Delta$  la droite parallèle aux rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  qui passe par le centre  $C$  de la lentille. On peut construire  $M$  géométriquement comme l'intersection de la droite  $\Delta$  avec le plan  $\Phi$ . Soient deux points  $O_1 \in R_1$  et  $O_2 \in R_2$  situés sur les rayons lumineux incidents. Nous nous proposons de calculer la différence de marche  $\delta = [O_1M] - [O_2M]$  entre les deux chemins qui aboutissent au point  $M$  en suivant les rayons lumineux. Sur la figure, les points  $L \in R_1$  et  $K \in R_2$  correspondent en réalité à des trajets de la lumière à l'intérieur de la lentille mince qui sont petits par rapport à l'échelle de la figure, mais grands par rapport à la longueur d'onde  $\lambda_0$  de la lumière (cf. la figure 1.50 où ces trajets sont représentés). Pour des calculs d'interférences, on doit connaître  $\delta$  avec une erreur très petite devant  $\lambda_0$  et tenir compte des chemins optiques à l'intérieur de la lentille. Il serait alors **faux** d'écrire l'égalité

$$\delta \neq n [O_1L + LM - O_2K - KM] \quad (\text{barré car faux}).$$

Pour calculer correctement  $\delta$  on peut envisager une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}$  qui tombe sur la lentille. Les rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  sont deux rayons lumineux de cette onde. Soit  $\Sigma$  le plan d'onde qui passe par le point  $O_2$  et  $H$  l'intersection du rayon lumineux  $R_1$  avec  $\Sigma$ . D'après le principe de l'égalité des chemins optiques, on a

$$[O_2KM] = [HLM]. \quad (1.96)$$

On en déduit

$$\delta = [O_1LM] - [O_2KM] = [O_1LM] - [HLM] = n \overline{O_1H} \quad (1.97)$$

où  $\overline{O_1H}$  est la longueur algébrique du segment  $O_1H$  mesurée sur le rayon lumineux orienté dans le sens de  $\vec{u}$  ( $\overline{O_1H} > 0$  sur la figure). On en déduit une formule qui permettra le calcul de la différence de marche à partir des positions de  $O_1$ ,  $O_2$  et de la donnée du vecteur unitaire  $\vec{u}$ :

$$\boxed{\delta = [O_1M] - [O_2M] = n \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \vec{u}.} \quad (1.98)$$

La formule a été obtenue en introduisant une onde plane qui tombe sur la lentille, mais elle reste bien sûr valable lorsque les deux rayons lumineux correspondent à deux ondes (par forcément planes) qui interfèrent en  $M$ .

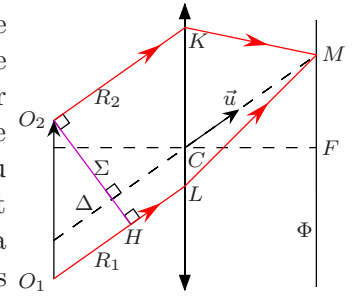


FIG. 1.52 – Calcul d'une différence de marche.



## 2

# Sources de lumière

## 2.1 Phénomènes quantiques

Alors que l'émission des ondes électromagnétique par des antennes (ondes radiofréquences) s'explique de façon satisfaisante par la théorie classique de Maxwell, l'émission de la lumière ne peut être correctement décrite que par la théorie quantique.

### 2.1.1 Niveaux d'énergie

L'énergie d'un système matériel microscopique (noyau, atome, molécule) est quantifiée, c'est-à-dire qu'elle ne peut prendre qu'une série de valeurs bien déterminées caractéristiques de ce système (**niveaux d'énergie**).

L'énergie d'un corps solide macroscopique (cristal, métal) est également quantifiée, mais les niveaux d'énergie, beaucoup plus nombreux et rapprochés que pour un atome, forment des **bandes d'énergie**.

### 2.1.2 Interaction lumière-atome

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux niveaux d'énergie possibles d'un système microscopique (disons un atome), avec  $E_1 < E_2$ . L'atome peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur par trois phénomènes radiatifs distincts :

#### L'absorption

L'atome initialement est dans l'état inférieur d'énergie  $E_1$ . Si l'on envoie sur ce système une radiation de fréquence  $\nu$  telle que  $h\nu = E_2 - E_1$ , où

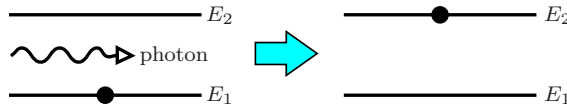
$$h \approx 6,626\,075\,10^{-34} \text{ J s} \quad (2.1)$$

est la constante de Planck<sup>1</sup>, il pourra absorber un photon et passer dans l'état supérieur  $E_2$  : il y aura absorption de lumière.

---

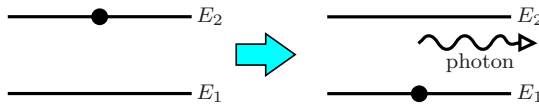
1. [Max Karl Ernst Ludwig Planck \(1858-1947\)](#)

FIG. 2.1 – Absorption d'un photon.



### L'émission spontanée

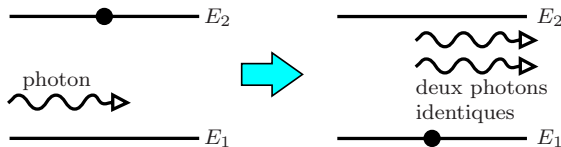
FIG. 2.2 – Émission spontanée d'un photon.



Supposons que le système ait été porté, par exemple à l'aide d'une décharge électrique, dans le niveau supérieur d'énergie  $E_2$ . Il peut se désexciter, c'est-à-dire perdre l'énergie qu'il vient d'acquérir, en émettant spontanément un photon de fréquence  $\nu$  telle que  $h\nu = E_2 - E_1$ . Il revient alors dans l'état initial  $E_1$  : il y aura émission spontanée d'un photon. Il est impossible de prédire à quel instant et dans quelle direction l'émission va se produire. Le moment de désexcitation est aléatoire comme dans le phénomène de la désintégration de particules radioactives. Le temps de vie d'un niveau excité d'un atome est typiquement de l'ordre de  $10^{-8}$  s (ce temps peut être beaucoup plus long pour des niveaux métastables).

### L'émission induite ou stimulée

FIG. 2.3 – Émission stimulée.



Supposons que l'atome ait été initialement porté dans le niveau supérieur  $E_2$ . L'impact, sur un tel système, d'un photon incident d'énergie  $h\nu$  provoque la désexcitation de celui-ci vers le niveau  $E_1$  avec émission d'un deuxième photon. Les deux photons émergents (photon incident et photon émis) sont alors identiques (même direction de propagation, même fréquence) : il y a *émission stimulée*. Ce phénomène fut prévu par Einstein<sup>2</sup> en 1917.

Considérons maintenant un système macroscopique (gaz) comportant un grand nombre d'atomes identiques au précédent. Les divers processus d'absorption et d'émission de photons peuvent augmenter le nombre de photons de fréquence  $\nu$  moyennant la condition suivante : il faut que le nombre

<sup>2</sup> Albert Einstein (1879-1955)

d'atomes dans l'état supérieur  $E_2$  soit plus grand que celui des atomes dans l'état inférieur  $E_1$ . C'est l'*inversion de population* par rapport à l'équilibre thermodynamique, où le nombre de particules dans l'état inférieur  $E_1$  est plus grand que celui des particules dans l'état supérieur  $E_2$ . Cet effet amplificateur est à la base du laser.

## 2.2 Sources lumineuses

Nous examinons seulement quelques types de sources lumineuses. Nous décrivons la lumière émise par la **densité énergétique spectrale**  $\Phi_\nu(\nu)$ . Dans la gamme de fréquences de  $\nu$  à  $\nu + d\nu$ , la puissance émise par la source est  $\Phi_\nu(\nu) d\nu$ . La puissance émise totale (**flux énergétique**) est donnée par l'intégrale

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_\nu(\nu) d\nu. \quad (2.2)$$

Le spectre d'une source peut aussi être donné en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ . La puissance émise par la source est  $\Phi_\lambda(\lambda) d\lambda$  dans la bande de longueurs d'onde de  $\lambda$  à  $\lambda + d\lambda$ . Les fonctions de densité spectrale sont liées par

$$\Phi_\nu(\nu) |d\nu| = \Phi_\lambda(\lambda) |d\lambda| \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{et} \quad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu. \quad (2.3)$$

### 2.2.1 Sources thermiques

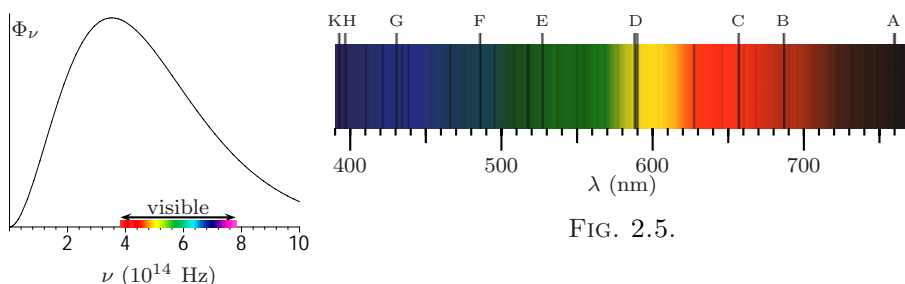


FIG. 2.4.

FIG. 2.4 – Rayonnement du corps noir à 6000 K. La puissance rayonnée dans le visible est 47% de la puissance totale.

FIG. 2.5.

FIG. 2.5 – Spectre solaire et raies de Fraunhofer [1].

Nous considérons un objet dont les niveaux d'énergie forment des bandes d'énergie (corps solides). L'agitation thermique des atomes d'un tel objet chauffé (le filament d'une ampoule électrique) conduit au peuplement des niveaux excités du milieu. Par désexcitation, il se produit un rayonnement ayant un spectre continu de fréquences (**rayonnement thermique**). La puissance rayonnée dans le visible n'est qu'une fraction de la puissance rayonnée totale (pour une lampe à filament de tungstène cette fraction vaut environ 2%, la plus grande fraction étant rayonnée dans l'infrarouge).

raie	due à
A	O <sub>2</sub>
B	O <sub>2</sub>
C	H
D	Na
E	Fe
F	H
G	Fe & Ca
H	Ca
K	Ca

TAB. 2.1 – Raies de Fraunhofer et élément auquel est dû l'absorption.

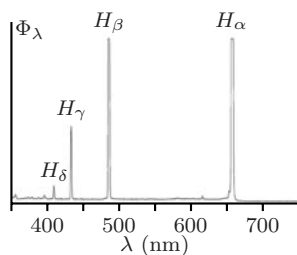


FIG. 2.6 – Spectre d'émission dans le visible de l'hydrogène atomique. Les quatre raies  $H_\alpha$  (rouge),  $H_\beta$  (turquoise),  $H_\gamma$  (bleu) et  $H_\delta$  (violet) sont dues à l'hydrogène atomique [2].

La figure 2.4 représente le spectre du rayonnement d'un **corps noir** porté à 6000 K. Cette source produit de la **lumière blanche** (le spectre est continu dans le visible). Le spectre visible du **soleil** donné par un spectroscopie à basse résolution est proche de cette courbe (la température de la photosphère du soleil est environ 6000 K).

Avec une meilleure résolution, on découvre que le spectre solaire contient des milliers de raies sombres où il y a moins de lumière (cf. figure 2.5). Ces raies sont appelées raies de Fraunhofer<sup>3</sup>, d'après celui qui les a découvertes en 1814. Les lettres allant de A à G désignent les principales raies d'absorption (A et B sont des *bandes d'absorption* groupant de nombreuses raies). Les radiations absentes ont été pour la plupart absorbées par l'atmosphère solaire, mais les bandes d'absorption A et B sont dues à l'atmosphère terrestre (cf. table 2.1).

### 2.2.2 Sources spectrales

Les lampes à décharge à basse pression (mercure, sodium, néon, etc.) produisent un rayonnement ayant un spectre de raies quasi-monochromatiques. Les niveaux excités sont peuplés par suite de la décharge. La lumière provient de l'émission spontanée de photons lors de la désexcitation des atomes ou molécules. La figure 2.6 représente le spectre du rayonnement d'une lampe spectrale à hydrogène atomique. Les raies ont une largeur due en partie à la nature probabiliste de l'émission spontanée. Une autre cause d'élargissement est l'agitation thermique des particules qui décale les fréquences par effet Doppler. La largeur  $\Delta\nu$  d'une raie visible de fréquence  $\nu_0$  d'une lampe spectrale est typiquement de l'ordre du GHz ( $\Delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-5}$ ).

### 2.2.3 Laser

**Laser** : Light amplification by stimulated emission of radiation.

Les lasers les plus utilisés actuellement sont :

- parmi les lasers à gaz : le laser hélium-néon, le laser au gaz carbonique, le laser à argon, le laser à azote ;
- parmi les lasers à liquide : le laser à colorants ;
- parmi les lasers à solide : le laser au néodyme, le laser à rubis, le laser à semi-conducteurs (diode laser).

### Propriétés du faisceau laser

Le laser permet d'obtenir un faisceau de lumière cohérente, très intense, quasi-monochromatique et très directive :

- le sens du terme *lumière cohérente* sera expliqué dans la section 2.3.1 ;

3. Josef von Fraunhofer (1787-1826)

- *très intense* : il y a risque de cécité lorsqu'on reçoit un faisceau laser directement dans les yeux ;
- *quasi-monochromatique* : la largeur  $\Delta\nu$  de la raie laser (cf. figure 2.7) est assez couramment de l'ordre du MHz dans le visible ( $\Delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-8}$ ) ;
- *très directive* : la divergence d'un faisceau laser est de l'ordre de  $10^{-5}$  radiant.

**Le laser He-Ne**

Le laser He-Ne émet une radiation visible rouge, de longueur d'onde  $\lambda = 632,8$  nm. C'est un laser à gaz composé d'une cavité remplie d'environ 85% d'hélium et de 15% de néon (cf. figure 2.8). Cette cavité est constituée d'un tube cylindrique en verre placé entre deux lames métallisées concaves dont l'une, réfléchissant à 95% seulement, permet au faisceau de sortir. Le gaz contenu dans ce tube peut être excité par des électrodes.

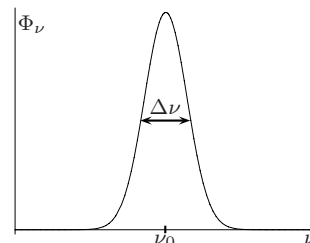


FIG. 2.7 – Spectre d'un laser.

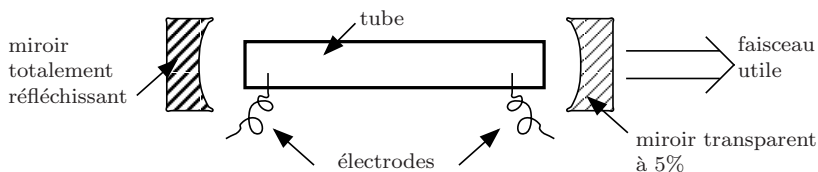


FIG. 2.8 – Laser He-Ne.

Le milieu actif est constitué par les atomes de néon mais c'est l'hélium qui joue un rôle essentiel dans le pompage aboutissant à l'inversion de population. Les atomes d'hélium sont excités par une décharge électrique. Ils sont portés dans un niveau 2s qui a pratiquement la même énergie que le niveau 3s du néon. Les atomes d'hélium excités transmettent leur énergie aux atomes de néon par collisions. Les atomes de néon retombent ensuite vers des états d'énergie inférieures en émettant un rayonnement laser.

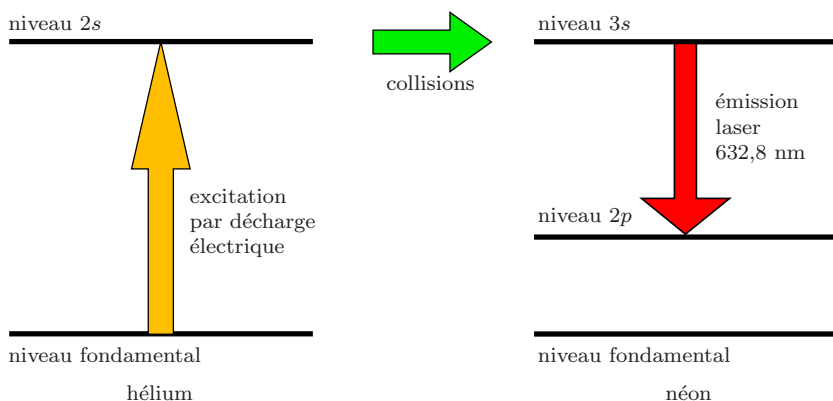


FIG. 2.9 – Principe du laser He-Ne.

La longueur d'onde utilisée est celle correspondant à la transition  $3s \rightarrow 2p$  située à 632,8 nm (lumière rouge).

Imaginons un photon qui se déplace dans le tube, parallèlement à son axe vers la droite. Au cours de son trajet, il provoque un certain nombre de fois les phénomènes d'absorption et d'émission induite. Si le gaz excité se trouve dans un état tel que le bilan d'énergie lumineuse pour ce trajet est positif, le flux lumineux se trouvera amplifié ; réfléchi presque intégralement par le miroir de droite, il peut subir une deuxième fois l'amplification avant d'arriver sur le miroir de gauche et ainsi de suite. Finalement, l'état du tube se stabilise à un point où les diverses pertes d'énergie lumineuse (énergie qui traverse les miroirs et qui est utilisée par l'expérimentateur, énergie perdue par diffraction et par émission spontanée qui a lieu dans toutes les directions) contrebalance l'amplification du tube.

### 2.3 Description de la lumière par des trains d'ondes électromagnétiques

Nous envisageons des expériences d'**optique classique** qui sont correctement décrites par les ondes électromagnétiques de la théorie classique de Maxwell. Lorsque la nature quantique de la lumière joue un rôle important, on entre dans le domaine de l'**optique quantique** non étudiée dans ce cours.

Dans l'émission spontanée, les atomes émettent des impulsions lumineuses aléatoires très brèves (photons) (cf. section 2.1.2). On va tenir compte du caractère très bref et aléatoire de cette émission en décrivant la lumière comme une succession de trains d'ondes électromagnétiques.

#### 2.3.1 Durée et longueur de cohérence

Nous considérons un faisceau de lumière quasi-monochromatique de fréquence  $\nu_0$  et largeur spectrale  $\Delta\nu$  (cf. figure 2.7). Il provient d'un laser ou d'une source ponctuelle qui peut être une lampe spectrale ou une source de lumière blanche munie d'un filtre optique. Cette lumière se propage parallèlement à l'axe  $Oz$  vers  $z$  croissant.

Un **train d'ondes électromagnétiques** décrit en quelque sorte l'impulsion lumineuse due à un photon (pour un laser, à un ensemble de photons émis avec les mêmes caractéristiques). Le faisceau de lumière s'obtiendra par une succession de ces trains d'ondes.

Pour le faisceau parallèle considéré, le train d'ondes est décrit par un champ électrique de la forme d'une onde plane sinusoïdale

$$\vec{E} = \vec{A} \cos \left( 2\pi\nu_0 \left( t - \frac{z}{c} \right) + \phi \right), \quad \vec{A} \perp Oz, \quad (2.4)$$

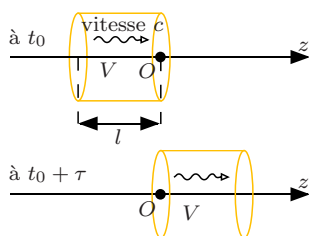


FIG. 2.10 – Le photon occupe le volume  $V$ . Positions de  $V$  aux deux instants  $t_0$  et  $t_0 + \tau$ .



où  $\vec{A}$  et  $\phi$  sont des constantes. Cependant, le train d'ondes n'existe que dans un volume  $V$  (cf. figure 2.10). Sur la figure, nous avons supposé que le volume  $V$  est un cylindre d'axe parallèle à  $Oz$ , de longueur  $l$ , qui se déplace sans déformation à la vitesse de la lumière  $c$  dans la direction et le sens de l'axe  $Oz$ . Ce mouvement du volume  $V$  correspond à la propagation de l'impulsion lumineuse et au mouvement des photons. Le train d'ondes (c'est-à-dire le volume  $V$ ) met un temps de l'ordre de

$$\tau \sim 10^{-11} \text{ à } 10^{-6} \text{ s} \quad (\text{durée de cohérence}) \quad (2.5)$$

pour passer en  $O$ . La durée de cohérence  $\tau$  s'interprète comme la durée d'émission d'un train d'onde par la source lumineuse. La dimension  $l$  est de l'ordre de

$$l = c\tau \sim 1 \text{ mm à } 100 \text{ m} \quad (\text{longueur de cohérence}). \quad (2.6)$$

La durée de cohérence  $\tau$  est un temps très grand devant la période  $T_0$  de l'onde qui est de l'ordre de

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} \sim 10^{-15} \text{ à } 10^{-14} \text{ s}. \quad (2.7)$$

La théorie quantique permet de relier la durée de cohérence  $\tau$  et la largeur  $\Delta\nu$ . On a les **relations d'incertitude**

$$\boxed{\tau \Delta\nu \sim 1} \quad \text{et} \quad \boxed{l \Delta\sigma \sim 1} \quad (2.8)$$

où  $\Delta\sigma = \Delta\nu/c$  est la largeur de raie en nombre d'ondes (« incertitude » sur le nombre d'ondes  $\sigma_0 = \nu_0/c$ ). La table 2.2 donne les ordres de grandeurs de la longueur de cohérence  $l$ , de la durée de cohérence  $\tau$  et de la largeur spectrale  $\Delta\nu$  de divers types de lumière. Les valeurs sont liées entre-elles par les relations

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta\nu} \quad \text{et} \quad l = c\tau. \quad (2.9)$$

Dans ce tableau, la lumière blanche est considérée comme une « raie » très large ( $\nu_0 \sim 5,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\Delta\nu \sim 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ) (cf. figure 2.4).

source	$l$ (m)	$\tau$ (s)	$\Delta\nu$ (Hz)
lumière blanche	$10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{14}$
lampe spectrale	$3 \cdot 10^{-3}$ à $0,3$	$10^{-11}$ à $10^{-9}$	$10^9$ à $10^{11}$
laser stabilisé	$300$	$10^{-6}$	$10^6$
laser (record)	$3 \cdot 10^7$	$10^{-1}$	$10$

TAB. 2.2 – Durée  $\tau$  et longueur  $l$  de cohérence pour divers types de sources.

On dit que la lumière d'un laser est (très) **cohérente** et que la lumière issue d'une source thermique ou d'une lampe spectrale est **non cohérente** (ou peu cohérente). Cela signifie que la durée et la longueur de cohérence

sont beaucoup plus grands pour un laser que pour les deux autres sources de lumière. Le volume  $V$  « occupé » par le train d'ondes (cf. figure 2.10), dans le cas de la lumière laser, est beaucoup plus grand non seulement dans la direction  $Oz$  mais aussi dans les directions perpendiculaires. On peut considérer que le volume  $V$  occupe toute la largeur du faisceau laser, alors que ce ne sera en général pas le cas pour un faisceau de lumière parallèle obtenu en plaçant une source thermique au foyer d'une lentille convergente.

La cohérence est liée au processus d'émission (cf. table 2.3).

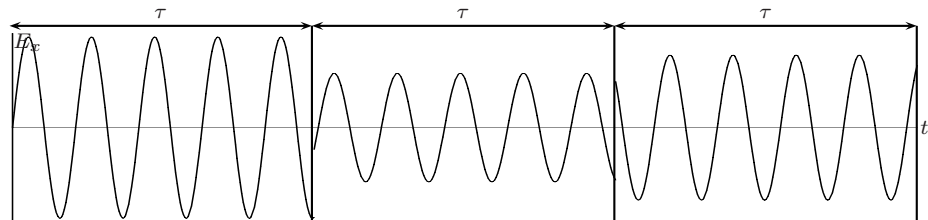
TAB. 2.3 – Type d'émission et cohérence de la lumière.

type d'émission	type de lumière	exemple
émission spontanée	lumière non cohérente	lampe spectrale
émission stimulée	lumière cohérente	laser

### 2.3.2 Le modèle de la succession des trains d'ondes

Une façon simple de décrire la lumière consiste à dire qu'elle est formée de trains d'ondes successifs de durée  $\sim \tau$  dont les phases ne sont pas corrélées entre-elles (cf. figure 2.11). Pour tracer la figure nous avons supposé que la durée de cohérence est de l'ordre de  $\tau \approx 5T_0$ , alors qu'en réalité  $\tau \gg T_0$  et chaque train d'ondes comporte un très grand nombre d'oscillations.

FIG. 2.11 – Champ électrique  $E_x(t)$  en  $O$  pour le modèle des trains d'ondes.



Les trains d'onde se présentent successivement dans le temps et dans l'espace. Ils sont décrits comme le train d'onde (2.4), mais avec d'autres valeurs pour  $\vec{A}$  et  $\phi$ . **Les phases des divers trains d'ondes ne sont pas corrélées les unes avec les autres.**

### 2.3.3 Lumière quasi-monochromatique non polarisée

La polarisation (la direction de l'amplitude  $\vec{A}$ ) de la lumière va sembler varier aléatoirement si on effectue des mesures aux temps  $0, \tau, 2\tau, \dots$ . En pratique, les détecteurs usuels ont un temps de réponse

$$T \sim 10^{-6} \text{ à } 1 \text{ s} \quad (2.10)$$

qui est très grand devant  $\tau$ . Pendant le temps  $T$ , un très grand nombre de directions aléatoires de polarisation vont tomber sur le détecteur, et la

lumière détectée n'a pas d'état de polarisation défini. On dit que l'onde est **non polarisée** ou que c'est de la **lumière naturelle**.

### 2.3.4 Le vrai champ électromagnétique

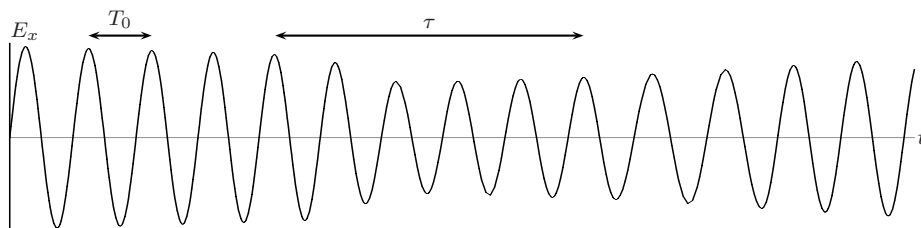


FIG. 2.12 – Champ électrique  $E_x(t)$  en  $O$ .

La figure 2.12 représente un champ électrique plus réaliste que celui de la figure 2.11 qui est discontinu à chaque changement de train d'ondes. Le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(t) = \vec{A}(t) \cos [2\pi\nu_0 t + \phi(t)], \quad \vec{A} \perp Oz \quad (2.11)$$

où l'amplitude  $\vec{A}(t)$  et la phase  $\phi(t)$  varient très peu pendant le temps  $T_0$ . Le temps caractéristique de leurs variations est  $\tau$ , l'ordre de grandeur du temps de passage des photons en  $O$ .

*Remarque :* le fait que  $\phi(t)$  varie au cours du temps implique que la fréquence du champ (2.11) ne reste pas égale à  $\nu_0$ . Par exemple, si  $\phi(t) = 2\pi\epsilon t$ , la fréquence est en fait  $\nu = \nu_0 + \epsilon$ .

Les photons qui contribuent au champ électrique en  $O$  à l'instant  $t_1$  sont tous différents de ceux qui y contribuent à l'instant  $t_2$  si  $|t_1 - t_2| \gtrsim \tau$ . Par suite du caractère probabiliste de l'émission des photons, on ne peut pas prévoir de relation entre les phases  $\phi(t_1)$  et  $\phi(t_2)$ . Soulignons cette propriété qui est importante pour l'étude des interférences :

$$\text{Les phases } \phi(t_1) \text{ et } \phi(t_2) \text{ ne sont pas corrélées si la durée } |t_1 - t_2| \text{ est plus longue que la durée de cohérence } \tau. \quad (2.12)$$

Pour l'amplitude, si la source est stable en puissance, on aura en module  $A(t_1) \approx A(t_2)$ . Si la source n'est pas polarisée, on ne peut pas prévoir de relation entre les directions des vecteurs  $\vec{A}(t_1)$  et  $\vec{A}(t_2)$  dans un plan  $\perp Oz$ . Par contre si la source est polarisée rectilignement suivant  $Ox$ , ces vecteurs gardent toujours la même direction  $Ox$ .

Le modèle des trains d'ondes successifs de la section 2.3.2 rend compte de la propriété (2.12) de la lumière. Il nous suffira pour décrire les interférences de la lumière.



## 3

## Photométrie

## 3.1 Rayonnement d'une source ponctuelle

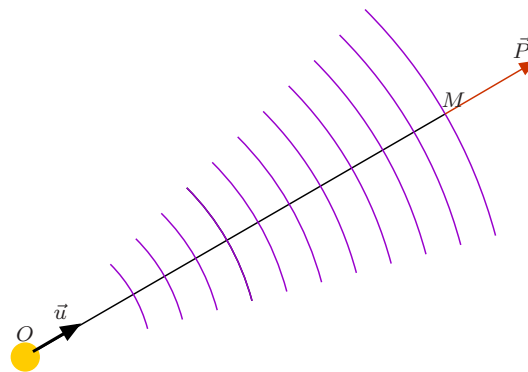


FIG. 3.1 – Onde sphérique.

Considérons le rayonnement d'une source quasi-monochromatique de fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  placée en  $O$  (cf. figure 3.1). L'onde est sphérique à une distance de  $O$  grande devant la longueur d'onde et les dimensions de la source. En  $M$ , le vecteur d'onde est (cf. équation (1.15) et section 1.2.3)

$$\vec{k} = \frac{n\omega}{c}\vec{u}, \quad \text{où} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}, \quad (3.1)$$

et le vecteur de Poynting, donné par l'équation (1.18),

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{E^2}{\omega\mu}\vec{k} = \frac{nE^2}{\mu c}\vec{u}, \quad (3.2)$$

est dirigé suivant  $\vec{u}$ .

Nous admettrons le résultat de la théorie du rayonnement que, loin de la source, l'amplitude du champ  $\vec{E}$  d'une onde sphérique décroît avec  $r$  suivant une loi en  $r^{-1}$ . Cette décroissance avec  $r$  est plus lente que celle du champ coulombien d'une charge fixe placé en  $O$  (loi en  $r^{-2}$ ). La moyenne temporelle

du vecteur de Poynting est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ  $\vec{E}$  et donc de la forme

$$\langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle = \mathcal{E}_n(\vec{r}) \vec{u} = \frac{\mathcal{I}(\theta, \phi)}{r^2} \vec{u} \quad (3.3)$$

en utilisant des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  de centre  $O$ .

La dépendance de (3.3) en  $r^{-2}$  s'explique par des considérations énergétiques comme nous l'avons vu en acoustique. La puissance moyenne  $\Phi_m$  rayonnée par la source est donnée par l'intégrale sur la sphère  $S_r$  de centre  $O$  et rayon  $r$

$$\Phi_m = \iint_{S_r} \mathcal{E}_n(\vec{r}) dS = \iint d\Omega r^2 \mathcal{E}_n(\vec{r}) = \iint d\Omega \mathcal{I}(\theta, \phi) \quad (3.4)$$

où on utilise la notation

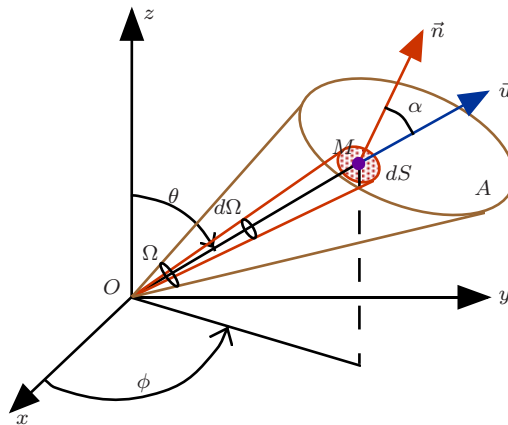
$$\iint d\Omega F(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta F(\theta, \phi). \quad (3.5)$$

La condition que l'intégrale (3.4) ne dépende pas de  $r$  est exigée par la conservation de l'énergie. L'expression (3.3) y satisfait ce qui justifie sa forme en  $r^{-2}$ .

### 3.2 Définitions photométriques

*Nous allons définir des grandeurs énergétiques utilisées en **photométrie énergétique** (ou **radiométrie**). Pour une source ponctuelle située en  $O$ , on définit le flux, l'intensité et l'éclairement. Pour une source étendue, on définit la luminance et l'existance.*

FIG. 3.2 – Angle solide.



Soit  $A$  une surface éclairée par la source ponctuelle  $O$  (cf. figure 3.2). Soit  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $A$  et  $M$  un point de  $dS$ . La

normale  $\vec{n}$  à la surface  $A$  en  $M$  fait l'angle  $\alpha$  avec  $\vec{u}$ . L'élément  $dS$  est vu de  $O$  sous l'angle solide

$$d\Omega = \frac{\cos \alpha dS}{r^2} \quad (3.6)$$

et la surface  $A$  est vue de  $O$  sous l'angle solide

$$\Omega = \iint_{\Omega} d\Omega = \iint_A \frac{\cos \alpha dS}{r^2} \quad (3.7)$$

où la notation  $\iint_{\Omega} d\Omega$  est semblable à (3.5) mis à part que l'intégrale porte seulement sur l'angle solide  $\Omega$ .

### 3.2.1 Flux

Le **flux énergétique** (ou **puissance rayonnée**)  $\Phi_{\Omega}$  (unité: W) émis dans l'angle solide  $\Omega$  est la puissance moyenne qui traverse la surface  $A$ . Le flux élémentaire  $d\Phi$  émis dans  $d\Omega$  qui traverse l'élément de surface  $dS$  étant

$$d\Phi = \mathcal{E}_n(\vec{r}) \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \mathcal{E}_n(\vec{r}) \cos \alpha dS = \mathcal{I}(\theta, \phi) \frac{\cos \alpha dS}{r^2} = \mathcal{I}(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.8)$$

on a

$$\Phi_{\Omega} = \iint_{\Omega} \mathcal{I}(\theta, \phi) d\Omega. \quad (3.9)$$

$\Phi_{\Omega}$  s'appelle aussi flux énergétique à travers  $A$ . Le flux énergétique d'une source (sans préciser d'angle solide) est la puissance rayonnée moyenne dans toutes les directions

$$\Phi = \iint \mathcal{I}(\theta, \phi) d\Omega. \quad (3.10)$$

Le **flux photonique**  $\Phi_p$  (unité: photons  $s^{-1}$ ) est le nombre de photons rayonnés par seconde. Pour une lumière monochromatique de fréquence  $\nu$ , l'énergie d'un photon étant  $h\nu$ , on a

$$\Phi_p = \frac{\Phi}{h\nu}. \quad (3.11)$$

Le seuil de sensibilité de l'œil humain en flux photonique est  $5 \cdot 10^3$  photons  $s^{-1}$  dans les meilleures conditions (lumière de longueur d'onde voisine de 507 nm).

### 3.2.2 Intensité

La grandeur  $\mathcal{I}(\theta, \phi)$  introduite dans (3.3) est d'après l'équation (3.8) le flux par angle solide :

$$\mathcal{I}(\theta, \phi) = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (3.12)$$

On l'appelle l'**intensité énergétique** (unité: W  $sr^{-1}$ ).

### 3.2.3 Éclairement

L'**éclairement énergétique**<sup>1</sup> (ou **irradiance**) (unité  $\text{W m}^{-2}$ ) d'une surface est la puissance moyenne par unité de surface qui traverse la surface. Pour l'élément  $dS$  l'éclairement est d'après (3.3)

$$I = \mathcal{E} = \langle \vec{P} \cdot \vec{n} \rangle = \mathcal{E}_n(\vec{r}) \vec{u} \cdot \vec{n} = \mathcal{E}_n(\vec{r}) \cos \alpha = \frac{\mathcal{I}(\theta, \phi) \cos \alpha}{r^2}. \quad (3.13)$$

$\mathcal{E}_n(\vec{r})$  est l'éclairement d'une surface perpendiculaire à  $\vec{u}$ . L'**éclairement photonique**  $\mathcal{E}_p$  (unité : photons  $\text{s}^{-1} \text{m}^{-2}$ ) d'une surface est le nombre moyen de photons par seconde et par  $\text{m}^2$  qui traverse la surface. Pour une lumière monochromatique de fréquence  $\nu$

$$\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}}{h\nu}. \quad (3.14)$$

TAB. 3.1 – Ordres de grandeurs des éclairements  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_p$  (pour  $\cos \alpha = 1$ ).

Source	$\mathcal{E}$ ( $\text{W m}^{-2}$ )	$\mathcal{E}_p$ (photons $\text{s}^{-1} \text{m}^{-2}$ )
laser He-Ne, 632,8 nm, 1 mW, focalisé sur $10^{-10} \text{m}^2$	$10^7$	$3 \cdot 10^{25}$
soleil en haut de l'atmosphère	$1,4 \cdot 10^3$	$10^{18}$
clair de lune	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{12}$

### 3.2.4 Source étendue

Pour un corps chauffé on peut considérer que le rayonnement provient de la surface du corps. On définit la luminance et l'exittance pour tenir compte de l'étendue spatiale de la source.

Les définitions précédentes (flux, intensité et l'éclairement) s'appliquent à chaque élément infinitésimal de surface  $d\Sigma$  de la source. On notera  $d\Phi$  le flux énergétique émis par la source infinitésimale  $d\Sigma$ . L'intensité énergétique dans la direction  $(\theta, \phi)$ , émise par cette même source infinitésimale  $d\Sigma$ , sera noté  $d\mathcal{I}(\theta, \phi)$ . Au lieu de la relation (3.10), on a pour cette source infinitésimale  $d\Sigma$  :

$$d\Phi = \iint d\mathcal{I}(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.15)$$

où l'intégrale porte sur toutes les directions d'émission (un angle solide de  $2\pi$  sr vers l'extérieur de la source).

### Luminance

Nous utilisons un référentiel  $Pxyz$  (cf. figure 3.3) tel que  $P \in d\Sigma$  et  $d\Sigma \perp Pz$ . On définit la **luminance énergétique** (ou **radiance**)  $L(\theta, \phi)$

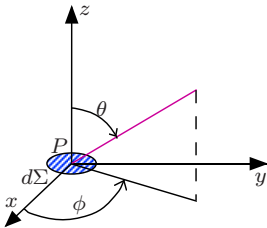


FIG. 3.3 – Luminance.

1. Cette grandeur est souvent désignée en optique par son ancien nom d'**intensité**. Elle est notée  $\mathcal{E}$  dans ce chapitre et  $I$  dans les suivants.



(unité  $\text{W sr}^{-1} \text{m}^{-2}$ ) au point  $P$  de la surface de la source par

$$d\mathcal{I}(\theta, \phi) = L(\theta, \phi) \cos \theta d\Sigma. \quad (3.16)$$

Lorsque la luminance est indépendante de  $\theta$  et  $\phi$  (c'est le cas du corps noir, et, approximativement, du rayonnement diffusé par une feuille blanche) on dit que la source satisfait à la loi de Lambert<sup>2</sup>.

### Exitance

Soit une surface émettant un rayonnement et  $d\Sigma$  un de ses éléments surfaciques situé au point  $P$ . L'**exitance énergétique**  $M(P)$  (unité  $\text{W m}^{-2}$ ) en  $P$  de cette surface est le flux énergétique émis par unité de surface. En divisant l'équation (3.15) par  $d\Sigma$  on a

$$M(P) = \frac{d\Phi}{d\Sigma} = \iint \frac{d\mathcal{I}}{d\Sigma} d\Omega = \iint L(\theta, \phi) \cos \theta d\Omega \quad (3.17)$$

où les intégrales portent sur toutes les directions d'émission (vers l'extérieur du corps émetteur).

## 3.3 Photométrie visuelle

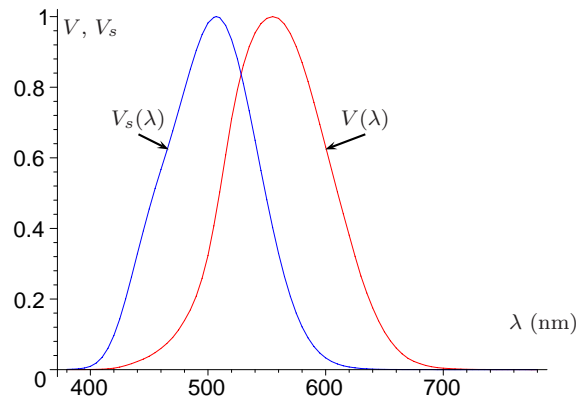


FIG. 3.4 – Courbes photométriques [3].

L'effet produit dans l'œil humain par une lumière dépend de sa composition spectrale. Il existe dans la rétine deux types de récepteurs, les cônes utilisés en vision photopique (de jour) et les bâtonnets utilisés en vision scotopique (de nuit). Il y a trois sortes de cônes qui ont des sensibilités différentes en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , ce qui permet la vision colorée, tandis qu'il n'y a qu'une sorte de bâtonnets ce qui explique qu'on ne voit pas les couleurs de nuit. Les grandeurs de photométrie visuelle sont définies à partir des grandeurs énergétiques et de courbes de sensibilités

2. [Johann Heinrich Lambert \(1728-1777\)](#)

relatives d'un *œil moyen* en fonction de  $\lambda$  établies par la Commission Internationale de l'Éclairage.

L'efficacité lumineuse relative photopique  $V(\lambda)$ , qui décrit la sensibilité des cônes, a un maximum normalisé à  $V(\lambda_0) = 1$  pour une lumière verte de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 555$  nm (fréquence  $\nu_0 = 5,4 \cdot 10^{14}$  Hz) et s'annule en dehors du spectre visible (cf. figure 3.4). La courbe scotopique  $V_s(\lambda)$ , qui décrit la sensibilité des bâtonnets, a une forme analogue, mais son maximum  $V_s(\lambda_s) = 1$  a lieu pour longueur d'onde  $\lambda_s = 507$  nm décalée vers le bleu.

TAB. 3.2 – Grandeurs photométriques et leurs unités.

	énergétique	photonique	visuel(le)
flux	$\Phi$ W	$\Phi_p$ photons $s^{-1}$	$\Phi_v$ 1 lm = 1 cd sr
intensité	$\mathcal{I}$ W $sr^{-1}$	$\mathcal{I}_p$ photons $s^{-1} sr^{-1}$	$\mathcal{I}_v$ cd
éclairement	$\mathcal{E}$ W $m^{-2}$	$\mathcal{E}_p$ photons $s^{-1} m^{-2}$	$\mathcal{E}_v$ 1 lx = 1 lm $m^{-2}$
luminance	$L$ W $sr^{-1} m^{-2}$	$L_p$ photons $s^{-1} sr^{-1} m^{-2}$	$L_v$ cd $m^{-2}$
exitance	$M$ W $m^{-2}$	$M_p$ photons $s^{-1} m^{-2}$	$M_v$ lm $m^{-2}$

Pour une lumière monochromatique, on définit la grandeur<sup>3</sup> visuelle  $G_v$  associée à la grandeur énergétique  $G$  par

$$G_v = KV(\lambda)G \quad \text{avec} \quad K = 683 \text{ lm W}^{-1}. \quad (3.18)$$

La valeur de  $K$  a été fixée par compatibilité avec d'anciennes définitions (une *candela* [cd] vaut environ une *bougie* qui est une ancienne mesure d'intensité visuelle). L'unité de flux est le *lumen* [lm] et l'unité d'éclairement le *lux* [lx]. La grandeur visuelle scotopique est définie de façon analogue à partir de la courbe  $V_s(\lambda)$  par

$$G_s = K_s V_s(\lambda)G \quad \text{avec} \quad K_s = 1770 \text{ lm W}^{-1}, \quad (3.19)$$

la valeur  $K_s$  étant choisie pour donner  $G_s = G_v$  pour  $\lambda = \lambda_0 = 555$  nm.

Pour une lumière de composition spectrale arbitraire, la grandeur énergétique due aux longueurs d'ondes entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  est donnée par  $dG = G_\lambda(\lambda)d\lambda$  où  $G_\lambda(\lambda)$  est la densité spectrale de la grandeur. Nous avons déjà rencontré la densité spectrale du flux énergétique  $\Phi_\lambda$  dans l'équation (2.3) qui est un cas particulier de cette définition pour  $G \equiv \Phi$ .

3. Dans ce paragraphe, on peut remplacer le mot *grandeur* et le symbole  $G$  par les entrées de la table 3.2.

Les grandeurs énergétique  $G$  et visuelle  $G_v$  sont alors données en fonction de la densité spectrale  $G_\lambda(\lambda)$  par

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda, \quad \text{et} \quad G_v \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty KV(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda. \quad (3.20)$$

Le rapport  $\frac{G_v}{G}$  [unité : lm W<sup>-1</sup>] s'appelle l'efficacité lumineuse de la source (soleil : 250 lm W<sup>-1</sup> ; lampe à incandescence : environ 10 lm W<sup>-1</sup>).

Pour la grandeur photonique  $G_p$ , l'énergie d'un photon de longueur d'onde  $\lambda$  étant  $hc/\lambda$ , on a :

$$G_p = \int_0^\infty \frac{\lambda}{hc} G_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (3.21)$$

qui se réduit à

$$G_p = \frac{\lambda G}{hc} = \frac{G}{h\nu} \quad (3.22)$$

pour une lumière monochromatique de fréquence  $\nu$ .



## 4

# Interférences

Le terme d'**interférence** a été utilisé pour décrire la superposition de deux ondes de même fréquence  $\nu$  de la corde vibrante (cf. corde vibrante & acoustique, section 4.3). Une onde stationnaire de la corde vibrante peut aussi être considérée comme un phénomène d'interférence produit par la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens opposés (cf. corde vibrante & acoustique, section 4.9). Il y a une modulation spatiale dans l'onde stationnaire, l'amplitude étant maximale aux ventres et minimale aux nœuds. Cette modulation est liée au déphasage des deux vibrations qui interfèrent (elles sont en phase aux ventres et en opposition de phase aux nœuds).

Le même phénomène s'observe pour toutes sortes d'ondes et en particulier pour la lumière. Il y a interférence de deux ondes lumineuses dans une région de l'espace (**champ d'interférence**) lorsque l'éclairement n'est pas la somme des éclairements des deux ondes. Dans le champ d'interférence, on observe une modulation spatiale de l'éclairement, formant des franges d'interférence dont la forme dépend du dispositif expérimental. Dans l'expérience des deux trous d'Young<sup>1</sup> en lumière monochromatique, qui sera décrite section 4.1, deux ondes se superposent sur l'écran d'observation. On observe des modulations de l'éclairement (cf. figure 4.1) alors qu'en présence d'une seule de ces deux ondes (lorsqu'on obture un des trous), l'éclairement de l'écran est uniforme.

Historiquement, les partisans de la nature corpusculaire de la lumière se trouvaient face au **paradoxe de l'interférence** :

$$\text{lumière} + \text{lumière} = \text{obscurité.} \quad (4.1)$$

Il n'y a aucun paradoxe dans la théorie ondulatoire de la lumière que nous utilisons. Dans la théorie quantique la lumière est formée de particules (pho-

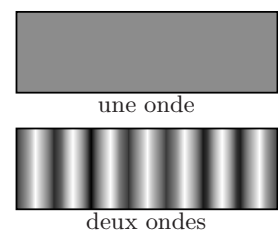


FIG. 4.1 – Aspect de l'écran dans l'expérience d'Young [4].

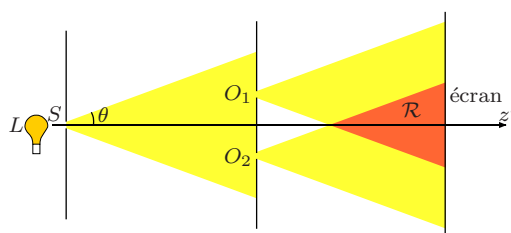
1. [Thomas Young \(1773-1829\)](#)

tons), mais comme les particules sont décrites en quelque sorte par des ondes (les fonctions d'onde), l'équation (4.1) n'est pas non plus un paradoxe.

### 4.1 L'expérience des trous ou fentes d'Young

L'expérience montre que, dans des conditions usuelles, deux sources lumineuses différentes ne produisent pas d'interférence. C'est au tout début du XIX<sup>e</sup> siècle que Young a observées les interférences lumineuses pour la première fois en construisant un dispositif (interféromètre) qui divise, puis superpose la lumière issue d'une seule source.

FIG. 4.2 – L'expérience des trous d'Young.



La figure 4.2 représente l'expérience des **trous d'Young**. Une lampe spectrale  $L$ , monochromatique de longueur d'onde  $\lambda \sim 0,6 \mu\text{m}$ , éclaire un écran percé d'un petit trou  $S$  de diamètre  $b \sim 0,1 \text{ mm}$ . L'onde lumineuse est diffractée à travers le trou et forme, au delà du trou, une onde sphérique de centre  $S$  située principalement dans un cône d'axe  $Sz'$  ( $Sz'$  est perpendiculaire à l'écran) et de demi-angle  $\theta \approx \frac{\lambda}{b} = 0,3^\circ$  (cf. équation (5.48)). Cette onde éclaire à son tour un deuxième écran, perpendiculaire à  $Sz'$ , percé de deux trous  $O_1$  et  $O_2$  identiques au trou  $S$ , symétriques par rapport à  $Sz'$  et distants l'un de l'autre de  $s \sim 1 \text{ mm}$ . Ces deux trous se comportent comme des sources ponctuelles qui diffractent deux ondes sphériques. On a ainsi divisé l'onde primaire issue de  $S$  en deux ondes secondaires issues de  $O_1$  et  $O_2$ . On observe les interférences sur un troisième écran placé perpendiculairement à  $Sz'$  et situé dans la zone  $\mathcal{R}$  où les deux ondes secondaires se recouvrent (à la distance  $D \sim 1 \text{ m}$  du deuxième écran). On peut éventuellement utiliser une lentille convergente pour forcer ce recouvrement.

On observe les franges rectilignes de la figure 4.1 qui seront étudiées en détail dans la section 4.4.1. Avec les valeurs numériques indiquées, l'interfrange (la distance entre deux franges brillantes) est de l'ordre de 1 mm et visible à l'œil nu.

En pratique dans l'expérience d'Young, les trous  $S$ ,  $O_1$  et  $O_2$  sont remplacés par trois fentes fines dont les grands côtés sont perpendiculaires au plan de la figure 4.2. Les franges d'interférence deviennent plus lumineuses (expérience des **fentes d'Young**).

Young a utilisé le soleil au lieu d'une lampe monochromatique  $L$ . On

observe alors des franges colorées.

On peut effectuer l'expérience d'Young en envoyant directement un faisceau laser sur les trous (ou fentes)  $O_1$  et  $O_2$ . Par contre, avec une source de lumière non cohérente comme le soleil, le trou quasi-ponctuel  $S$  joue un rôle essentiel dans l'expérience. Environ cent cinquante ans avant Young, Grimaldi<sup>2</sup> pensait que la lumière était de nature ondulatoire et qu'il devait être possible d'observer des interférences. En 1665, il décrit une expérience où il éclairait directement par le soleil deux trous  $O_1$  et  $O_2$  percés dans les murs d'une chambre noire. Il observa les ondes diffractées par les deux trous mais pas d'interférence dans leur recouvrement. Nous expliquerons dans la section 4.5 pourquoi l'expérience de Grimaldi échoua.

## 4.2 Théorie scalaire

*Dans cette section on calcule l'éclairement pour la superposition de deux ondes de même fréquence, même vecteur d'onde et même polarisation rectiligne.*

### 4.2.1 Calcul de l'éclairement

Soient deux ondes lumineuses 1 et 2 de même fréquence qui se superposent en un point  $M$ . Écrivons les champs électriques (en représentation complexe) des ondes 1 et 2 au point  $M$ , en faisant l'hypothèse que ces deux champs sont parallèles au vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  :

$$\hat{\vec{E}}_1(t) = A_1 \vec{u}_x e^{i(\omega t + \phi_1)} \quad (4.2)$$

$$\hat{\vec{E}}_2(t) = A_2 \vec{u}_x e^{i(\omega t + \phi_2)} \quad (4.3)$$

où  $A_1 \geq 0$  et  $A_2 \geq 0$ . Ces hypothèses sont le point de départ de la **théorie scalaire** des interférences. Le caractère vectoriel du champ ne joue plus qu'un rôle très secondaire. Cette théorie scalaire des interférences s'applique aussi, avec peu de changements, à tout type d'ondes décrit par un *champ scalaire*, comme la suppression pour les ondes acoustiques. Elle permettra de décrire approximativement les interférences de deux ondes lumineuses se propageant de façon para-axiale (leurs rayons sont peu inclinés par rapport à  $Oz$ ) et polarisées rectilignement suivant  $Ox$ .

Le champ électrique résultant au point  $M$  est

$$\hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_1 + \hat{\vec{E}}_2 = \hat{A} \vec{u}_x e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

où  $\hat{A}$  est l'amplitude complexe

$$\hat{A} = A e^{i\psi} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}, \quad A \geq 0. \quad (4.5)$$

---

2. [Francesco Maria Grimaldi \(1618-1663\)](#)

En négligeant l'inclinaison des rayons par rapport à  $Oz$ , le champ magnétique en  $M$  est parallèle à  $Oy$  et le vecteur de Poynting parallèle à  $Oz$  :

$$\vec{B} \approx \frac{n\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}, \quad \vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \approx \frac{nE^2}{\mu c} \vec{u}_z. \quad (4.6)$$

Supposons qu'on observe sur un écran perpendiculaire à  $Oz$ . L'éclairement (cf. section 3.2.3) au point  $M$  est

$$I = \langle \vec{P} \cdot \vec{u}_z \rangle = \left\langle \frac{nE^2}{\mu c} \right\rangle = \left\langle \frac{nA^2}{\mu c} \cos^2(\omega t + \psi) \right\rangle = \frac{n}{2\mu c} |\hat{A}|^2. \quad (4.7)$$

Dans la théorie qui suit, la valeur du facteur  $\gamma = n/2\mu c$  est sans importance. Il suffit de retenir que l'éclairement est proportionnel au carré du module de l'amplitude :

$$\boxed{I = \gamma |\hat{A}|^2}. \quad (4.8)$$

S'il n'y avait que l'onde 1 (resp. 2), l'éclairement vaudrait  $I_1 = \gamma A_1^2$  (resp.  $I_2 = \gamma A_2^2$ ). L'éclairement  $I$  s'exprime en fonction du **déphasage**

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (4.9)$$

entre les ondes 1 et 2 et des éclairements  $I_1, I_2$  :

$$\begin{aligned} |\hat{A}|^2 &= \left| A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} \right|^2 = \left| A_1 + A_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \right|^2 = \\ &= \left( A_1 + A_2 e^{i\phi} \right) \left( A_1 + A_2 e^{-i\phi} \right) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}); \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$|\hat{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \phi; \quad (4.11)$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi}. \quad (4.12)$$

Dans le cas particulier où les ondes 1 et 2 ont même éclairement  $I_1 = I_2 = I_0$ , on peut mettre cette expression sous la forme

$$\boxed{I = 2I_0(1 + \cos \phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}}. \quad (4.13)$$

Lorsqu'on superpose deux ondes qui n'interfèrent pas entre-elles (par exemple deux ondes de fréquences différentes), l'éclairement est additif. Au lieu de l'équation (4.12) on a :

$$\boxed{I = I_1 + I_2} \quad (\text{sans interférence}). \quad (4.14)$$

Dans la somme (4.12), le terme  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$  est par conséquent appelé **terme d'interférence**.



### 4.2.2 L'éclairement en fonction du déphasage

Dans cette section nous étudions l'éclairement en fonction du déphasage  $\phi$  pour  $I_1$  et  $I_2$  donnés. En comparant au cas sans interférence, on dit que les interférences de deux ondes sont **constructives** lorsque  $I > I_1 + I_2$  et **destructives** lorsque  $I < I_1 + I_2$ . L'éclairement est maximum (cf. figures 4.3 et 4.4) lorsque les ondes 1 et 2 sont en phase :

$$\phi = 2p\pi \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

Il vaut alors

$$I_{\max} = \gamma(A_1 + A_2)^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (4.16)$$

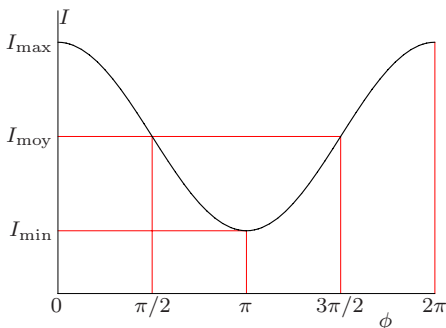


FIG. 4.3.

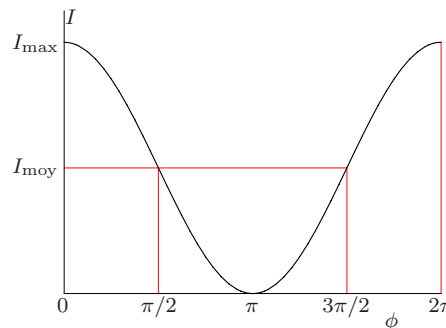


FIG. 4.4.

FIG. 4.3 – Éclairement  $I$  en fonction du déphasage  $\phi$ . Cas  $I_1 \neq I_2$ .

FIG. 4.4 – Éclairement  $I$  en fonction du déphasage  $\phi$ . Cas  $I_1 = I_2$ .

Pour  $I_1 = I_2 = I_0$ , ce maximum vaut  $I_{\max} = 4I_0$ . L'éclairement est minimum lorsque les ondes 1 et 2 sont en opposition de phase :

$$\phi = (2q + 1)\pi \quad \text{où} \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (4.17)$$

Il vaut alors

$$I_{\min} = \gamma(A_1 - A_2)^2 = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (4.18)$$

Pour  $I_1 = I_2$ , ce minimum est nul. La moyenne de ces valeurs minimum et maximum est

$$I_{\text{moy}} = I_1 + I_2 \quad (4.19)$$

qui est la valeur de l'éclairement lorsque les deux ondes lumineuses n'interfèrent pas.

### 4.2.3 Franges d'interférence

En pratique, sur l'écran d'observation, les éclairements  $I_1$  et  $I_2$  des deux ondes varient « lentement » alors que leur différence de phase  $\phi$  varie « rapidement ». Supposons que  $I_1$  et  $I_2$  sont uniformes sur tout l'écran d'observation. Les modulations d'éclairement observées sont alors dues aux variations du déphasage  $\phi$  d'un point à l'autre.

**Définition 4.1.** On appelle **franges d'interférence** le lieu des points  $M$  de l'écran ayant un éclairement donné.

On observe sur l'écran des **franges brillantes** où l'éclairement est maximum ( $I = I_{\max}$ ) lorsque les ondes sont en phase et des **franges sombres** où l'éclairement est minimum ( $I = I_{\min}$ ) lorsque les ondes sont en opposition de phase. On dit **franges noires** pour l'éclairement nul ( $I = I_{\min} = 0$ ).

**Définition 4.2.** On appelle **contraste** (ou **modulation**, ou **visibilité**) des franges le rapport

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (4.20)$$

*Remarque* La définition du contraste s'applique à tout système d'interférence. Le contraste peut être considéré comme une fonction  $C(M)$  du point  $M$  de l'écran d'observation,  $I_{\max}$  et  $I_{\min}$  désignant alors respectivement les éclairements des franges brillantes et sombres de l'écran qui encadrent le point  $M$ .

Le contraste s'écrit en fonction de l'amplitude des variations de l'éclairement  $a = \frac{1}{2}(I_{\max} - I_{\min})$  (cf. figure 4.5) autour de sa valeur moyenne  $I_{\text{moy}} = \frac{1}{2}(I_{\max} + I_{\min})$ :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{a}{I_{\text{moy}}}. \quad (4.21)$$

Pour les interférences de deux ondes, le contraste s'écrit en fonction de  $I_1$  et  $I_2$ , supposés constants, en utilisant les équations (4.16) et (4.18) :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (4.22)$$

Quand les deux ondes ont le même éclairement ( $I_1 = I_2$ ), les franges sont parfaitement contrastées ( $I_{\min} = 0$ ). Le contraste vaut alors  $C = 1$ . Sinon, il y a perte de contraste ( $C < 1$ ). Le cas limite  $C = 0$  correspond à l'absence d'interférence.

### 4.3 Cohérence temporelle

Nous avons mentionné plus haut que, dans des conditions usuelles, deux sources lumineuses différentes ne produisent pas d'interférence. Pour observer des interférences, on utilise un interféromètre qui divise, puis superpose la lumière issue d'une seule source. *Dans cette section, nous interprétons ces faits expérimentaux en utilisant les caractéristiques des sources lumineuses quasi-monochromatiques et des détecteurs* (cf. chapitre 2 et plus particulièrement la section 2.3).

#### 4.3.1 Mesure de l'éclairement

L'équation (4.7) donne l'éclairement comme une moyenne pendant une période

$$T_0 \sim 10^{-14} \text{ s} \quad (4.23)$$

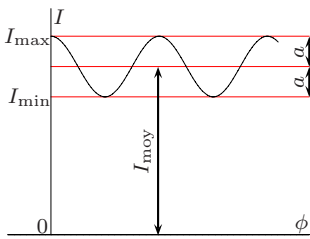


FIG. 4.5 – Définition de la modulation (ou contraste ou visibilité).

de l'onde lumineuse. On doit en réalité effectuer une moyenne pendant le temps de réponse  $T$  du détecteur utilisé (œil, plaque photographique, ...). Nous supposons que

$$T \sim 10^{-1} \text{ s.} \quad (4.24)$$

Nous devons donc prendre la moyenne de l'expression (4.12) pendant le temps  $T$ . Habituellement, les éclairements  $I_1$  et  $I_2$  restent constants. Pour ce qui concerne le déphasage  $\phi$ , défini par l'équation (4.9), on rencontre les situations suivantes.

- Le déphasage  $\phi$  est constant pendant le temps  $T$ . On dit que les ondes 1 et 2, au point  $M$ , sont **(mutuellement) cohérentes**. L'éclairément mesuré par le détecteur est alors donné par (4.12) ou (4.13).
- Le déphasage  $\phi$  prend un grand nombre de valeurs pendant le temps  $T$  et ces valeurs modulo  $2\pi$  sont équiréparties sur  $[0, 2\pi]$ . On dit que les ondes 1 et 2, au point  $M$ , sont **(mutuellement) incohérentes**. Dans cette situation, la moyenne pendant le temps  $T$  de  $\cos \phi$  est nulle :

$$\langle \cos \phi \rangle_T = 0 \quad (4.25)$$

et l'éclairément au point  $M$  est

$$I = \left\langle I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi \right\rangle_T = I_1 + I_2. \quad (4.26)$$

Deux ondes mutuellement incohérentes n'interfèrent donc pas entre elles (cf. équation (4.14)).

- Dans les cas intermédiaires entre les deux précédents on dit que les ondes sont **partiellement cohérentes**. On observe alors une diminution plus ou moins importante du contraste des franges par rapport au cas des ondes parfaitement cohérentes.

### 4.3.2 Cas de deux sources lumineuses distinctes

La figure 4.6 représente les champs électriques en  $M$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , de deux ondes 1 et 2 qui proviennent de deux sources lumineuses distinctes. Nous avons utilisé le modèle de la section 2.3.2 et représenté  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) comme la succession des trains d'ondes  $A_i, B_i, C_i, \dots$  de durée

$$\tau \sim 10^{-8} \text{ s} \quad (4.27)$$

égale au temps de cohérence  $\tau_i$  de la source  $i$ . Nous avons supposé que  $\tau_1 = \tau_2$ , que tous les trains d'ondes ont la même amplitude et que les trains d'ondes  $A_1$  et  $A_2$  commencent au même instant  $t = 0$ . Pour tracer la figure, les ordres de grandeurs ne sont pas respectés (on a pris  $\tau \approx 3,8T_0$  alors qu'en réalité  $\tau \sim 10^6 T_0$ ). Les sources lumineuses étant distinctes, les phases de tous les trains d'ondes  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$  ne sont pas corrélées entre elles. Il en résulte que le déphasage  $\phi$  est une fonction étagée qui change de

valeur aux instants  $p\tau$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ). Dans les conditions expérimentales usuelles on a

$$\tau \ll T. \quad (4.28)$$

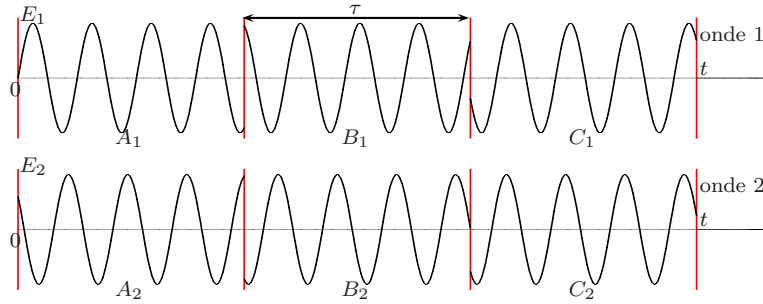
Pendant le temps  $T$ ,  $\phi$  va prendre environ  $\frac{T}{\tau} \sim 10^7$  valeurs qui, modulo  $2\pi$ , vont se répartir uniformément sur  $[0, 2\pi]$ . Les ondes 1 et 2, sont donc mutuellement incohérentes. On retiendra :

Deux ondes provenant de deux sources lumineuses distinctes sont mutuellement incohérentes et n'interfèrent pas entre-elles.

(4.29)

*Remarque :* dans le cas d'une source étendue (excepté le cas du laser), deux éléments infinitésimaux distincts de la source doivent être considérés comme des sources distinctes pour lesquelles (4.29) s'applique.

FIG. 4.6 – Ondes incohérentes.



### 4.3.3 Utilisation d'une seule source lumineuse ponctuelle

Pour observer des interférences lumineuses, il est nécessaire d'utiliser une source unique pour produire les ondes 1 et 2. Considérons une source ponctuelle  $S$  et un dispositif (appelé **interféromètre**) qui divise l'onde émise en deux ondes distinctes 1 et 2, puis les fait se superposer dans une région qui contient le point  $M$  (cf. figure 4.7). Les ondes 1 et 2 sont formées de la même succession de trains d'ondes  $A, B, C, \dots$  (cf. figure 4.8).

Soit  $\delta = [SM]_1 - [SM]_2$  la différence de marche le long des rayons lumineux  $R_1$  et  $R_2$  allant de  $S$  à  $M$  pour les ondes 1 et 2 respectivement. Le retard  $t'$  de l'onde 1 sur l'onde 2 est

$$t' = \frac{\delta}{c}. \quad (4.30)$$

Supposons, comme sur la figure 4.8, que

$$|t'| \ll \tau \quad (4.31)$$

ou, de façon équivalente en termes de la longueur de cohérence  $l = c\tau$ ,

$$|\delta| \ll l. \quad (4.32)$$

Aux instants  $t \in [t', \tau]$ , les deux champs  $E_1$  et  $E_2$  correspondent au même train d'onde  $A$ . Le déphasage vaut alors<sup>3</sup>

$$\phi = \frac{2\pi t'}{T_0} = \frac{2\pi \delta}{cT_0} = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}. \quad (4.33)$$

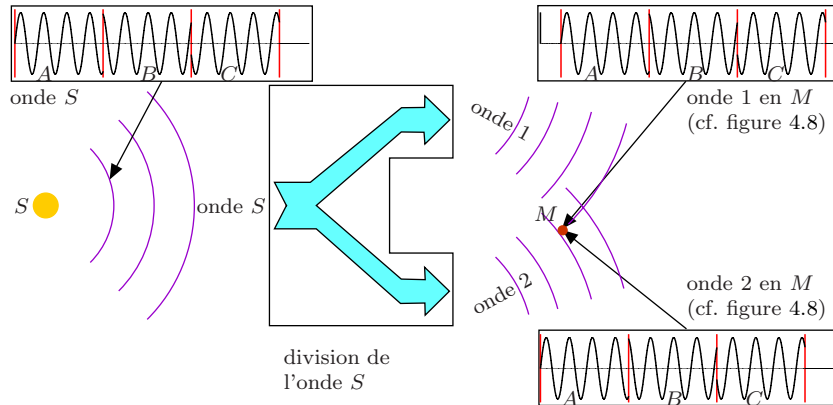


FIG. 4.7 – Expérience d'interférences.

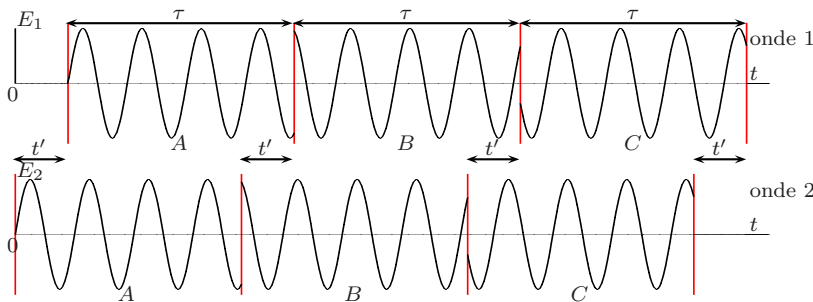


FIG. 4.8 – Ondes cohérentes. Les ondes sont issues de la même source et  $t' \ll \tau$ .

Le déphasage aura également cette valeur aux instants  $t \in [t' + \tau, 2\tau]$  (train d'onde  $B$ ), ... Pendant les intervalles de temps beaucoup plus courts  $[0, t']$ ,  $[\tau, \tau + t']$ , ... où deux trains d'ondes différents se superposent en  $M$  le déphasage prendra des valeurs imprévisibles. Avec l'hypothèse (4.31) on peut considérer que le déphasage est (presque toujours) donné par (4.33). Les ondes 1 et 2, au point  $M$ , sont donc mutuellement cohérentes et produisent des interférences. Supposons maintenant que

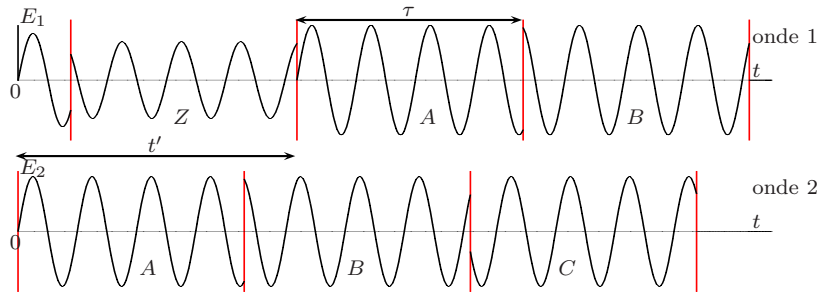
$$|t'| \gtrsim \tau \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad |\delta| \gtrsim l. \quad (4.34)$$

À tout moment, les trains d'ondes qui se superposent en  $M$  sont différents (cf. figure 4.9). Les ondes 1 et 2 sont mutuellement incohérentes et n'interfèrent pas entre-elles.

3. L'équation (4.33) est un cas particulier de l'équation (1.95).

La table 4.1 résume comment la cohérence mutuelle de deux ondes issues d'une même source ponctuelle dépend du retard  $t'$  entre les deux ondes (ou de leur différence de marche  $\delta$ ). Pour ce problème, on dit qu'il s'agit de **cohérence temporelle**, c'est-à-dire liée au temps de cohérence  $\tau$  de la source ponctuelle. Nous considérerons dans la section 4.5 la **cohérence spatiale** qui dépend de l'étendue de la source lumineuse.

FIG. 4.9 – Ondes incohérentes. Les ondes sont issues de la même source, mais  $t' \gtrsim \tau$ .



TAB. 4.1 – Cohérence mutuelle de deux ondes issues de la même source ponctuelle.

retard	différence de marche	cohérence mutuelle	interférences
$ t'  \ll \tau$	$ \delta  \ll l$	parfaite	oui
$ t'  \lesssim \tau$	$ \delta  \lesssim l$	partielle	oui
$ t'  \gtrsim \tau$	$ \delta  \gtrsim l$	non	non

#### 4.4 Deux sources secondaires ponctuelles

Dans cette section nous étudions de façon générale le système de franges obtenu à partir de deux sources secondaires ponctuelles monochromatique  $O_1$  et  $O_2$ .

FIG. 4.10 – Interférences en  $M$  de deux ondes sphériques issues de  $O_1$  et  $O_2$ .

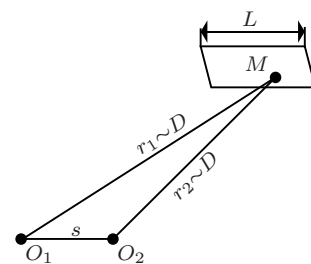


FIG. 4.10.

FIG. 4.11 – Les surfaces  $\phi = \text{Cte}$ : ce sont les hyperboloïdes de foyers  $O_1$  et  $O_2$ . Les nombres  $p = -3, -2, \dots, 2, 3$  sont les ordres d'interférence (cf. équation (4.36)).

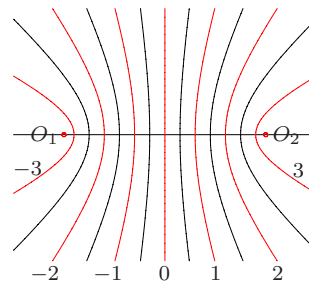


FIG. 4.11.

L'interféromètre divise l'onde issue de la source primaire ponctuelle  $S$  en deux ondes 1 et 2. Nous supposons — c'est ce qui se passe pour la plupart des dispositifs, trous d'Young compris, — que les ondes 1 et 2 sont des ondes sphériques issues respectivement des sources secondaires ponctuelles  $O_1$  et

$O_2$ . Les ondes sphériques 1 et 2 sont identiques à la translation  $\overrightarrow{O_1O_2}$  près : elles vibrent en phase et à la même fréquence. Notons  $r_1$ ,  $r_2$  et  $s$  les distances  $MO_1$ ,  $MO_2$  et  $O_1O_2$  respectivement (cf. figure 4.10).

Nous observerons les interférences sur un « petit » écran placé « loin » des sources : soit  $L$  l'ordre de grandeur des dimensions de l'écran,  $D$  l'ordre de grandeur de la distance entre l'écran et les sources ; nous faisons les hypothèses que  $D \gg s$  et  $D \gg L$ .

Les ondes qui arrivent au point  $M$  sont décrites par les expressions (4.2) et (4.3). En effet, comme  $M$  est loin des sources, leurs vecteurs d'onde sont presque parallèles et leurs polarisations aussi. De plus, les éclaircissements  $I_1$  et  $I_2$  sont pratiquement identiques et uniformes sur l'écran ( $I_1 = I_2 = \text{Cte}$ ).

Le déphasage  $\phi$  au point  $M$ , est donné par l'équation (1.91)

$$\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad \text{où} \quad \delta = n(r_1 - r_2). \quad (4.35)$$

**Définition 4.3.** Le nombre réel

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\phi}{2\pi} \quad (4.36)$$

est appelé **ordre d'interférence**.

Nous supposons que la distance  $s$  entre les sources secondaires est beaucoup plus petite que la longueur de cohérence  $l$ . On a alors  $|\delta| \leq ns \ll l$  et les ondes 1 et 2 sont mutuellement cohérentes. Les interférences peuvent s'observer dans tout l'espace (on dit qu'elles sont **non localisées**). Le déphasage  $\phi$  est constant sur les surfaces  $r_1 - r_2 = \text{Cte}$  qui sont les hyperboloïdes de révolution de foyers  $O_1$  et  $O_2$  (cf. figure 4.11). Les franges sont les intersections de ces hyperboloïdes et de l'écran. Sur une frange brillante  $p$  est entier relatif ( $p \in \mathbb{Z}$ ) et sur une frange sombre  $p$  est un « demi-entier » ( $p - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ ). On obtient sur l'écran des franges parfaitement contrastées ( $C = 1$ ).

Nous allons déterminer la figure d'interférence dans les deux cas suivants.

- Si on place l'écran en  $O$ , perpendiculairement à une médiatrice  $HO$  du segment  $O_1O_2$ , les franges d'interférence sont **rectilignes** (cf. figure 4.12 ;  $H$  est le milieu de  $O_1O_2$ ). En toute rigueur, seule la frange d'ordre  $p = 0$  est rectiligne et les autres sont des arcs d'hyperboles. Cependant pour  $D \gg s$  et  $D \gg L$  leur écart avec un segment de droite est négligeable. L'expérience des trous d'Young correspond à ce cas.
- Si on place l'écran perpendiculairement à l'axe  $O_1O_2$  (cf. figure 4.13) on obtient des franges d'interférence circulaires (**anneaux d'interférences**).

FIG. 4.12 – Écran  $\parallel O_1O_2$ .  
Franges rectilignes.

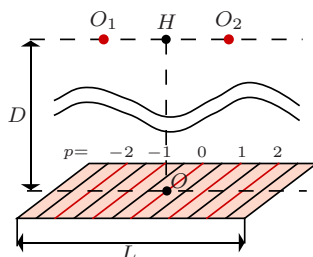


FIG. 4.12.

FIG. 4.13 – Écran  $\perp O_1O_2$ .  
Franges circulaires.

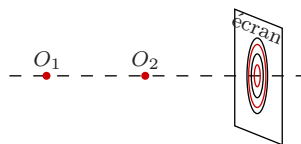


FIG. 4.13.

#### 4.4.1 Franges rectilignes

L'écran d'observation, de centre  $O$ , est situé dans le plan  $Oxy$ . Dans le référentiel  $Oxyz$ , les coordonnées des points  $O_1$ ,  $O_2$  et  $M$  sont (cf. figure 4.14)

$$O_1 = \begin{pmatrix} -s/2 \\ 0 \\ D \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} s/2 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Nous voulons calculer la différence de marche  $\delta = n(r_1 - r_2)$  pour  $s \ll D$ ,  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ .

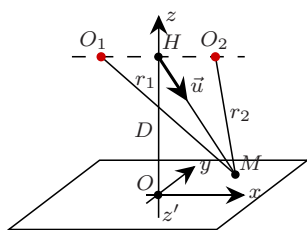


FIG. 4.14 – Franges d'interférences sur le plan  $Oxy$ .

##### 1<sup>re</sup> méthode

On a (pour l'approximation, cf. corde vibrante & acoustique, annexe B, page 74)

$$\delta = n(r_1 - r_2) \approx n\vec{u} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{HM}}{HM} \approx \frac{\overrightarrow{HM}}{D}. \quad (4.38)$$

Utilisant

$$\vec{u} \approx \begin{pmatrix} x/D \\ y/D \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1O_2} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

on obtient

$$\boxed{\delta = \frac{nsx}{D}}. \quad (4.40)$$

##### 2<sup>e</sup> méthode

Sans approximation, on a

$$r_1 = \left[ \left( x + \frac{s}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} = D \left[ 1 + \underbrace{\frac{(x + s/2)^2 + y^2}{D^2}}_{\epsilon \ll 1} \right]^{1/2}. \quad (4.41)$$



Un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre en  $\epsilon$  donne

$$r_1 \approx D + \frac{(x + s/2)^2 + y^2}{2D}. \quad (4.42)$$

On obtient  $r_2$  en changeant  $s$  en  $-s$  dans les équations précédentes :

$$r_2 \approx D + \frac{(x - s/2)^2 + y^2}{2D}. \quad (4.43)$$

On retrouve l'équation (4.40) en portant ces expressions approchées dans  $\delta = n(r_1 - r_2)$ .

### Éclairement et interfrange

L'éclairement est donné par l'équation (4.13) avec  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi nsx}{\lambda_0 D}$  :

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi nsx}{\lambda_0 D} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi sx}{\lambda D} \quad (4.44)$$

qui est représenté en fonction de  $x$  sur la figure 4.15.

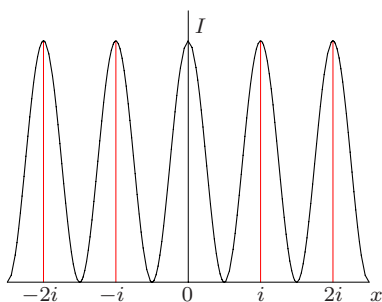


FIG. 4.15.

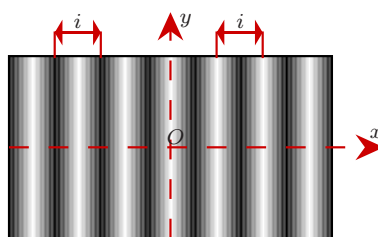


FIG. 4.16.

L'éclairement en  $M(x, y)$  ne dépend pas de  $y$  : les franges sont rectilignes et parallèles à  $Oy$  (cf. figures 4.16 et 4.12). La distance  $i$  entre deux franges brillantes consécutives, ou entre deux franges noires consécutives est la même. Elle s'appelle l'**interfrange** :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{ns} = \frac{\lambda D}{s}. \quad (4.45)$$

#### 4.4.2 Anneaux d'interférence

L'écran d'observation, de centre  $O$ , est placé perpendiculairement à l'axe  $O_1HO_2O$  (cf. figure 4.17). La différence de marche  $\delta = n(r_1 - r_2)$  au point  $M$  de l'écran est donné par l'équation (4.38) :

$$\delta \approx n\vec{u} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = ns \cos \theta \approx ns \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx ns \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2}\right) \quad (4.46)$$

FIG. 4.15 – Éclairement  $I$  en fonction de  $x$ .

FIG. 4.16 – Franges d'interférences sur l'écran [4].

où  $\rho$  est la distance  $OM$ ,  $D$  la distance  $HO$  et  $\theta$  l'angle que fait le vecteur unitaire  $\vec{u}$  avec l'axe  $O_1HO_2O$ . On a utilisé  $\theta \ll 1$ .

L'ordre d'interférence

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{ns}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \quad (4.47)$$

est maximum en  $O$  et décroît quand  $\rho$  augmente.

FIG. 4.17 – Franges d'interférences sur un écran  $\perp O_1O_2$ .

FIG. 4.18 – Éclairement  $I$  en fonction de  $\rho$ .

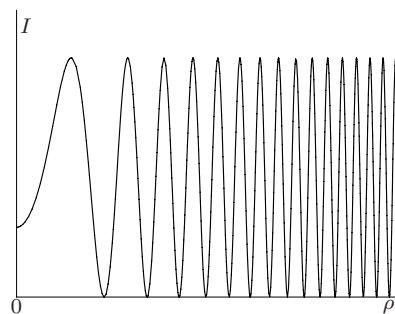
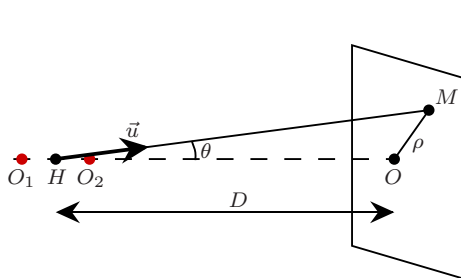


FIG. 4.17.

FIG. 4.18.

L'éclairement est donné par l'équation (4.13) avec  $\phi = 2\pi p$  :

$$I = 4I_0 \cos^2 p\pi = 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{\pi ns}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \right] \quad (4.48)$$

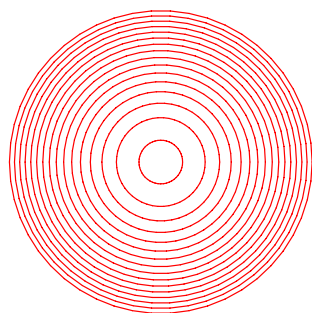


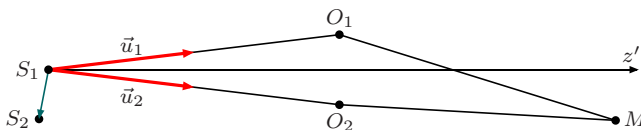
FIG. 4.19 – Anneaux d'interférences dans un plan  $\perp O_1O_2$  : tracé des franges brillantes.

qui est représenté en fonction de  $\rho$  sur la figure 4.18. Les franges sont les cercles de centre  $O$ , mais l'interfrange (distance entre deux franges brillantes consécutives, ou entre deux franges noires consécutives) n'est pas constant : il diminue quand  $\rho$  augmente (cf. figures 4.18 et 4.19).

Ces franges correspondant à l'équation  $\theta = \text{Cte}$  sont aussi appelées **franges d'égale inclinaison**.

## 4.5 Cohérence spatiale

FIG. 4.20 – Sources mutuellement incohérentes  $S_1$  et  $S_2$ .



Un facteur qui diminue la visibilité des franges est l'étendue de la source. Pour étudier cet effet, nous allons d'abord reprendre l'expérience des trous d'Young en perçant, au lieu d'un seul trou  $S$ , deux trous ponctuels identiques  $S_1$  et  $S_2$  dans le premier écran (cf. figure 4.20). La distance  $S_1S_2$  est petite par rapport à la longueur  $S_1O_1$ .

On peut considérer, dans le cas où l'écran est éclairé par une lampe spectrale, que les points  $S_1$  et  $S_2$  se comportent comme des sources mutuellement incohérentes. Soit  $M$  un point de l'écran d'observation et

$$\delta_1 = [S_1O_1M] - [S_1O_2M] \quad (\text{resp. } \delta_2 = [S_2O_1M] - [S_2O_2M]) \quad (4.49)$$

la différence de marche des deux ondes issues de  $S_1$  (resp. de  $S_2$ ) en  $M$ .

Les ondes qui suivent les trajets  $S_1O_1M$  et  $S_1O_2M$  interfèrent entre-elles (appelons onde  $\Omega_1$  leur superposition). L'éclairement dû à l'onde  $\Omega_1$  est donné par les équations (4.13) et (4.33) :

$$I_1 = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta_1}{\lambda_0} \quad (\text{onde } \Omega_1). \quad (4.50)$$

De même pour l'onde  $\Omega_2$  formée par la superposition des ondes qui suivent les trajets  $S_2O_1M$  et  $S_2O_2M$  l'éclairement est

$$I_2 = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta_2}{\lambda_0} \quad (\text{onde } \Omega_2). \quad (4.51)$$

Les ondes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  étant mutuellement incohérentes, l'équation (4.14) donne l'éclairement observé en  $M$  :

$$I = I_1 + I_2. \quad (4.52)$$

Pour la discussion posons

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = [S_2O_1] - [S_1O_1] - [S_2O_2] + [S_1O_2] \approx n \overrightarrow{S_1S_2} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \quad (4.53)$$

où  $u_1 = \frac{\overrightarrow{S_1O_1}}{S_1O_1}$ ,  $u_2 = \frac{\overrightarrow{S_1O_2}}{S_1O_2}$  et  $n$  est l'indice du milieu (air) supposé uniforme (pour l'approximation, cf. corde vibrante & acoustique, annexe B, page 74).

Nous n'envisageons que deux cas particuliers de valeurs de  $\Delta\delta$ .

- On a  $\Delta\delta = 0$  si  $\overrightarrow{S_1S_2} \perp \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ , c'est-à-dire si  $\overrightarrow{S_1S_2}$  est perpendiculaire au plan  $S_1O_1O_2$ . On a alors  $I_1 = I_2$  et  $I = 2I_1$  : le système de franges est le même pour la seule source  $S_1$  ou  $S_2$  ou pour les deux sources  $S_1$  ou  $S_2$ , mais avec un éclairement double dans ce dernier cas.
- Si  $\Delta\delta = \lambda_0/2$  on a

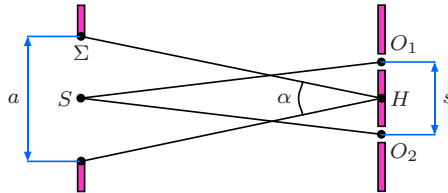
$$I = I_1 + I_2 = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta_1}{\lambda_0} + 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi\delta_1}{\lambda_0} + \frac{\pi}{2} \right) = 4I_0 \quad (4.54)$$

et les franges d'interférence disparaissent.

Examinons maintenant le cas d'une source étendue. Nous reprenons l'expérience d'Young en perçant une ouverture étendue  $\Sigma$  dans le premier écran au lieu d'un trou ponctuel (cf. figure 4.21). En général, s'il existe des points  $S_1 \in \Sigma$  et  $S_2 \in \Sigma$  de l'ouverture dont la variation  $\Delta\delta$  de différence de

marche (4.53) est de l'ordre de  $\lambda_0$  on n'observera pas d'interférence. On dit que les ondes en  $M$  sont **spatialement incohérentes**.

FIG. 4.21 – Source étendue  $\Sigma$ .



Pour que les franges restent bien visibles, il faut que  $\Delta\delta$  reste petit par rapport à  $\lambda_0$ , c'est-à-dire que l'ouverture doit être suffisamment fine dans la direction de  $O_1O_2$ . On dit alors que les ondes qui interfèrent en  $M$  sont **spatialement cohérentes**.

Il existe des situations intermédiaires entre ces cas extrêmes, la **cohérence spatiale** est grande pour une source ponctuelle et diminue lorsque la source devient plus étendue.

Nous avons mentionné que, en pratique, dans l'expérience d'Young, les trous  $S$ ,  $O_1$  et  $O_2$  sont remplacés par des fentes fines perpendiculaires au plan  $SO_1O_2$  (expérience des fentes d'Young). La cohérence spatiale reste grande et le phénomène est plus lumineux sans que les franges d'interférence ne se brouillent.

*Exercice :* Avec les notations de la figure 4.21, pour une ouverture  $\Sigma$  de hauteur  $a$ , calculer  $\Delta\delta$  pour les points  $S_1$  et  $S_2$  en haut et en bas de l'ouverture. On suppose que  $\alpha \ll 1$ . À quelle condition la cohérence spatiale sera-t-elle grande?

*Réponse :*  $\Delta\delta = \alpha s$ . La cohérence spatiale sera grande si  $\alpha \ll \lambda/s$ .

Avec une source étendue incohérente, il faut limiter la valeur de  $\alpha$  pour obtenir la cohérence spatiale : c'est à cela que sert le premier diaphragme de l'expérience d'Young. L'expérience de Grimaldi (cf. section 4.1) échoua car le disque solaire est vu de la Terre sous l'angle de  $32'$  ce qui n'est pas très petit par rapport à  $\lambda/s$ .

## 4.6 Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson<sup>4</sup> (cf. figure 4.22) réalise une **division d'amplitude** de la lumière incidente à l'aide d'une (**lame**) **séparatrice**  $L$  inclinée à  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique. Cette séparatrice réfléchit 50 % de l'énergie lumineuse incidente dans le faisceau 1 et en transmet 50 % dans le faisceau 2. Par suite de la réflexion sur le miroir  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) le faisceau 1 (resp. 2) fait un aller et retour dans le **bras** 1 (resp. 2) de l'interféromètre.

4. Albert Abraham Michelson (1852-1931)

Les deux faisceaux sont superposés en retraversant la séparatrice. On observe les interférences autour du point  $O$ . Nous supposons la séparatrice  $L$  infiniment fine comme sur la figure 4.22.

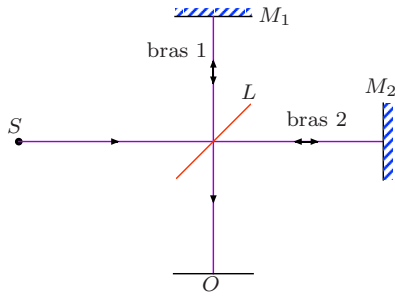


FIG. 4.22.

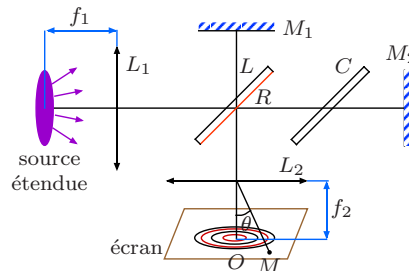


FIG. 4.23.

FIG. 4.22 – Principe de l'interféromètre de Michelson.

FIG. 4.23 – Interféromètre de Michelson.

$L$  : séparatrice ;  
 $R$  : face semi-réfléchissante ;  
 $C$  : compensatrice ;  
 $M_1, M_2$  miroirs ;  
 $L_1, L_2$  lentilles convergentes de distances focales  $f_1, f_2$  respectivement.

En réalité, la séparatrice est une lame de verre à face parallèles dont une face est rendue semi-réfléchissante par dépôt d'une mince couche métallique  $R$  (cf. figure 4.23). On introduit dans un des bras (pas n'importe lequel) la compensatrice  $C$  qui est une lame identique à  $L$ , mais sans couche semi-réfléchissante. Si on néglige les réflexions parasites sur les faces non traitées de ces lames, chacun des faisceaux 1 et 2 traverse 3 fois la même épaisseur de verre. (Sans compensatrice, il est pratiquement impossible d'observer les interférences en lumière blanche.)

Soit  $M'_2$  le symétrique du miroir  $M_2$  par rapport à  $L$ . Pour une source ponctuelle  $S$ , les faisceaux 1 et 2 sortant de l'interféromètre sont des ondes sphériques issues respectivement des points  $O_1$  (image de  $S$  dans  $L$  et  $M_1$ ) et  $O_2$  (image de  $S$  dans  $L$  et  $M'_2$ ).

### 4.6.1 Réglage en lame à faces parallèles

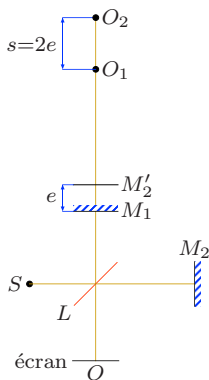


FIG. 4.24.

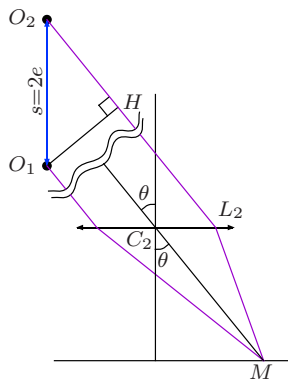


FIG. 4.25.

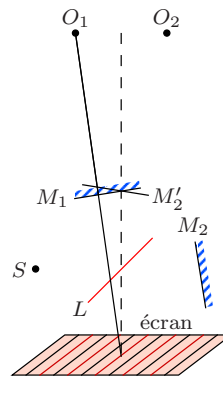


FIG. 4.26.

FIG. 4.24 – Réglage en lame à faces parallèles.

FIG. 4.25 – Calcul de la différence de marche.

FIG. 4.26 – Réglage en coin d'air.

Lorsque  $M_1$  et  $M'_2$  sont parallèles (cf. figure 4.24), on dit que l'interféromètre de Michelson est réglé en lame à faces parallèles (ou lame d'air). La distance  $s = 2e$  entre  $O_1$  et  $O_2$  est le double de la différence de longueur  $e$

des bras de l'interféromètre.

On observe sur un écran perpendiculaire à l'axe  $O_1O_2O$  placé en  $O$  les anneaux d'interférence (franges d'égale inclinaison) décrits section 4.4.2.

### 4.6.2 Réglage en lame à faces parallèles et source étendue

En pratique, on effectue le montage avec  $S$  et  $O$  à l'infini en plaçant la source lumineuse dans le plan focal d'une lentille convergente  $L_1$  et l'écran d'observation dans le plan focal d'une deuxième lentille convergente  $L_2$ . On pourra vérifier<sup>5</sup> sur la figure 4.25, où les sources  $O_1$  et  $O_2$  sont à l'infini, que la différence de marche  $\delta$  au point  $M$  est donnée par

$$\delta = [O_2M] - [O_1M] = n \overline{O_2H} = 2ne \cos \theta. \quad (4.55)$$

La valeur de  $\delta$  dans ce montage ne dépend pas de la position de  $S$  dans le plan focal de la lentille  $L_1$ . On peut remplacer la source ponctuelle  $S$  par une source étendue tout en conservant la cohérence spatiale (cf. figure 4.23). L'interféromètre de Michelson utilisé ainsi donne des interférences beaucoup plus lumineuses que le dispositif des fentes d'Young qui ne peut pas être utilisé avec une source étendue (cf. section 4.5).

*Remarque.* Avec une source étendue, on dit que les franges sont **localisées à l'infini** parce que si on les observe à distance finie il n'y a plus cohérence spatiale et les franges se brouillent ou disparaissent.

### 4.6.3 Application : mesure des longueurs

On utilise le réglage en lame à faces parallèles et on envoie dans l'interféromètre le faisceau de lumière parallèle d'un laser monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  connue. L'un des miroirs  $M_1$  ou  $M_2$  se déplace parallèlement à lui-même. Soit  $x$  le déplacement de ce miroir qui correspond à une longueur à mesurer. Un détecteur, situé en  $O$  (cf. figure 4.22), mesure l'éclairement. Pendant le déplacement du miroir, la différence de marche varie de  $2nx$  et le détecteur voit défiler  $p = 2nx/\lambda_0 = 2x/\lambda$  franges. Le comptage de ces franges permet d'en déduire  $x = p\lambda/2$ . On peut facilement mesurer  $p$  à 1/20 de frange près ce qui permet de mesurer  $x$  à  $\lambda/10$  près (mieux que  $10^{-7}$  m pour  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ ).

### 4.6.4 Réglage en coin d'air

Lorsque  $M_1$  et  $M_2'$  font un petit angle entre eux (cf. figure 4.26), on dit que l'interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air. Avec une source ponctuelle  $S$ , on se retrouve dans la situation de la section 4.4 et on observe les franges intersections des hyperboloïdes et de l'écran.

---

5. Indication : cf. équation (1.97).

### 4.7 Deux catégories de dispositifs interférentiels

On distingue deux catégories de dispositifs interférentiels :

- les **interféromètres à division du front d'onde** où les rayons qui interfèrent correspondent à deux rayons distincts issus de la source comme dans l'expérience des trous d'Young (cf. figure 4.27) ;
- les **interféromètres à division d'amplitude** où les rayons qui interfèrent correspondent à un même rayon issu de la source comme dans l'interféromètre de Michelson (cf. figure 4.28).



FIG. 4.27.



FIG. 4.28.

FIG. 4.27 – Interféromètre à division du front d'onde.

FIG. 4.28 – Interféromètre à division d'amplitude.

Le miroir de Lloyd mentionné précédemment (cf. figure 1.22) est un interféromètre à division du front d'onde. Le rayon qui se réfléchit sur le miroir semble provenir du point  $O_2$  symétrique de  $S$  par rapport au miroir (cf. figure 4.29). L'écran est placé perpendiculairement au miroir et au plan  $OO_1O_2$  ( $O$  étant un point du plan du miroir). On y observe les interférences des deux ondes sphériques issues de  $O_1 = S$  et  $O_2$ . Toutefois, par suite de la réflexion sur le miroir, qui se fait avec changement de signe du champ électrique, on doit considérer que la source  $O_2$  vibre en opposition de phase avec  $O_1$ . L'éclairement de l'écran est donc de la forme

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \delta = n(r_1 - r_2). \quad (4.56)$$

Les franges brillantes et sombres sont inversées par rapport au problème étudié dans la section 4.4. Elles sont rectilignes pour  $s \ll r_1$ . Comme dans l'expérience des trous d'Young, la source  $S$  peut être remplacée, pour augmenter l'éclairement, par une fente dont le plus grand côté est parallèle aux franges.

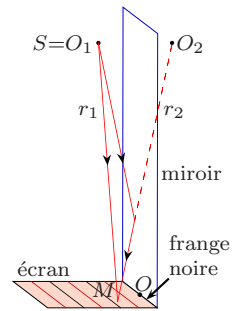


FIG. 4.29 – Miroir de Lloyd.

### 4.8 Théorie vectorielle

Si au lieu des ondes (4.2) et (4.3) on considère deux ondes de même vecteur d'onde mais de polarisations rectilignes différentes  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  :

$$\hat{\vec{E}}_1(t) = A_1 \vec{u}_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} \quad (4.57)$$

$$\hat{\vec{E}}_2(t) = A_2 \vec{u}_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} \quad (4.58)$$

on obtient pour l'éclairement, au lieu de (4.12),

$$I = I_1 + I_2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi. \quad (4.59)$$

Le terme d'interférence disparaît lorsque les polarisations sont orthogonales.

## 4.9 Conditions d'interférence

Pour observer les interférences, les deux ondes doivent être mutuellement cohérentes et pour cela

- les deux ondes doivent provenir d'une seule source par division d'ondes dans un interféromètre ;
- la différence de marche  $\delta$  entre les deux ondes doit être plus petite que la longueur de cohérence  $l$  :

$$|\delta| \lesssim l. \quad (4.60)$$

*Remarques.*

- La condition (4.60), qui inclut des ondes partiellement cohérentes, est expliquée en détail section 4.3.3.
- On peut observer des interférences à partir d'une source étendue s'il y a cohérence spatiale. Pour cela, les systèmes de franges d'interférence dues aux divers éléments infinitésimaux de la source étendue doivent être très semblables sur l'écran d'observation.
- On peut observer des interférences à partir d'une source de lumière blanche. Les systèmes de franges d'interférence dues aux diverses composantes spectrales de la source de lumière blanche se superposent sans nouvelles interférences. Au voisinage des points où

$$|\delta| \lesssim 10^{-6} \text{ m} \quad (4.61)$$

on observera des franges colorées. L'inégalité (4.61) est la condition de cohérence (4.60) écrite pour la longueur de cohérence de la lumière blanche (cf. table 2.2).

- L'utilisation de lasers très stabilisés en fréquence et de détecteurs très rapides permet de réaliser des expériences dans des conditions où l'inégalité (4.28) change de sens et devient :

$$T \lesssim \tau. \quad (4.62)$$

Deux telles ondes sont alors mutuellement cohérentes pendant le temps de détection  $T$  et il devient possible d'observer les interférences entre deux sources distinctes ou des battements entre deux sources monochromatiques de fréquences différentes. L'expérience s'effectue par simple superposition des deux faisceaux laser sur le détecteur.



## 5

# Diffraction

## 5.1 Définition

**Définition 5.1 (diffraction).** La **diffraction** est une déviation des rayons lumineux qui intervient lorsque la lumière rencontre un obstacle, une ouverture ou un bord d'écran et qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction.

La figure 5.1 représente une expérience de diffraction où on observe sur un écran la tache de lumière issue d'une source ponctuelle  $S$  qui passe à travers une ouverture  $\Sigma$  percée dans un écran opaque. On constate que la tache observée ne correspond pas exactement à la propagation rectiligne des rayons. Le phénomène est lié à la nature ondulatoire de la lumière. Il s'observe pour toutes sortes d'ondes, pas seulement lumineuse, mais aussi acoustique, ... et devient très remarquable quand les dimensions de l'ouverture sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

**Définition 5.2 (diffraction de Fraunhofer).** La **diffraction de Fraunhofer** ou **diffraction à l'infini** correspond au cas particulier où la source  $S$  et l'écran d'observation sont à l'infini.

La figure 5.2 représente un montage pratique pour étudier la diffraction de Fraunhofer : la source  $S$  est placée au foyer objet  $F'$  de la lentille convergente  $L'$  et l'écran d'observation dans le plan focal de la lentille convergente  $L$ . Le système étant supposé stigmatique, l'image  $I$  de  $S$  coïncide avec le foyer image  $F$  de  $L$ , mais par suite du phénomène de diffraction l'image ponctuelle est remplacée par une **tache de diffraction**. On peut noter que cette tache existe même si on n'introduit pas de diaphragme, le faisceau étant limité par la taille des lentilles. La figure 5.3 schématise un montage d'optique où  $I$  est l'image géométrique de l'objet  $S$ . Ce cas relève également de la diffraction de Fraunhofer.

**Définition 5.3 (diffraction de Fresnel).** Le cas général ( $S$  et  $M$  à distances finies dans la figure 5.1) qui ne sera pas étudié dans ce cours est appelé **diffraction de Fresnel**.

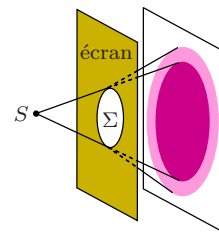


FIG. 5.1 – Diffraction d'une onde par l'ouverture  $\Sigma$ .

FIG. 5.2 – Diffraction de Fraunhofer.

FIG. 5.3 – Diffraction par un diaphragme.

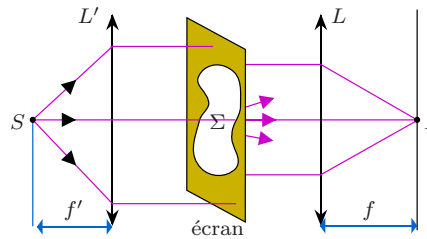


FIG. 5.2.

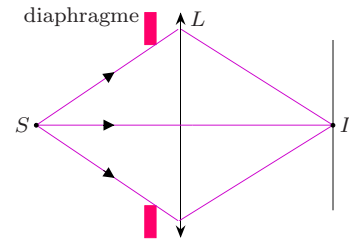


FIG. 5.3.

## 5.2 Le principe d'Huygens-Fresnel

Le principe d'Huygens-Fresnel permet de déterminer la diffraction d'une onde par une ouverture  $\Sigma$  de forme quelconque. Il se base sur le principe d'Huygens (cf. section 1.8.1) et pose d'abord que

Chaque point  $P$  de l'ouverture  $\Sigma$  peut être considéré comme une source secondaire qui émet une ondelette (contribution d'Huygens). (5.1)

Il affirme de plus

Ces sources secondaires sont mutuellement cohérentes. L'amplitude complexe de la vibration au point d'observation  $M$  est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires (contribution de Fresnel). (5.2)

Nous devons compléter l'énoncé du principe par l'expression des ondelettes, ce qui sera fait dans la section suivante, pour l'étude de la diffraction de Fraunhofer. Le calcul de l'onde diffractée est ramené à un problème d'interférence d'un nombre infini d'ondes. L'ouverture  $\Sigma$  n'est pas nécessairement une surface d'onde  $\Sigma_t$  à l'instant  $t$  comme dans le principe d'Huygens.

Soulignons les idées qui apparaissent dans le principe d'Huygens-Fresnel :

- l'idée des sources secondaires et des **ondelettes** (contribution d'Huygens, 1690) ;
- les autres idées sont dues à Fresnel (1818) :
  - on doit utiliser l'**amplitude complexe** et non l'éclairement ;
  - les sources secondaires sont **cohérentes** ;
  - les ondelettes **interfèrent** entre-elles.

Le principe d'Huygens-Fresnel peut être démontré à partir de la théorie de Maxwell (lumière) ou de l'équation de d'Alembert (acoustique).

## 5.3 Diffraction de Fraunhofer

### 5.3.1 Le dispositif

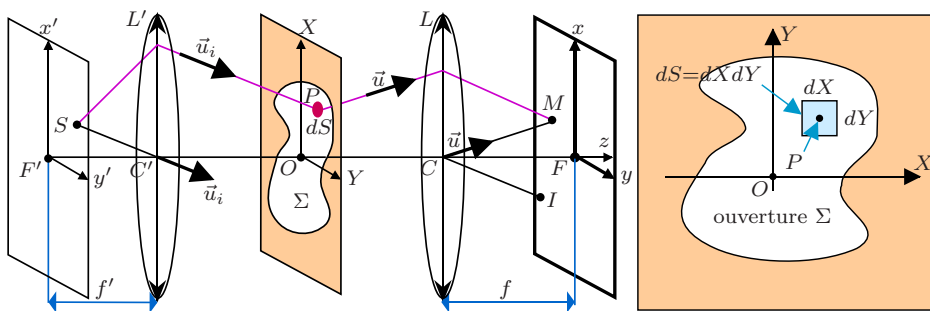


FIG. 5.4.

FIG. 5.5.

FIG. 5.4 – Diffraction de Fraunhofer.

FIG. 5.5 – L'ouverture  $\Sigma$ .

Tout au long de ce chapitre nous utiliserons le montage représenté sur la figure 5.4. L'approximation de Gauss<sup>1</sup> est supposée valide. L'axe optique  $Oz$  du système passe par le foyer objet  $F'$  et le centre  $C'$  de la lentille convergente  $L'$ , par le point  $O$  du diaphragme et par le foyer image  $F$  et le centre  $C$  de la lentille convergente  $L$ . Les distances focales des lentilles  $L'$  et  $L$  sont respectivement  $f' = F'C'$  et  $f = CF$ . Introduisons trois référentiels cartésiens  $F'x'y'z$ ,  $OXYZ$  et  $Fxyz$ , parallèles entre-eux. La source ponctuelle  $S$  est monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ . Elle se trouve dans le plan focal objet de  $L'$  au point de coordonnées  $(x', y', 0)$  dans le référentiel  $F'x'y'z$ . L'écran d'observation est le plan focal image de la lentille  $L$ . Le point  $M$  de cet écran est repéré par ses coordonnées  $(x, y, 0)$  dans le référentiel  $Fxyz$ . On obtient les coordonnées  $(x_0, y_0, 0)$  dans le référentiel  $Fxyz$  de l'image géométrique  $I$  de la source  $S$  en écrivant que le vecteur  $\vec{CI}$  est parallèle au vecteur unitaire

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{SC}'}{SC'} \approx \frac{\vec{SC}'}{f'} = \begin{pmatrix} -x'/f' \\ -y'/f' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

On a

$$\vec{CI} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f \end{pmatrix} \approx f\vec{u}_i \quad \text{d'où} \quad x_0 = -\frac{fx'}{f'}, \quad y_0 = -\frac{fy'}{f'}. \quad (5.4)$$

### 5.3.2 Expression de l'amplitude complexe diffractée

Nous allons écrire l'amplitude complexe  $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(x, y)$  du champ électrique de l'onde diffractée au point  $M$ . Nous nous plaçons dans la théorie scalaire qui suppose que tous les champs électriques sont presque parallèles à

1. Johann Karl (Carl) Friedrich Gauss (1777-1855)

un certain vecteur unitaire  $\vec{v}$  ( $\vec{v} \perp Oz$ ). Le champ électrique en  $M$  (représentation complexe) s'obtient en multipliant l'amplitude  $\mathcal{A}(M)$  par le facteur  $e^{i\omega t} \vec{v}$ . Le principe d'Huygens-Fresnel pose que le point  $P \in \Sigma$  (plus exactement un élément de surface infinitésimale  $dS$  de l'ouverture  $\Sigma$ ) est une source secondaire. Dans les conditions du montage (diffraction de Fraunhofer, approximation de Gauss), l'amplitude complexe en  $M$  de l'ondelette émise par cette source secondaire est

$$A dS e^{-i2\pi[SPM]/\lambda_0} \quad (5.5)$$

où  $A$  est une constante complexe et  $[SPM]$  est le chemin optique calculé le long du rayon incident qui va de  $S$  à  $P$  en traversant la lentille  $L'$  puis le long du rayon de l'ondelette qui va de  $P$  à  $M$  en traversant la lentille  $L$ . La formule ci-dessus signifie que

- le champ électrique (représentation complexe) en  $M$  de l'ondelette émise par la surface infinitésimale  $dS$  s'obtient en multipliant l'amplitude complexe (5.5) par le facteur  $e^{i\omega t} \vec{v}$ ;
- en module, les amplitudes de toutes les ondelettes qui arrivent en  $M$  sont identiques (pour la même surface élémentaire  $dS$ ) et ne dépendent ni de la position de  $M$  sur l'écran d'observation ni de celle de  $P$  dans l'ouverture;
- l'argument des amplitudes (la phase) des ondelettes correspond à la propagation de l'onde le long du trajet  $SPM$ ; pour l'ondelette considérée, l'argument est  $A dS e^{i\phi(M)}$ , la phase  $\phi(M)$  étant conforme à l'équation (1.52)

$$\phi(S) - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [SPM] \quad (5.6)$$

où on a pris  $\phi(S) = 0$ .

Soit  $\vec{k}_i$  le vecteur d'onde de l'onde plane incidente sur l'ouverture  $\Sigma$ . Ce vecteur d'onde est parallèle au vecteur unitaire  $\vec{u}_i$  :

$$\vec{k}_i = k \vec{u}_i \approx k \begin{pmatrix} -x'/f' \\ -y'/f' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5.7)$$

Introduisons le vecteur d'onde  $\vec{k}$  qui correspond à l'onde plane diffractée à l'infini et observée en  $M$ . Ce vecteur d'onde a pour module  $k$  et est parallèle au vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} \approx \frac{\overrightarrow{CM}}{f} = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

On a

$$\vec{k} = k \vec{u} \approx k \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Comparons les chemins optiques  $[SPM]$  et  $[SOM]$  (cf. figure 5.6). En utilisant l'équation (1.98) on a

$$[SPM] - [SOM] = n(\overline{OH} + \overline{KO}) = n\overline{OP} \cdot (\vec{u}_i - \vec{u}). \quad (5.10)$$

On en déduit

$$\frac{2\pi[SPM]}{\lambda_0} + \phi_0 = \overline{OP} \cdot \frac{2\pi n}{\lambda_0}(\vec{u}_i - \vec{u}) = \overline{OP} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}) \quad (5.11)$$

où  $\phi_0 = -\frac{2\pi[SOM]}{\lambda_0}$  ne dépend pas de  $P$ . L'amplitude complexe du champ électrique au point  $M$  est la somme des amplitudes (5.5) des ondelettes : c'est l'intégrale

$$\boxed{\mathcal{A}(M) = A e^{i\phi_0} \iint_{\Sigma} dS e^{i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \overline{OP}}.} \quad (5.12)$$

Désignons par  $(X, Y)$  les coordonnées de  $P$  dans le référentiel  $OXY$  et écrivons  $dXdY$  pour  $dS$ . En utilisant les équations (5.7), (5.9) et (5.4) on a

$$(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \overline{OP} = k \left( \frac{x}{f} + \frac{x'}{f'} \right) X + k \left( \frac{y}{f} + \frac{y'}{f'} \right) Y = \frac{k}{f} [(x - x_0)X + (y - y_0)Y]. \quad (5.13)$$

L'amplitude complexe (5.12) s'écrit

$$\mathcal{A}(x, y) = A e^{i\phi_0} \iint_{\mathbb{R}^2} dXdY \tau(X, Y) e^{ik[(x-x_0)X + (y-y_0)Y]/f} \quad (5.14)$$

où on a introduit la **fonction transparence**

$$\tau(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \Sigma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.15)$$

L'expression (5.14) s'applique en fait à tout **objet diffractant** placé dans le plan  $OXY$ . Un objet diffractant est caractérisé par sa fonction transparence  $\tau(X, Y)$  qui vaut 0 là où l'objet est opaque. De façon générale  $\tau$  est un nombre complexe de module  $|\tau| \leq 1$  qui décrit l'absorption de la lumière par l'objet diffractant et dont l'argument correspond à un déphasage introduit par l'objet.

### 5.3.3 Source sur l'axe optique

La figure de diffraction est caractérisée par l'éclairement de l'écran qui est proportionnel à  $|\mathcal{A}(x, y)|^2$ . D'après l'équation (5.14) cet éclairement est une fonction  $f(x - x_0, y - y_0)$  ce qui signifie que si on déplace latéralement (c'est-à-dire dans le plan focal objet  $F'x'y'$ ) la source  $S$ , la figure de diffraction suit le déplacement latéral de l'image  $I$ . Nous supposons donc dans la suite

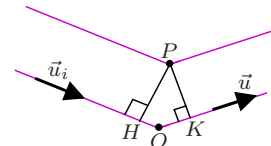


FIG. 5.6 – Calcul de la différence de marche.

que la source  $S$  et son image sont sur l'axe optique. L'éclairement est alors donné à un facteur près par

$$I(x, y) = |\hat{\tau}(x, y)|^2 \quad (5.16)$$

où la fonction

$$\hat{\tau}(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} dX dY \tau(X, Y) e^{ik(xX+yY)/f} \quad (5.17)$$

est appelée **transformée de Fourier**<sup>2</sup> de la fonction  $\tau(X, Y)$ .

*Remarque.* On démontre que la transformation s'inverse :

$$\tau(X, Y) = \left( \frac{k}{2\pi f} \right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \hat{\tau}(x, y) e^{-ik(xX+yY)/f}. \quad (5.18)$$

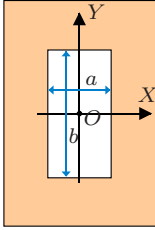


FIG. 5.7 – Ouverture rectangulaire.

## 5.4 Diffraction par une ouverture rectangulaire

### 5.4.1 Calcul de l'éclairement

Pour l'ouverture rectangulaire de la figure 5.7, la fonction transparence est

$$\tau_r(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X| \leq a/2 \text{ et } |Y| \leq b/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.19)$$

et l'équation (5.17) donne

$$\hat{\tau}_r(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} dX \int_{-b/2}^{b/2} dY e^{ik(xX+yY)/f}. \quad (5.20)$$

Posant  $\alpha = kx/2f$ , l'intégrale sur  $X$  est

$$\int_{-a/2}^{a/2} dX e^{i2\alpha X} = \frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{2i\alpha} = \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha} = a \operatorname{sinc}(\alpha a) = a \operatorname{sinc} \frac{kax}{2f} \quad (5.21)$$

où la fonction  $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$  est le **sinus cardinal**. L'intégrale (5.20) vaut

$$\hat{\tau}_r(x, y) = ab \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} \quad (5.22)$$

et l'éclairement est

$$I(x, y) = I_0 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} \right)^2. \quad (5.23)$$

2. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

### 5.4.2 Étude du sinus cardinal $\text{sinc } u$ et de $(\text{sinc } u)^2$

La fonction  $\text{sinc } u$  est représentée sur la figure 5.8. Elle est paire et s'anule pour  $u = m\pi$ , avec  $m$  entier non nul ( $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ ). Elle est définie par continuité en  $u = 0$  :  $\text{sinc}(0) = 1$ . Ce point est le maximum principal de la fonction.

La fonction  $(\text{sinc } u)^2$  est représentée sur la figure 5.9. Les minima de  $(\text{sinc } u)^2$  correspondent aux zéro de  $\text{sinc } u$  et se trouvent en  $u = m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ ). Les maxima de  $(\text{sinc } u)^2$  correspondent aux extremums de  $\text{sinc } u$ . Leurs positions sont les racines de l'équation  $\text{tg } u = u$ . La table 5.1 donne, en plus du maximum principal en  $u = 0$ , les valeurs sous forme de fractions des trois maxima secondaires suivants. Les maxima secondaires se trouvent approximativement en  $u = \pm(m + 1/2)\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}^+$ , c'est-à-dire presque au milieu des minima qui l'encadrent. Leur valeur est voisine de  $\frac{1}{(p + 1/2)^2\pi^2}$ .

On remarquera que le pic principal est deux fois plus large que les pics secondaires. Son aire est environ 90 % de l'aire totale sous la courbe.

$u$	max
0	1
$\pm 1,43\pi$	$\frac{1}{22}$
$\pm 2,46\pi$	$\frac{1}{62}$
$\pm 3,5\pi$	$\frac{1}{122}$

TAB. 5.1 – Les maxima de  $(\text{sinc } u)^2$ .

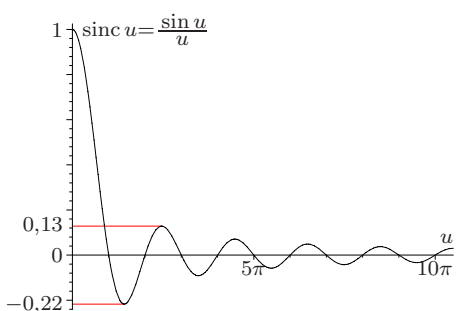


FIG. 5.8.

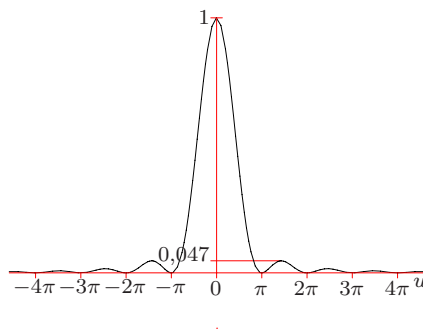


FIG. 5.9.

FIG. 5.8 – La fonction  $\text{sinc } u = \frac{\sin u}{u}$ .

FIG. 5.9 – La fonction  $(\text{sinc } u)^2$ .

### 5.4.3 Absence de diaphragme

Les faisceaux lumineux étant au moins limités par la taille finie des lentilles, même lorsqu'on enlève le diaphragme dans le dispositif de la figure 5.4 tout se passe comme s'il en restait un écran percé d'un trou de la taille des lentilles. Toutefois, il est intéressant d'examiner le cas limite  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  de l'intégrale (5.23) qui correspond à l'absence de diffraction. Le facteur

$$\left( \text{sinc } \frac{\pi a x}{\lambda f} \right)^2 = (\text{sinc } u)^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi a x}{\lambda f} \quad (5.24)$$

n'a de valeurs non négligeables que pour les quelques premiers pics de la fonction  $(\text{sinc } u)^2$ , c'est-à-dire pour  $|u| \lesssim \pi$  soit  $|x| \lesssim \frac{\lambda f}{a}$ . Dans la limite  $a \rightarrow \infty$ , l'intensité est donc négligeable sauf pour  $x = 0$ . De même on trouve

que dans la limite  $b \rightarrow \infty$ , le facteur

$$\left( \operatorname{sinc} \frac{\pi b y}{\lambda f} \right)^2 \quad (5.25)$$

est négligeable sauf pour  $y = 0$ . Cela montre que le cas limite  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$  correspond à une tache de diffraction réduite au seul point  $x = y = 0$  qui coïncide avec l'image géométrique de la source.

#### 5.4.4 Figure de diffraction d'une fente fine

FIG. 5.10 – Fente fine.

FIG. 5.11 – Figure de diffraction de la fente fine [5].

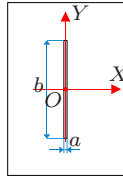


FIG. 5.10.

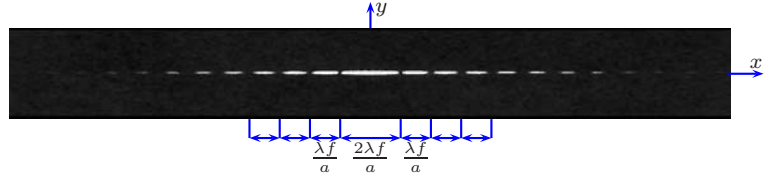


FIG. 5.11.

Examinons la figure de diffraction d'une fente fine, c'est-à-dire d'un rectangle  $a \ll b$  (cf. figure 5.10). Nous nous plaçons dans le cas limite  $b \rightarrow \infty$ . D'après la section précédente l'éclairement est nul pour  $y \neq 0$  et la tache de diffraction est localisée sur l'axe  $Fx$ . La limite  $b \rightarrow \infty$  de l'équation (5.23) donne l'éclairement sur cet axe en fonction de  $x$

$$I(x) = I_0 (\operatorname{sinc} u)^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi a x}{\lambda f}. \quad (5.26)$$

Cette fonction a été étudiée en détail dans la section 5.4.2. L'éclairement est maximum sur l'image géométrique  $F$  de la source (en  $x = 0$ ). La figure de diffraction s'étale dans la direction  $Fx$  de la petite dimension de la fente (cf. figure 5.11). L'éclairement est nul pour  $u = m\pi$  soit  $x_m = \frac{m\lambda f}{a}$  ( $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ ). On caractérise l'étalement de la figure par la demi-largeur  $\delta x = (x_1 - x_{-1})/2$  de la tache centrale

$$\delta x = \frac{\lambda f}{a}. \quad (5.27)$$

En termes de l'angle de diffraction  $\theta = x/f$ , cette demi-largeur est  $\delta\theta = \delta x/f$  soit

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{a}. \quad (5.28)$$

La tache centrale est deux fois plus large que les taches secondaires. Elle est aussi beaucoup plus lumineuse puisque environ 90 % de la puissance lumineuse y est concentrée. L'équation (5.28) signifie que la largeur angulaire de la tache de diffraction est d'autant plus grande que

- l'ouverture est étroite ;



– la longueur d’onde est grande.

Ces propriétés s’appliquent à toute forme d’ouverture et tout type d’onde, la formule (5.28) donnant l’ordre de grandeur correct. Ainsi pour une onde acoustique  $\nu \sim 100$  Hz,  $\lambda \sim 3$  m et une ouverture de largeur  $a = 1$  m, la relation donne  $\delta\theta \sim 3$ , ce qui signifie que l’onde est diffractée dans toutes les directions.

### 5.4.5 Interprétation physique du premier minimum

L’amplitude au point  $M \in Fx$  d’abscisse  $x_1 = \frac{\lambda f}{a}$  est la résultante des ondelettes diffractées dans la direction  $\vec{u}$  du plan  $OXz$  faisant l’angle  $\theta_1 = \lambda/a$  avec  $Oz$  (cf. figure 5.12). Considérons les sources secondaires  $P$  et  $P'$  respectivement de coordonnées  $(X, Y)$  et  $(X - a/2, Y)$  dans le référentiel  $OXY$  (avec  $X \in [0, a/2]$ ). La différence de marche entre les ondelettes  $PM$  et  $P'M$  issues de ces sources est  $n\overline{P'H} = n\theta_1 a/2 = \lambda_0/2$ . Ces ondelettes sont donc en opposition de phase et la somme de leurs amplitudes est nulle. Faisant varier  $X$  de 0 à  $a/2$  et  $Y$  de  $-b/2$  à  $b/2$ , les points  $P$  et  $P'$  parcourent l’ensemble des sources secondaires. On retrouve ainsi que l’amplitude totale au point  $M$  est nulle.

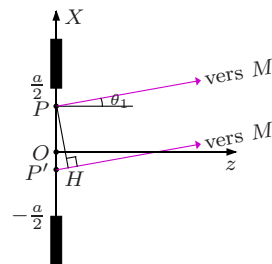


FIG. 5.12 – Interprétation du premier minimum.

### 5.4.6 Figure de diffraction d’un rectangle

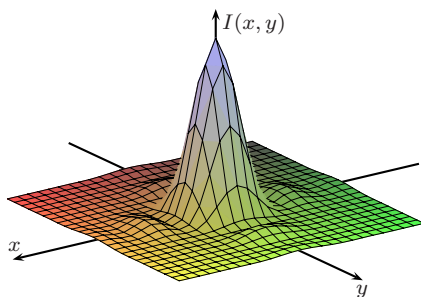


FIG. 5.13.

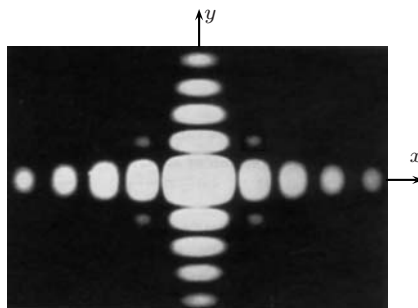


FIG. 5.14.

FIG. 5.13 – Représentation 3D de l’éclairement  $I(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  (diffraction d’un rectangle).

FIG. 5.14 – Figure de diffraction d’un rectangle [6].

L’éclairement dans le cas général du rectangle (cf. figure 5.7) est donné par l’équation (5.23) et représenté sur la figure 5.13. L’éclairement est le produit des fonctions (5.26) et (5.25), ce qui permet d’en déduire facilement les propriétés de la figure de diffraction du rectangle (cf. figure 5.14).

- l’éclairement est maximum en  $F$ , l’image géométrique de la source ;
- l’éclairement est nul sur les droites d’équations  $x = \frac{m\lambda f}{a}$  et  $y = \frac{m\lambda f}{b}$  ( $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ ) ;
- 81 % =  $(90 \%)^2$  de la puissance lumineuse est concentrée dans la tache centrale ;

– les demi-largeurs de la tache centrale sont

$$\boxed{\delta x = \frac{\lambda f}{a} \quad \text{et} \quad \delta y = \frac{\lambda f}{b}} \quad (5.29)$$

ou, en termes angulaires,

$$\boxed{\delta\theta_x = \frac{\delta x}{f} = \frac{\lambda}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta\theta_y = \frac{\delta y}{f} = \frac{\lambda}{b}} ; \quad (5.30)$$

– la tache centrale est plus étalée dans la direction où le rectangle est plus étroit.

## 5.5 Figure de diffraction des fentes d'Young (ou bifente)

FIG. 5.15 – Fentes d'Young.

FIG. 5.16 – Éclairement de l'écran en fonction de  $x$  (fentes d'Young). L'interfrange est  $i = \lambda f/s$  et la demi-largeur de la tache de diffraction d'une fente est  $L = \lambda f/a$ .

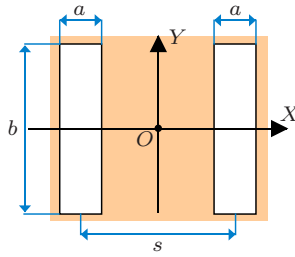


FIG. 5.15.

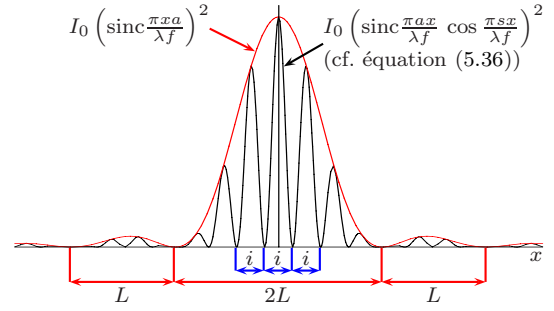


FIG. 5.16.

Pour les fentes d'Young, ou **bifente** (cf. figure 5.15), la fonction transparence est

$$\tau_b(X, Y) = \tau_r(X - \frac{s}{2}, Y) + \tau_r(X + \frac{s}{2}, Y) \quad (5.31)$$

où  $\tau_r(X, Y)$  est la la fonction transparence d'un rectangle donnée par l'équation (5.19). Sa transformée de Fourier, définie par l'équation (5.17), est

$$\hat{\tau}_b(x, y) = J_+ + J_- \quad \text{où} \quad J_{\pm} = \iint_{\mathbb{R}^2} dX dY \tau_r(X \pm \frac{s}{2}, Y) e^{ik(xX+yY)/f}. \quad (5.32)$$

En effectuant le changement de variable  $X' = X \pm \frac{s}{2}$  on obtient

$$J_{\pm} = e^{\mp ikxs/2f} \iint_{\mathbb{R}^2} dX' dY \tau_r(X', Y) e^{ik(xX'+yY)/f} = e^{\mp ikxs/2f} \hat{\tau}_r(x, y) \quad (5.33)$$

où l'expression de  $\hat{\tau}_r(x, y)$  est donnée par l'équation (5.22). On en déduit

$$\hat{\tau}_b(x, y) = 2ab \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} \cos \frac{\pi sx}{\lambda f} \quad (5.34)$$

et l'éclairement

$$I(x, y) = I_0 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} \right)^2 \left( \cos \frac{\pi sx}{\lambda f} \right)^2. \quad (5.35)$$

Nous supposons que les fentes d'Young sont fines ( $a \ll b$ ). Comme dans la section 5.4.4, il en résulte que l'éclairement est réparti le long de l'axe  $Fx$  et donné par

$$I(x) = I_0 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 \left( \cos \frac{\pi sx}{\lambda f} \right)^2. \quad (5.36)$$

L'éclairement  $I(x)$ , représenté sur la figure 5.16, est la fonction

$$I_1(x) = \left( \cos \frac{\pi sx}{\lambda f} \right)^2 \quad (5.37)$$

modulée par la fonction (5.26) caractérisant la diffraction de Fraunhofer d'une fente fine. La fonction  $I_1(x)$  correspond aux interférences de deux trous d'Young, distants de  $s$ , observées à l'infini. Le point d'abscisse  $x$  sur l'axe  $Fx$  correspond à une direction faisant l'angle  $\theta = x/f$  avec l'axe  $Oz$ . L'expression (5.37) est en accord avec l'équation (4.44) dans laquelle le point d'abscisse  $x$  correspond à l'angle  $\theta = x/D$ .

## 5.6 Figure de diffraction d'une ouverture circulaire

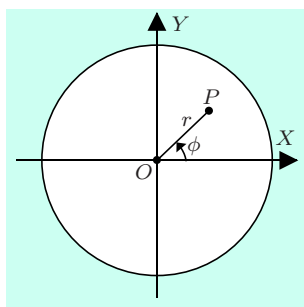


FIG. 5.17.

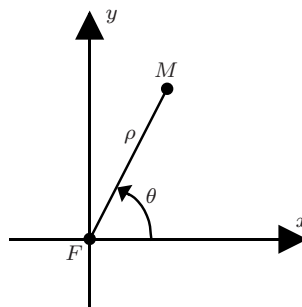


FIG. 5.18.

FIG. 5.17 – Ouverture circulaire de rayon  $R$ . Coordonnées polaires  $(r, \phi)$  du plan  $OXY$ .

FIG. 5.18 – Écran d'observation. Coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  du plan  $Fxy$ .

Pour une ouverture circulaire il est commode d'utiliser des coordonnées polaires (cf. figures 5.17 et 5.18). L'éclairement au point  $M$  de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  ne dépend pas de l'angle polaire  $\theta$  par suite de la symétrie du système autour de l'axe optique.

Introduisons les coordonnées polaires  $(r, \phi)$  du point  $P$  de l'ouverture. On a

$$xX + yY = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FM} = \rho r \cos(\phi - \theta). \quad (5.38)$$

Pour l'ouverture circulaire de rayon  $R$ , l'équation (5.17) donne  $\hat{\tau}(M) = \hat{\tau}(x, y) = \hat{\tau}(\rho)$  qui ne dépend que de  $\rho$  :

$$\hat{\tau}(\rho) = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik\rho r \cos(\phi-\theta)/f} = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik\rho r \cos(\phi)/f}. \quad (5.39)$$

L'intégrale s'exprime à l'aide des fonctions de **Bessel**<sup>3</sup>  $J_m(u)$  de 1<sup>re</sup> espèce d'ordre  $m$  ( $m \in \mathbb{Z}^*$  est un entier positif ou nul). La valeur de  $J_m(u)$ , qui est réelle pour  $u \in \mathbb{R}$  est définie par l'intégrale :

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m\phi + u \cos \phi)}. \quad (5.40)$$

Les fonctions de Bessel vérifient la relation

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}, \quad (m \in \mathbb{Z}^+). \quad (5.41)$$

Elles sont représentées sur la figure 5.19 pour  $m = 0, 1, 2$  et 3.

FIG. 5.19 – Fonctions de Bessel  $J_m(x)$  ( $m = 0, 1, 2$  et 3).

FIG. 5.20 – La courbe

$$y = \frac{2J_1(u)}{u}.$$

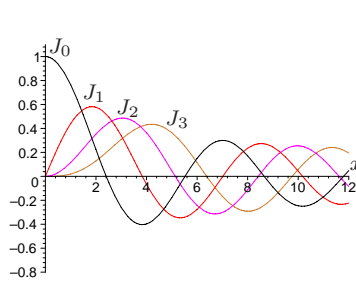


FIG. 5.19.

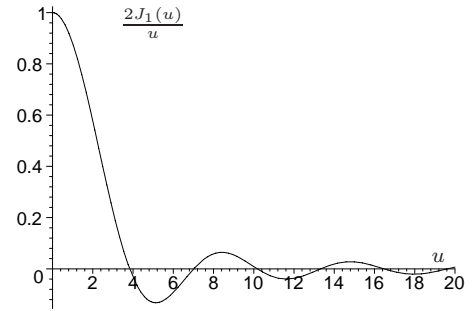


FIG. 5.20.

L'intégrale sur  $\phi$  dans (5.39) fait apparaître  $J_0$  :

$$\hat{\tau}(\rho) = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi e^{i2\pi\rho r \cos(\phi)/f\lambda} = 2\pi \int_0^R r dr J_0\left(\frac{2\pi\rho r}{f\lambda}\right). \quad (5.42)$$

D'après (5.41)

$$\frac{d}{dr} \left[ r J_1\left(\frac{2\pi\rho r}{f\lambda}\right) \right] = \frac{2\pi\rho r}{f\lambda} J_0\left(\frac{2\pi\rho r}{f\lambda}\right). \quad (5.43)$$

Portant dans (5.42) on obtient

$$\hat{\tau}(\rho) = \frac{f\lambda}{\rho} \int_0^R dr \frac{d}{dr} \left[ r J_1\left(\frac{2\pi\rho r}{f\lambda}\right) \right] = \frac{f\lambda}{\rho} R J_1\left(\frac{2\pi\rho R}{f\lambda}\right) = \pi R^2 \frac{2J_1(u)}{u} \quad (5.44)$$

3. Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

où

$$u = \frac{2\pi R\rho}{f\lambda}. \tag{5.45}$$

On en déduit la **formule d’Airy**<sup>4</sup> qui donne la répartition de l’éclairement pour la diffraction d’une ouverture circulaire de diamètre  $D = 2R$  :

$$I(\rho) = I_0 \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi D\rho}{f\lambda}. \tag{5.46}$$

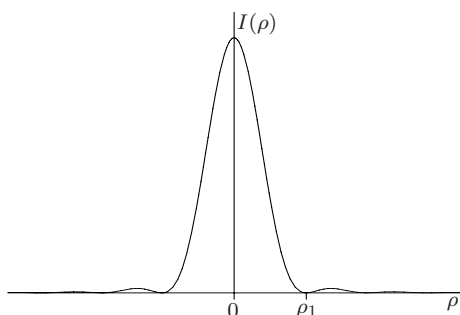


FIG. 5.21.

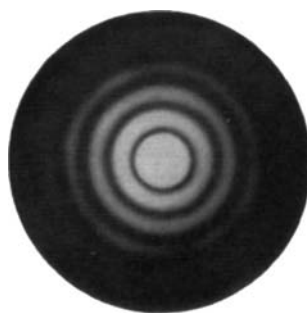


FIG. 5.22.

FIG. 5.21 – Éclairement  $I(\rho)$  pour la diffraction d’une ouverture circulaire.

La courbe tracée pour des valeurs positives et négatives de  $\rho$  représente l’éclairement le long d’une droite passant par  $F$ .

FIG. 5.22 – Figure de diffraction d’une ouverture circulaire [7].

La courbe  $y = \frac{2J_1(u)}{u}$  est tracée sur la figure 5.20. On en déduit l’allure

de la **fonction d’Airy**  $f(u) = \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2$  et de  $I(\rho)$  (cf. figure 5.21). La table 5.2 donne, en plus du maximum principal  $f(0) = 1$  en  $u = 0$ , les premiers extremums de la fonction d’Airy. Voici quelques propriétés de la figure de diffraction de l’ouverture circulaire (cf. figure 5.22) :

- l’éclairement est maximum en  $F$ , l’image géométrique de la source ;
- au premier zéro  $u \approx 3,832$  de la fonction d’Airy correspond un cercle d’éclairement nul de rayon

$$\rho_1 = \frac{3,832 f\lambda}{\pi D} = \frac{1,22 f\lambda}{D} \tag{5.47}$$

qui correspond à un rayon angulaire

$$\theta_1 = \frac{\rho_1}{f} = \frac{1,22 \lambda}{D}; \tag{5.48}$$

- 84 % de la puissance lumineuse est concentrée dans la tache centrale  $\rho \leq \rho_1$  qui est appelée **disque d’Airy** ;
- le rayon  $\rho_1$  du disque d’Airy est inversement proportionnel au diamètre  $D$  de l’ouverture ;
- aux minima suivants de la fonction d’Airy correspondent des cercles concentriques d’éclairement nul ; ces cercles délimitent les **anneaux d’Airy** dont les éclairements diminuent rapidement avec le rayon.

$u$	$f(u)$
0	1
3,83	0
5,14	0,0174
7,02	0
8,42	0,0042
10,17	0

TAB. 5.2 – Premiers maxima et minima (= 0) de la fonction d’Airy

$$f(u) = \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2.$$

4. George Biddell Airy (1801-1892)

## 5.7 Le rôle de la diffraction dans les instruments d'optique

Dans un instrument d'optique, les rayons sont limités latéralement du fait que les lentilles et miroirs sont de taille finie. Pour un système à symétrie axiale, cela équivaut à la présence d'un diaphragme circulaire de diamètre  $D$ . On se trouve dans la situation de la diffraction par une ouverture circulaire étudiée dans la section précédente. L'image d'un point lumineux n'est pas ponctuelle, même si l'instrument est sans aberrations, mais forme une figure de diffraction (disque et anneaux d'Airy).

Si l'objet examiné dans l'instrument est formé de deux points lumineux  $E$  et  $E'$ , mutuellement incohérents, on obtient dans le plan focal image deux taches de diffraction centrées sur les images géométriques  $I$  et  $I'$  des deux sources. Cet étalement des images peut rendre difficile l'observation des deux points. On considère généralement que

deux images  $I$  et  $I'$  peuvent être distinguées si leur distance est plus grande que le rayon du disque d'Airy.

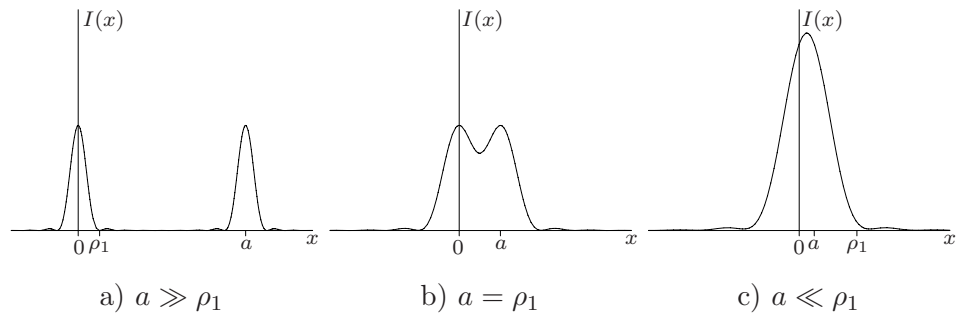
(5.49)

Cette condition est un cas particulier du **critère de Rayleigh**<sup>5</sup>, qui dit

deux images peuvent être distinguées si le maximum de l'une des taches de diffraction coïncide avec le bord de la tache principale de l'autre.

(5.50)

FIG. 5.23 – Éclairement  $I(x)$  le long de l'axe  $Ox$  joignant les deux images distantes de  $a$ . Le rayon du disque d'Airy est  $\rho_1$ .



La figure 5.23 illustre le critère de Rayleigh en représentant l'éclairement de l'écran d'observation le long de l'axe joignant les deux images géométrique  $I$  et  $I'$  distantes de  $a$ . Les éclairements de leurs deux figures de diffraction, décalées de  $a$  et supposées identiques, s'ajoutent (sources incohérentes et de même puissance lumineuse). Les photographies 5.24 et 5.25 représentent les images de deux points sources de même puissance et incohérents.

Le critère de Rayleigh s'applique lorsque les éclairements des deux images sont du même ordre de grandeur. Lorsque les éclairements des deux images

5. Lord John William Strutt (3rd Baron) Rayleigh (1842-1919)

sont très différentes, il se peut que la moins lumineuse soit cachée dans les anneaux d'Airy de la plus lumineuse.

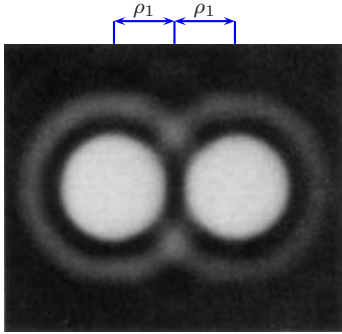


FIG. 5.24.

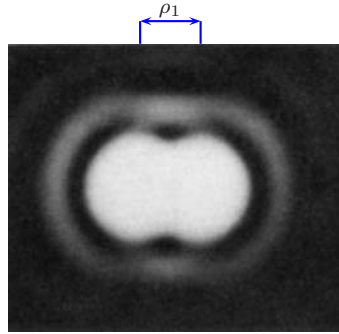


FIG. 5.25.

FIG. 5.24 – Images de deux points sources avec les cercles d'Airy tangents ( $a = 2\rho_1$ ) [8].

FIG. 5.25 – Images de deux points sources qui sont tout juste résolus d'après le critère de Rayleigh ( $a = \rho_1$ ) [8].

### 5.7.1 Pouvoir séparateur d'une lunette astronomique

Nous considérons dans cette section le cas où l'instrument est une lunette astronomique,  $E$  et  $E'$  étant deux étoiles de même magnitude. La figure 5.26 représente une lentille mince convergente de diamètre  $D$  et distance focale  $f$  qui schématise l'objectif  $L$  de la lunette (pour diminuer les aberrations, l'objectif comporte plus souvent deux ou trois lentilles). La lunette comporte de plus un oculaire non représenté. Tous les rayons pouvant la traverser passent à l'intérieur de deux cercles, appelés **pupille d'entrée** et **pupille de sortie**. On construit la lunette de sorte que la pupille d'entrée soit le bord de  $L$ . Il serait absurde que la pupille d'entrée soit de diamètre inférieur à  $D$ , car l'objectif, qui est la partie optique la plus coûteuse de l'instrument, serait alors partiellement inutilisé. Les rayons lumineux sont ainsi limités latéralement de la même façon que si un diaphragme circulaire de diamètre  $D$  était placé devant l'objectif.

Le système de la figure 5.26 est analogue au dispositif de la figure 5.4, mais il n'y a pas de lentille d'entrée  $L'$  puisqu'on observe des objets à l'infini, les étoiles  $E$  et  $E'$ . Soit  $\theta$  l'angle entre les directions de  $E$  et  $E'$ . Les images géométriques  $I$  et  $I'$  des étoiles, situées dans le plan focal image de  $L$ , sont distantes de

$$a = f\theta. \tag{5.51}$$

Chaque étoile produit séparément une tache de diffraction centrée sur son image et comportant un disque d'Airy de rayon donné par l'équation (5.47) :

$$\rho_1 = \frac{1,22 f\lambda}{D}. \tag{5.52}$$

D'après le critère de Rayleigh, les images sont séparées si

$$a \geq \rho_1 \quad \text{soit} \quad \theta \geq \frac{1,22 \lambda}{D}. \tag{5.53}$$

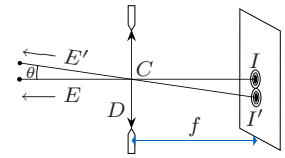


FIG. 5.26 – Observation de deux étoiles  $E$  et  $E'$ .

La limite de **résolution angulaire** de la lunette est donc

$$\Delta\theta = \frac{1,22 \lambda}{D}. \quad (5.54)$$

La table 5.3 donne des exemples numériques. La formule (5.54) s'applique aussi à l'œil humain (le diamètre  $D$  de l'iris est variable avec l'éclairement ; la valeur dans la table correspond à un temps ensoleillé) et aux télescopes ( $D$  étant le diamètre du miroir concave).

TAB. 5.3 – Limites de résolution angulaire.  
 $1'' = 4,85 \cdot 10^{-6}$  rad.

instrument	$D$	$\lambda$	$\Delta\theta$
lunette	14 cm	550 nm	$1''$
télescope (Mt Palomar)	5 m	550 nm	$(2,7 \cdot 10^{-2})''$
radiotélescope (Jodrell Bank)	75 m	21 cm	$700''$
œil humain	2 mm	550 nm	$70''$

De façon très générale, désignant par  $\Delta\theta$  le pouvoir de résolution angulaire d'un appareil émetteur ou récepteur d'ondes de type quelconque de diamètre  $D$  on aura, en ordre de grandeur,

$$\Delta\theta \gtrsim \frac{\lambda}{D}. \quad (5.55)$$

Par exemple, si on désire construire un radar fonctionnant à la longueur d'onde  $\lambda = 1$  cm et pouvant mesurer à 10 m près la position d'un avion distant de 10 km, le radar doit avoir une résolution angulaire de  $\Delta\theta = 10^{-3}$ . Le diamètre de son antenne doit au moins être  $D \sim \lambda/\Delta\theta = 10$  m.

On peut augmenter le **pouvoir de résolution angulaire** (on dit aussi **pouvoir séparateur**) d'un instrument optique

- en augmentant  $D$  ;
- en diminuant  $\lambda$  (le microscope électronique utilise des électrons dont la longueur d'onde de de Broglie<sup>6</sup> est 10 000 fois plus petite que pour la lumière).

Pour l'observation des étoiles, la turbulence atmosphérique produit un étalement des images qui limite de résolution angulaire à environ  $1''$ . Le pouvoir séparateur du télescope de Mont Palomar ( $D = 5$  m) n'est pas meilleur que celui d'une lunette de  $D = 15$  cm, mais l'image donnée par le grand télescope est beaucoup plus lumineuse.

Il existe toutefois des méthodes pour s'affranchir de la turbulence atmosphérique. Une solution radicale est le télescope spatial Hubble<sup>7</sup>, de 240 cm d'ouverture, qui est placé sur une orbite circulaire à 610 km d'altitude. Il a une très haute limite de résolution angulaire ( $\Delta\theta = 0,06''$  pour  $\lambda = 550$  nm) qui n'est pas limitée par la turbulence atmosphérique.

6. Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987)

7. Edwin Powell Hubble (1889-1953)



## 5.8 Relations d'incertitude

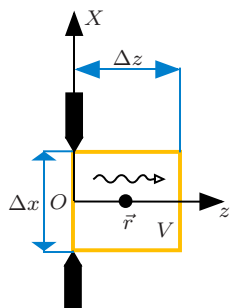


FIG. 5.27.

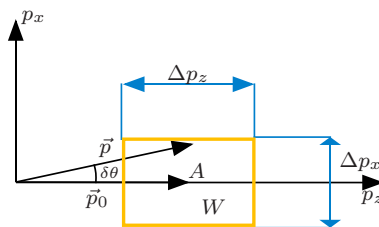


FIG. 5.28.

FIG. 5.27 – Incertitude sur la position du photon.

FIG. 5.28 – Incertitude sur la quantité de mouvement du photon.

Nous considérons le passage d'un photon à travers l'ouverture rectangulaire de la figure 5.7. Le photon est assimilé à un train d'ondes qui occupe un volume  $V$  à l'instant  $t$  où le photon vient de franchir l'ouverture. Nous notons les dimensions de ce volume  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  (cf. figure 5.27). Les dimensions  $\Delta x = a$  et  $\Delta y = b$  sont celles de l'ouverture rectangulaire et  $\Delta z = l$  est la longueur de cohérence (cf. section 2.3.1 et figure 2.10). A l'instant  $t$ , nous ne pouvons pas dire à quel endroit précis se trouve le photon. Nous savons seulement qu'il se trouve dans le volume  $V$ . Les grandeurs  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont les **incertitudes** sur la position du photon.

Le train d'ondes associé au photon, donné par l'équation (2.4), correspond à une onde plane de vecteur d'onde (on se place dans le vide :  $n = 1$ )

$$\vec{k}_0 = \frac{2\pi\nu_0}{c}\vec{u}_z = 2\pi\sigma_0\vec{u}_z. \quad (5.56)$$

La quantité de mouvement du photon est

$$\vec{p}_0 = \frac{h\vec{k}_0}{2\pi} = h\sigma_0\vec{u}_z = \frac{h}{\lambda_0}\vec{u}_z \quad (5.57)$$

où  $h$  est la constante de Planck.

Par suite de la largeur spectrale de la lumière, il y a une incertitude  $\Delta\sigma$  sur le nombre d'onde  $\sigma_0$  donnée par l'équation (2.8) :

$$\Delta\sigma \sim \frac{1}{\Delta z} \quad (5.58)$$

et une incertitude

$$\Delta p_z \sim h\Delta\sigma \sim \frac{h}{\Delta z} \quad (5.59)$$

sur la composante  $z$  de la quantité de mouvement du photon.

Par suite de la diffraction par l'ouverture rectangulaire, la quantité de mouvement du photon (ou le vecteur d'onde) n'est pas exactement parallèle à l'axe  $Oz$ . Ainsi, dans le plan  $OXz$ , il en résulte une incertitude  $\Delta p_x$  sur la

composante  $x$  de la quantité de mouvement du photon (cf. figure 5.28) qui correspond à la largeur angulaire du pic de diffraction (supposée très petite par rapport à 1)

$$\delta\theta_x \approx \text{tg}(\delta\theta_x) \sim \frac{\Delta p_x}{p_0}. \quad (5.60)$$

L'équation (5.30) donne l'estimation  $\delta\theta_x = \lambda_0/a$ . On en déduit

$$\Delta p_x \sim p_0 \delta\theta_x = \frac{p_0 \lambda_0}{a} \quad (5.61)$$

soit, d'après (5.57) et  $\Delta x = a$ ,

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x}. \quad (5.62)$$

De façon analogue l'incertitude  $\Delta p_y$  sur la composante  $y$  de la quantité de mouvement du photon est donnée par

$$\Delta p_y \sim \frac{h}{\Delta y}. \quad (5.63)$$

Il se peut aussi que les incertitudes soient plus grandes que ce qu'indiquent les équations (5.59), (5.62) et (5.63). On a les inégalités

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \gtrsim h, \quad \Delta y \Delta p_y \gtrsim h, \quad \Delta z \Delta p_z \gtrsim h,} \quad (5.64)$$

qui sont appelées **relations d'incertitude de Heisenberg**<sup>8</sup>. Elles constituent des relations importantes de la mécanique quantique qui s'appliquent à toutes les particules et pas seulement au photon. Elles ont pour conséquence qu'il est impossible de connaître parfaitement à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule. Voici deux exemples.

- Si l'état d'un photon est tel qu'il n'y a aucune incertitude sur sa quantité de mouvement ( $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$ ), alors l'incertitude sur sa position est infinie ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \infty$ ). Un tel état correspond à une onde plane définie dans tout l'espace.
- Si un électron est parfaitement localisé en un point donné ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ), alors l'incertitude sur sa quantité de mouvement est infinie ( $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \infty$ ).

---

8. Werner Karl Heisenberg (1901-1976)

## 6

## Réseaux

## 6.1 Définition

**Définition 6.1 (réseau).** Un **réseau** est un objet diffractant périodique. La période  $s$  est appelée le **pas** du réseau. L'objet s'obtient par  $N$  répétitions du **motif** du réseau.

Nous supposons que le réseau est un objet de faible épaisseur situé dans le plan  $OXY$ . Un motif du réseau correspond à un rectangle de hauteur  $s$  ( $0 \leq X \leq s$ ). Si le réseau était infini ( $N = \infty$ ) la translation de  $s\vec{u}_X$  ( $\vec{u}_X$  étant un vecteur unitaire parallèle à l'axe  $OX$ ) laisserait le réseau invariant.

On décrit habituellement un réseau par son nombre de motifs par millimètre qui est typiquement de 50 à 5000 ( $s$  de  $20 \mu\text{m}$  à  $0,2 \mu\text{m}$ ) et sa largeur  $L = Ns$  qui est de l'ordre de quelques centimètres. Le nombre  $N$  est couramment de l'ordre de  $10^5$ .

Le réseau le plus simple s'obtient en perceant dans un écran opaque  $N$  trous très petits alignés sur la droite  $OX$ , la distance entre deux trous voisins étant  $s$ . Des réseaux de ce type furent construits par Young. Ils généralisent le système des trous d'Young (qui correspond au cas  $N = 2$ ). Les trous peuvent être remplacés par des fentes fines parallèles à  $OY$  comme dans l'expérience des fentes d'Young (cf. figure 6.3).

Des réseaux très performants furent réalisés par Rowland<sup>1</sup> en traçant des traits équidistants sur des lames de verre. Il existe de nombreux types de réseaux fonctionnant par transmission ou réflexion (cf. figure 6.1).

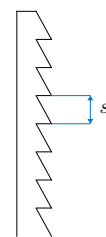


FIG. 6.1 – Réseau échellette par réflexion.

## 6.2 La fonction réseau

Dans cette section, nous étudions mathématiquement la somme

$$S(\phi) = 1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi} + \dots + e^{i(N-1)\phi}. \quad (6.1)$$

1. Henry Augustus Rowland (1848-1901)

qui intervient dans la théorie des réseaux. Cette somme donne l'amplitude complexe résultante de la superposition des  $N$  ondes d'amplitudes complexes  $A_m = e^{im\phi}$  ( $m = 0, 1, \dots, N-1$ ). Ces ondes ont la même amplitude réelle, le déphasage entre les ondes  $m$  et  $m+1$  étant égal à  $\phi$ . La somme est une progression géométrique de raison  $r = e^{i\phi}$  qui s'exprime sous la forme

$$S(\phi) = 1 + r + r^2 + \dots + r^{(N-1)} = \frac{1 - r^N}{1 - r} = \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = e^{i(N-1)\phi/2} \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = e^{i(N-1)\phi/2} \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}. \quad (6.2)$$

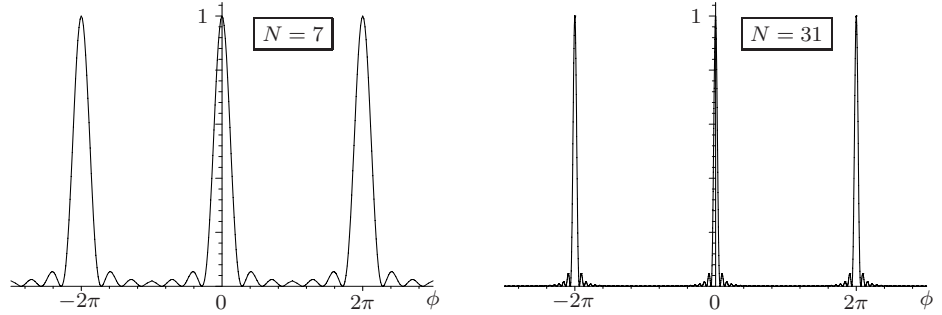
On appelle **fonction réseau** la fonction  $R(\phi) = |S(\phi)|^2$  soit

$$R(\phi) = \left( \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2. \quad (6.3)$$

FIG. 6.2 – La fonction réseau normalisée à 1,

$$\frac{R(\phi)}{N^2} = \left( \frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2,$$

pour  $N = 7$  et  $N = 31$ .



Voici quelques propriétés de la fonction réseau qui est représentée après normalisation à 1 sur la figure 6.2 pour deux valeurs de  $N$ .

- La fonction réseau est paire et périodique de période  $2\pi$  en  $\phi$ .
- Pour  $\phi = 2\pi p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ), le calcul (6.2) n'est pas correct. On calcule directement que dans ce cas  $S(2\pi p) = N$  et  $R(2\pi p) = N^2$ . Pour toute autre valeur de  $\phi$ , l'inégalité triangulaire appliquée à la somme (6.1) donne

$$|S(\phi)| < 1 + |e^{i\phi}| + |e^{i2\phi}| + \dots + |e^{i(N-1)\phi}| = N \quad \text{d'où} \quad R(\phi) < N^2. \quad (6.4)$$

Les maxima principaux de la fonction réseau se trouvent donc en  $\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Leur valeur s'obtient aussi par continuité de la fonction réseau en  $\phi = 0$ :

$$R(0) = \lim_{\phi \rightarrow 0} R(\phi) = N^2. \quad (6.5)$$

- Les minima de la fonction réseau sont nuls et situés en  $\phi = \frac{2n\pi}{N}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $n$  non multiple entier de  $N$ . Entre deux maxima principaux consécutifs, par exemple en  $\phi = 0$  et  $\phi = 2\pi$ , il y a  $N - 1$  minima.
- Entre les deux minima  $\phi = \frac{2n\pi}{N}$  et  $\phi = \frac{2(n+1)\pi}{N}$  il existe un maximum secondaire dont la position et la valeur sont approximativement

$$\phi \approx \frac{(2n+1)\pi}{N} \quad \text{et} \quad R \approx \frac{1}{\left(\sin \frac{(2n+1)\pi}{2N}\right)^2}. \quad (6.6)$$

- Pour  $n = 1$  dans l'équation (6.6) on obtient le plus grand maximum secondaire. En général  $N \gg 1$  et sa valeur est approximativement

$$R \approx \left(\frac{2N}{3\pi}\right)^2 \approx 0,045N^2. \quad (6.7)$$

- Les maxima secondaires correspondant à  $n = 1, 2, \dots, \lfloor (N-1)/2 \rfloor$  ( $\phi$  est alors entre 0 et  $\pi$ ) sont de valeurs décroissantes.

Du point de vue des applications physiques, il faut retenir que pour  $N \gg 1$  la fonction réseau est formée de pics très fins (les maxima principaux), obtenus pour

$$\phi = 2\pi p \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (6.8)$$

L'entier  $p$  qui désigne ces maxima est appelé **ordre**. C'est en effet l'ordre d'interférence entre les ondes successives  $m$  et  $m+1$ . La largeur d'un de ces pics principaux est de l'ordre de

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N} \quad (6.9)$$

qui est la moitié de la distance entre les minima qui l'encadrent. La largeur relative des pics, c'est-à-dire leur largeur divisée par l'écart  $2\pi$  entre deux pics principaux successifs est

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{1}{N} \quad (\text{largeur relative}). \quad (6.10)$$

Les maxima secondaires sont très serrés, beaucoup plus petits que les maxima principaux et en général inobservables expérimentalement.

### 6.3 Réseau de fentes

Nous étudions un réseau de  $N$  fentes numérotées par les entiers  $m = m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + N - 1$  avec  $m_1 = -\lfloor N/2 \rfloor$  (cf. figure 6.3). Les fentes (rectangles de dimensions  $a \times b$ ), très fines ( $a \ll b$ ), sont découpées dans un écran opaque formant le plan  $OXY$ . Leur grande dimension  $b$  est parallèle à

l'axe  $OY$ . Le centre de la fente numéro  $m$  est située sur l'axe  $OX$  à l'abscisse  $X = ms$ .

La figure 6.4 représente un plan de **section principale** du réseau, c'est-à-dire un plan orthogonal à  $OY$ . L'axe  $Oz$  est normal au plan du réseau. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique dont le vecteur d'onde  $\vec{k}_i = k\vec{u}_i$  est orthogonal à  $OY$  et fait l'angle  $i$  avec l'axe  $Oz$ .

Chaque fente diffracte l'onde incidente et se comporte comme une source secondaire. On observe les interférences des ondes diffractées à l'infini dans la direction  $\vec{u}$  faisant l'angle  $r$  avec l'axe  $Oz$ . Nous ne supposons pas que les angles  $i$  et  $r$  sont petits. Le montage est analogue au dispositif de la figure 5.4, excepté que les axes optiques des lentilles convergentes  $L'$  et  $L$  sont inclinés par rapport à l'axe  $Oz$  pour travailler dans les conditions de Gauss.

L'onde plane incidente provient d'une source ponctuelle  $S$  placée au foyer objet de la **lentille collimatrice**  $L'$ , et l'observation se fait au point  $M$  dans le plan focal objet de la lentille  $L$ . De façon analogue au cas des fentes d'Young (cf. section 5.5), la lumière diffractée se répartit le long de l'axe  $Fx$ , intersection du plan de section principale passant par  $S$  et du plan focal objet de la lentille  $L$ .

FIG. 6.3 – Réseau de fentes.

FIG. 6.4 – Diffraction par un réseau de fentes.

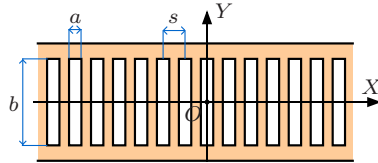


FIG. 6.3.

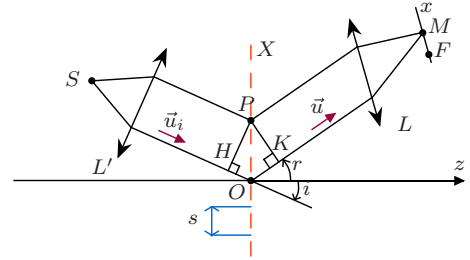


FIG. 6.4.

### 6.3.1 Calcul des interférences des $N$ ondes

Soient  $O$  et  $P$  les fentes numéros 0 et  $m$  du réseau. Elles sont distantes de  $ms$ . La différence de marche des ondes qui traversent ces deux fentes est donnée par l'équation (5.10)

$$[SPM] - [SOM] = n(\overline{OH} + \overline{KO}) = nms(\sin i - \sin r). \quad (6.11)$$

Sur la figure 6.4,  $i < 0$ ,  $r > 0$ ,  $\overline{OH} < 0$  et  $\overline{KO} < 0$ . Désignons par  $Ae^{i\phi_m}$  l'amplitude complexe en  $M$  de l'onde qui a suivi le trajet  $[SPM]$  à travers la fente numéro  $m$ . L'amplitude réelle  $A$  est la même pour toutes les fentes (fentes identiques). D'après l'équation (1.52), la phase  $\phi_m$  de cette onde est

$$\phi_m = -\frac{2\pi}{\lambda_0}[SPM] + \phi(S) = \frac{2\pi nms}{\lambda_0}(\sin r - \sin i) - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SOM] + \phi(S) = m\phi + C \quad (6.12)$$

où  $C$  ne dépend pas de  $m$  et où

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi s}{\lambda}(\sin r - \sin i)} \quad (6.13)$$

est la différence de phase  $\phi_m - \phi_{m-1}$  entre les ondes qui passent à travers deux fentes consécutives  $m$  et  $m-1$ . Cette différence de phase s'écrit aussi  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$  en fonction de la différence de marche

$$\boxed{\delta = ns(\sin r - \sin i)} \quad (6.14)$$

des ondes qui traversent deux fentes consécutives.

L'amplitude complexe résultant de la superposition des  $N$  ondelettes est la somme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{m=m_1}^{m_1+N-1} Ae^{i\phi_m} = \sum_{m=m_1}^{m_1+N-1} Ae^{i(m\phi+C)} = \\ & Ae^{i(m_1\phi+C)} \underbrace{[1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi} + \dots + e^{i(N-1)\phi}]}_{S(\phi)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'éclairement de l'écran d'observation en  $M \in Fx$  est proportionnel à  $|\mathcal{A}|^2$  et donc de la forme

$$I = I_0 R(\phi). \quad (6.16)$$

où  $R(\phi)$  est la fonction réseau (cf. section 6.2).

### 6.3.2 Relation fondamentale et dispersion des réseaux

Pour  $N = 10^5$ , les pics de la fonction réseau sont extrêmement fins, puisque leur largeur relative (6.10) est de l'ordre de  $10^{-5}$ . On n'obtient donc des interférences constructives à l'infini que dans les directions des maxima principaux donnés par les équations (6.8) et (6.13)

$$\boxed{s(\sin r - \sin i) = p\lambda} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (6.17)$$

Cette **relation fondamentale des réseaux par transmission** s'obtient aussi en écrivant que la différence de marche (6.14) est un multiple entier de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = n\lambda$ . L'entier  $p$  est l'**ordre**. Le nombre d'ordres est limité par suite de la condition  $|\sin r| \leq 1$ . Si le réseau est éclairé en incidence normale ( $i = 0$ ) on doit avoir  $|\sin r| = |p|\lambda/s \leq 1$  soit  $p = -p_{\max}, \dots, p_{\max}$  où

$$p_{\max} = \left\lfloor \frac{s}{\lambda} \right\rfloor \quad (6.18)$$

est l'ordre maximal du réseau.

L'ordre  $p = 0$  correspond à  $r = i$ , autrement dit à un faisceau lumineux dans le prolongement de l'onde incidente.

Si  $p \neq 0$ , l'angle  $r$  dépend de la longueur d'onde. Le réseau est donc un système présentant de la **dispersion** qui, comme un prisme, permet d'analyser la composition spectrale d'une source lumineuse. Dans un ordre  $p$  donné, la valeur de  $\sin r$  pour le pic de diffraction varie de façon affine avec la longueur d'onde  $\lambda$  (cf. équation (6.17)).

## 6.4 Largeur angulaire du pic de diffraction

Le réseau étant éclairé par une source monochromatique, l'angle  $r$  du maximum du pic de diffraction dans l'ordre  $p$  est donné par l'équation (6.17) que nous récrivons sous la forme

$$\phi = 2\pi p = \frac{2\pi s}{\lambda}(\sin r - \sin i). \quad (6.19)$$

Nous avons vu (cf. équation (6.9)) que le minimum à droite de ce pic correspond à une variation de  $\phi$  de  $\Delta\phi = 2\pi/N$ . L'angle  $r'$  de ce minimum correspond à la variation  $\Delta(\sin r) = \sin r' - \sin r$  :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi s}{\lambda}\Delta(\sin r) \quad \text{soit} \quad \Delta(\sin r) = \frac{\lambda}{Ns}. \quad (6.20)$$

La demi-largeur angulaire du pic de diffraction est donnée par la différence  $\Delta r = r' - r$  qui est très petite par rapport à 1 ( $\Delta r \ll 1$ ). On a  $\Delta(\sin r) = (\Delta r) \cos r$  d'où

$$\Delta r = \frac{\lambda}{Ns \cos r}. \quad (6.21)$$

En ordre de grandeur  $\cos r \sim 1$  pour des angles  $r$  pas trop voisins de  $\pm\pi/2$ . Cela donne l'estimation de la demi-largeur angulaire du pic de diffraction :

$$\boxed{\Delta r \sim \frac{\lambda}{Ns} = \frac{\lambda}{L}}. \quad (6.22)$$

D'après l'équation (5.30), cette demi-largeur est la même que celle du pic de diffraction par une ouverture rectangulaire de largeur  $L$ . La tache de diffraction a également une demi-largeur angulaire selon  $OY$  de l'ordre de  $\lambda/b$  ( $b$  grande dimension des fentes). Les pics de diffraction d'un réseau ont pratiquement la même répartition d'éclairement que la tache de diffraction d'une ouverture rectangulaire  $b \times L$  ayant les mêmes dimensions que le réseau entier.



## 6.5 Pouvoir de résolution

Éclairons le réseau avec une source **dichromatique** qui émet deux raies monochromatiques de longueurs d'onde  $\lambda$  (violet) et  $\lambda'$  (rouge) ( $\lambda < \lambda'$ ). L'éclairement observé est la somme des éclairements de chacune des radiations. Nous l'écrivons en fonction de  $\sin r$  en utilisant les équations (6.16) et (6.13) :

$$I(\sin r) = I_0 R(\phi) + I'_0 R(\phi') \quad (6.23)$$

avec

$$\phi = \frac{2\pi s}{\lambda}(\sin r - \sin i) \quad \text{et} \quad \phi' = \frac{2\pi s}{\lambda'}(\sin r - \sin i). \quad (6.24)$$

La courbe de l'éclairement en fonction de  $\sin r$  est représentée sur la figure 6.5.

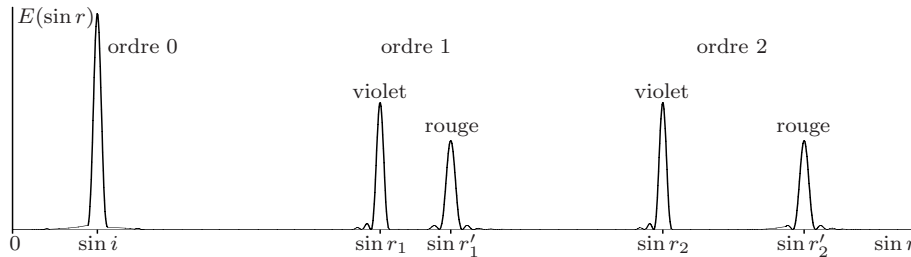


FIG. 6.5 – Dispersion du réseau.

Les angles  $r_p$  et  $r'_p$  des maxima des pics de diffraction dans l'ordre  $p$  pour les raies de longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont respectivement donnés par

$$s(\sin r_p - \sin i) = p\lambda \quad (6.25)$$

$$s(\sin r'_p - \sin i) = p\lambda' \quad (6.26)$$

Dans l'ordre  $p = 0$  les deux raies sont confondues ( $r_p = r'_p = i$ ).

Supposons maintenant que les deux longueurs d'ondes  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont très voisines. On se propose de déterminer quelle doit être la valeur minimum de  $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$  pour que les deux raies de l'ordre  $p$  (en  $r_p$  et  $r'_p$ ) puissent être distinguées. La différence  $\delta r_p = r'_p - r_p$ , supposée très petite par rapport à 1, s'obtient par différence des équations (6.25) et (6.26) :

$$p\delta\lambda = s(\sin r'_p - \sin r_p) = s(\cos r_p)\delta r_p \quad \text{soit} \quad \delta r_p = \frac{p\delta\lambda}{s \cos r_p}. \quad (6.27)$$

On considère généralement que les deux raies peuvent être distinguées si le critère de Rayleigh (5.50) est satisfait, c'est-à-dire si l'écart angulaire  $\delta r_p$  entre les deux pics est plus grand que la demi-largeur  $\Delta r$  d'un pic. D'après les équations (6.21) et (6.27), cette condition ( $\delta r_p \geq \Delta r$ ) s'écrit

$$\frac{p\delta\lambda}{s \cos r_p} \geq \frac{\lambda}{Ns \cos r_p} \quad (6.28)$$

soit, en simplifiant

$$\delta\lambda \geq \frac{\lambda}{pN}. \quad (6.29)$$

Pour illustrer le critère de Rayleigh, on a représenté les éclairissements  $I_0R(\phi)$  et  $I'_0R(\phi')$  des deux raies séparément (cf. figure 6.6) et leur somme (cf. figure 6.7) dans le cas limite  $\Delta r = \delta r_p$  où on considère les raies séparées.

Pour un spectromètre travaillant autour de la longueur d'onde  $\lambda$ ,  $\Delta\lambda$  étant le plus petit écart de longueur d'onde détectable, on appelle **pouvoir de résolution** la grandeur sans dimension

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (6.30)$$

Le **pouvoir de résolution intrinsèque** du réseau utilisé dans l'ordre  $p$  correspond à la valeur de  $\Delta\lambda = \lambda/pN$  donnée par le critère de Rayleigh :

$$\mathcal{R} = pN. \quad (6.31)$$

Le pouvoir de résolution réel du réseau est toujours plus faible que cette valeur par suite d'autres effets (le principal étant que la source  $S$  n'est pas ponctuelle).

FIG. 6.6 – Éclairissements

$I_0R(\phi)$  et  $I'_0R(\phi')$

de chacune des raies en fonction de  $r$ .

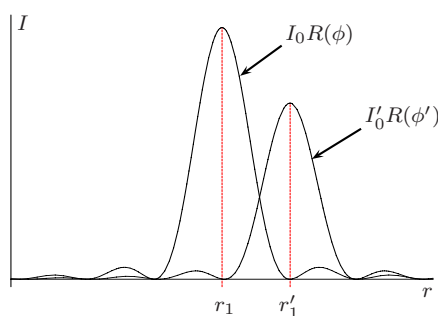


FIG. 6.6.

FIG. 6.7 – Éclairissement total

$I_0R(\phi) + I'_0R(\phi')$

en fonction de  $r$ .

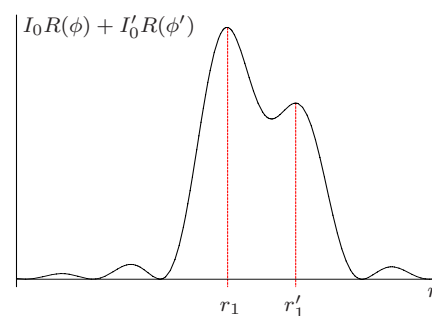
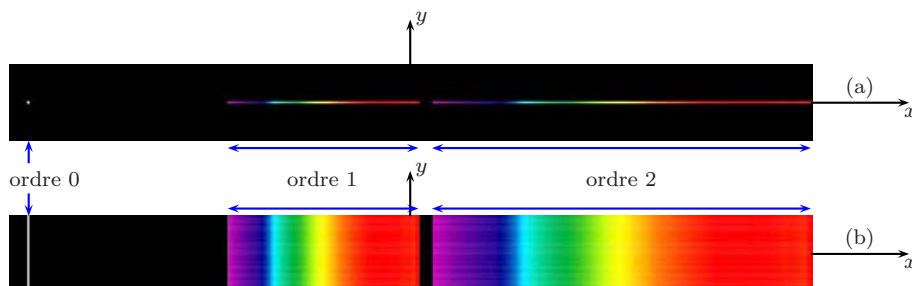


FIG. 6.7.

## 6.6 Fente source

En pratique, la source lumineuse est une fente fine placée dans le plan focal de la lentille collimatrice  $L'$  et dont la grande longueur est parallèle à  $OY$ .

FIG. 6.8 – Comparaison de l'écran d'observation pour une source ponctuelle (a) et une fente source (b) (sources de lumière blanche) [4].



La figure 6.8 représente l'aspect du plan focal objet de la lentille  $L$  lorsqu'on utilise une source de lumière blanche. Lorsque la source est ponctuelle, on obtient une répartition d'éclairement concentrée le long de l'axe  $Fx$ . Pour une fente source on observe une série d'images rectangulaires de la fente source. Ces images ont la même longueur (parallèlement à  $Fy$ ) que la fente source si les distances focales des lentilles sont égales ( $f = f'$ ).

## 6.7 Rôle du motif du réseau

Dans la théorie du réseau présentée ci-dessus nous avons considéré que chaque fente du réseau est infiniment fine. L'éclairement observé résulte alors des interférences de  $N$  ondes. Dans cette section, nous allons examiner le rôle de la largeur  $a$  des fentes. Nous supposons que la source  $S$  est monochromatique et ponctuelle, que le faisceau incident est normal au réseau ( $i = 0$ ) et nous nous limiterons à observer dans des directions telles que  $|r| \ll 1$ . Les axes des lentilles  $L'$  et  $L$  sont alignés avec  $Oz$ . Le schéma du montage est celui de la figure 5.4. Le réseau de fentes de la figure 6.3 est placé dans le plan  $OXY$  et joue le rôle de l'ouverture  $\Sigma$ .

Pour obtenir l'éclairement au point  $M$ , nous utilisons les méthodes et notations du chapitre 5. Le calcul est analogue à celui de la figure de diffraction de la bifente (cf. section 5.5).

Soit la fonction

$$\tau(X, Y) = \sum_{m=m_1}^{m_1+N-1} \tau_r(X - ms, Y) \quad \text{avec} \quad m_1 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad (6.32)$$

où  $\tau_r(X, Y)$  est la fonction transparence d'un rectangle  $a \times b$  donnée par l'équation (5.19). La fente numéro  $m$  ( $m_1 \leq m \leq m_1 + N - 1$ ) est décrite par la fonction de transparence  $\tau_r(X - ms, Y)$  qui vaut 1 si  $(X, Y)$  est un point de la fente et 0 sinon. La somme (6.32) vaut donc 1 si  $(X, Y)$  est un point d'une quelconque des  $N$  fentes et 0 sinon. C'est la fonction transparence du réseau de fente.

La transformée de Fourier de  $\tau$ , définie par l'équation (5.17), est

$$\hat{\tau}(x, y) = \sum_{m=m_1}^{m_1+N-1} \iint_{\mathbb{R}^2} dX dY \tau_r(X - ms, Y) e^{ik(xX+yY)/f}. \quad (6.33)$$

En effectuant le changement de variable  $X' = X - ms$  dans l'intégrale on obtient

$$\hat{\tau}(x, y) = \sum_{m=m_1}^{m_1+N-1} e^{imksx/f} \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} dX' dY \tau_r(X', Y) e^{ik(xX'+yY)/f}}_{\hat{\tau}_r(x, y)}. \quad (6.34)$$

Posons

$$\phi = \frac{ksx}{f} = \frac{2\pi sx}{\lambda f} \quad (6.35)$$

qui est la différence de phase en  $M$  entre les ondes diffractées par deux points  $P$  et  $P'$  tels que  $\overrightarrow{PP'} = s\vec{u}_X$ . Deux tels points sont par exemple les centres de deux fentes voisines. Cette différence de phase est identique à (6.13) pour  $i = 0$ , et  $r = x/f$  avec  $|r| \ll 1$ . Utilisant  $m' = m - m_1$  comme variable de sommation et l'expression (5.22) de  $\hat{\tau}_r(x, y)$ , l'équation (6.34) devient

$$\hat{\tau}(x, y) = e^{im_1\phi} \underbrace{\left[ \sum_{m'=0}^{N-1} e^{im'\phi} \right]}_{S(\phi)} \hat{\tau}_r(x, y) = ab e^{im_1\phi} \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} S(\phi). \quad (6.36)$$

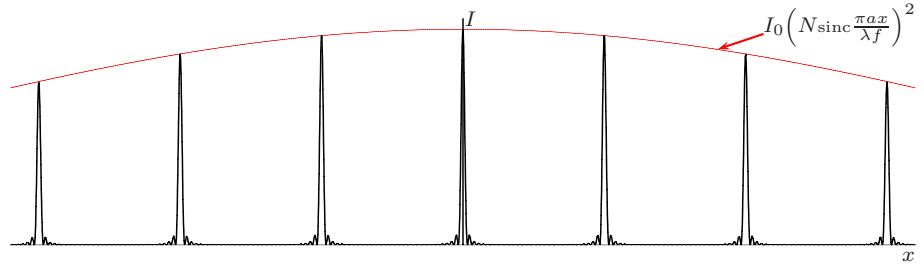
L'éclairement  $I(x, y)$  dans le plan focal objet de la lentille  $L$  est proportionnel à  $|\hat{\tau}(x, y)|^2$ :

$$I(x, y) = I_0 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{\lambda f} \right)^2 R \left( \frac{2\pi sx}{\lambda f} \right). \quad (6.37)$$

Nous supposons que les fentes sont fines ( $a \ll b$ ). Comme dans les sections 5.4.4 et 5.5, il en résulte que l'éclairement est réparti le long de l'axe  $Fx$  et donné par la fonction

$$I(x) = I_0 \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 R \left( \frac{2\pi sx}{\lambda f} \right). \quad (6.38)$$

FIG. 6.9 – Diffraction du réseau de fente lorsqu'on tient compte de la largeur des fentes.



L'éclairement  $I(x)$ , représenté sur la figure 6.9, est donné par la fonction réseau

$$I_1(x) = I_0 R \left( \frac{2\pi sx}{\lambda f} \right) \quad (6.39)$$

modulée (multipliée) par la fonction

$$I_2(x) = \left( \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{\lambda f} \right)^2 \quad (6.40)$$

qui d'après l'équation (5.26) caractérise la diffraction de Fraunhofer d'une fente fine. Ce facteur fait que l'éclairement des pics a une tendance à décroître avec l'ordre d'interférence  $p$ . D'après l'équation (6.31), le pouvoir de résolution du réseau augmente avec l'ordre  $p$ . Pour l'augmenter, on a intérêt à utiliser un ordre  $p$  élevé, mais comme l'éclairement diminue avec  $p$  on devra faire un compromis entre le pouvoir de résolution et l'éclairement.

## 6.8 Réseau échelette

En pratique, les réseaux de fentes ne sont pas utilisés. On préfère les **réseaux échelettes** appelés aussi **réseaux blazés** (anglicisme d'après *blazed grating, to blaze* : étinceler) qui permettent de concentrer l'énergie lumineuse dans un ordre  $p$  donné.

Le réseau par réflexion ayant le profil en dents de scie de la figure 6.1 est un exemple de réseau échelette. Chaque motif est un petit miroir faisant l'angle  $\theta$  avec le plan du réseau (cf. figure 6.10). Une onde lumineuse monochromatique éclaire le réseau. Ses rayons font l'angle  $i$  avec  $Oz$ . La différence de marche des ondes 1 et 2, diffractées à l'infini dans la direction  $r$  par les deux points  $O$  et  $P$  tels que  $\overrightarrow{OP} = s\vec{u}_X$  est

$$\delta = [SOM] - [SPM] = n(\overline{KO} + \overline{OH}) = ns(\sin i + \sin r). \quad (6.41)$$

Les interférences des ondes diffractées par le réseau sont constructives à l'infini lorsque la différence de marche  $\delta$  est un multiple entier de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = n\lambda$ . Les directions des maxima principaux de diffraction sont donc donnés par  $\delta = p\lambda_0$  soit

$$\boxed{s(\sin r + \sin i) = p\lambda} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (6.42)$$

Cette relation remplace la relation fondamentale des réseaux par transmission (6.17) dans le cas d'un réseau par réflexion.

Un maximum d'énergie est diffracté lorsque les angles  $i$  et  $r$  correspondent à la réflexion spéculaire sur chaque petit miroir, c'est-à-dire lorsque

$$i + r = 2\theta. \quad (6.43)$$

Si on choisit  $p$ ,  $\theta$  et  $i$  tels que l'équation (6.42) soit vérifiée pour  $r = 2\theta - i$ , alors pratiquement toute l'énergie lumineuse est diffractée dans le seul ordre d'interférence  $p$ .

## 6.9 Réseau de $N$ antennes radar

### 6.9.1 Le radar

Le **radar** (**radio detection and ranging**) est un dispositif qui émet une onde électromagnétique de fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  et reçoit les ondes réfléchies

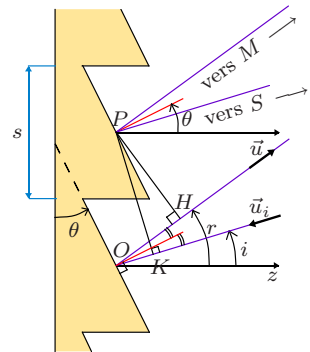


FIG. 6.10 – Réseau échelette.

par les objets (avions, navires, ...) distants. On peut ainsi déterminer la position et la vitesse des objets et parfois leur nature.

La table 6.1 décrit les bandes de fréquences utilisées dans les radars. Les lettres qui les désignent étaient à l'origine, pendant la Deuxième Guerre Mondiale, un code secret permettant de nommer les fréquences radar sans les divulguer. Ces ondes sont appelées ondes **hyperfréquences**, ou **micro-ondes**, (fréquences de 300 MHz à 300 GHz) ou encore ondes millimétriques, centimétriques et décimétriques suivant leur longueur d'onde dans le vide. Elles ont bien d'autres applications que les radars : télécommunications (télévision, GSM, communications satellites), GPS, horloge atomique, météorologie, astronomie, accélérateurs de particules (cyclotrons, synchrotrons), plasmas (chauffage), applications industrielles (chauffage, séchage, polymérisation, vulcanisation du caoutchouc, traitement des déchets) et domestiques (fours à micro-ondes (2,45 GHz)), ...

TAB. 6.1 – Spectre des hyperfréquences.

$\nu$	$\lambda_0$	Bandes de fréquences
0,3–3 GHz	10–100 cm	UHF (Ultra High Frequency)
1–2 GHz		bande <i>L</i>
2–4 GHz		bande <i>S</i>
3–30 GHz	1–10 cm	SHF (Super High Frequency)
4–8 GHz		bande <i>C</i>
8–12 GHz		bande <i>X</i>
12–18 GHz		bande <i>K<sub>u</sub></i>
18–27 GHz		bande <i>K</i>
30–300 GHz	1–10 mm	EHF (Extremely High Frequency)
27–40 GHz		bande <i>K<sub>a</sub></i>
40–60 GHz		bande <i>U</i>
60–80 GHz		bande <i>V</i>
80–100 GHz		bande <i>W</i>

Le radar envoie des impulsions très courtes ( $\sim 1\mu\text{s}$ ) dans une direction donnée. Si un objet-cible se trouve dans cette direction, il réfléchit une fraction de l'onde vers le radar et le récepteur capte un signal. Le retard  $\Delta t$  du signal reçu par rapport au signal émis donne la distance  $d = c\Delta t/2$  entre le radar et l'objet, ce qui détermine la position de l'objet. Lorsque l'objet-cible s'approche du radar avec la vitesse radiale  $v_r$ , il voit une onde de fréquence  $\nu'$  décalée par effet Doppler ( $\nu' - \nu = v_r\nu/c$ ). L'onde reçue par le radar est décalée une seconde fois en fréquence par effet Doppler (la source de cette onde est l'objet-cible qui est en mouvement par rapport au radar). Soit  $\nu''$  la fréquence reçue par le radar et  $\Delta\nu = \nu'' - \nu$  le décalage en fréquence de ce double effet Doppler. On a  $\nu'' - \nu' = v_r\nu/c$  et  $\Delta\nu = 2v_r\nu/c$ . On obtient la vitesse radiale  $v_r$  de l'objet-cible par mesure de  $\Delta\nu$  ( $\Delta\nu < 0$  si  $v_r < 0$ ).

Un radar de veille utilise une antenne directive tournant autour d'un axe vertical (à la vitesse  $\sim 0,1$  tour par seconde). L'antenne émet dans un

dièdre d'arête verticale et de faible ouverture (de l'ordre de  $1^\circ$ ). Ce système permet d'afficher sur un oscilloscope la position horizontale des avions sous forme de points lumineux. Le radar correspond au centre  $C$  de l'écran et le faisceau électromagnétique qui balaye l'espace est visualisé par une aiguille lumineuse qui tourne sur l'écran autour de  $C$ .

### 6.9.2 Le radar à balayage électronique

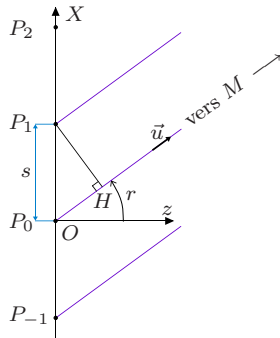


FIG. 6.11.

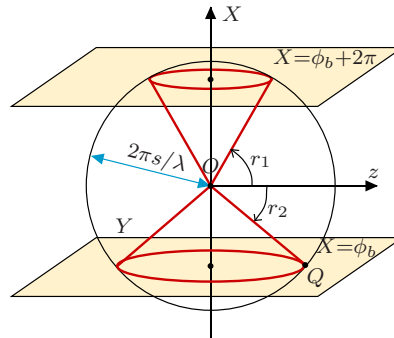


FIG. 6.12.

FIG. 6.11 – Réseau de  $N$  antennes radar.

FIG. 6.12 – Directions d'émission.

Nous allons décrire le principe du **balayage électronique** du faisceau radar qui évite de faire tourner une antenne. Considérons un réseau de longueur  $L$ , de pas  $s$  et formé de  $N$  antennes identiques ( $L = Ns$ ). Les antennes sont alignées sur l'axe  $OX$  et numérotées par les entiers  $m = m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + N - 1$  avec  $m_1 = -\lfloor N/2 \rfloor$ . L'antenne numéro  $m$  est située au point  $P_m$  d'abscisse  $X = ms$  (cf. figure 6.11).

L'antenne numéro  $m$  est pilotée par un signal sinusoïdal de la forme

$$s_m = ae^{i(m\phi_b + \omega t)}. \quad (6.44)$$

Le déphasage  $\phi_b$  entre les deux signaux  $s_{m+1}$  et  $s_m$  est réglable de façon électronique. Une antenne émet une onde radar synchronisée sur le signal qui l'alimente. Les ondes émises par les  $N$  antennes sont cohérentes et interfèrent entre elles. Le champ électrique en  $M$  ( $M$  étant un point du plan  $OXz$ ) de l'onde émise par l'antenne numéro  $m$  a pour amplitude complexe (nous utilisons la théorie scalaire) :

$$E_m = Ae^{i(m\phi_b - 2\pi[P_m M]/\lambda_0)}. \quad (6.45)$$

Le point  $M$  est supposé très éloigné des antennes de sorte que les rayons  $P_m M$  ( $m = m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + N - 1$ ) sont parallèles entre-eux et font l'angle  $r$  avec l'axe  $Oz$ . L'amplitude  $A$  peut dépendre de la direction d'émission, mais nous n'en tiendrons pas compte. La différence de marche entre les rayons  $P_m M$  et  $P_{m+1} M$  est

$$\delta = [P_m M] - [P_{m+1} M] = n\overline{OH} = ns \sin r. \quad (6.46)$$

On en déduit que la différence de phase entre  $E_m$  et  $E_{m+1}$  est

$$\phi = \frac{2\pi s}{\lambda} \sin r - \phi_b. \quad (6.47)$$

Pour un grand nombre d'antennes ( $N \gg 1$ ), la théorie des réseaux nous apprend qu'il n'y a des interférences constructives que si  $\phi = 2\pi p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ). Le réseau d'antennes n'émet donc que dans les directions  $r$  satisfaisant à la relation (que l'on comparera à l'équation (6.17))

$$\frac{2\pi s}{\lambda} \sin r = \phi_b + 2\pi p \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (6.48)$$

La figure 6.12 donne une construction géométrique des directions d'émission du radar :

- tracer la sphère de centre  $O$  et de rayon  $2\pi s/\lambda$  ;
- tracer les plans d'équations  $X = \phi_b + 2\pi p$  ;
- toute intersection  $Q$  de ces plans et de la sphère correspond une direction  $OQ$  d'émission du faisceau radar.

Montrons cette affirmation. Soit  $Q$  un tel point,  $\Pi$  le plan  $QOX$ ,  $\Pi'$  le demi-plan de  $\Pi$  qui contient  $Q$  et de bord  $OX$ . Soit  $Oz \subset \Pi'$  le demi-axe perpendiculaire à  $OX$ . Désignons par  $r$  l'angle  $(Oz, OQ)$  ( $|r| \leq \pi/2$ ). L'abscisse de  $Q$  est  $X = \frac{2\pi s}{\lambda} \sin r$  et l'angle  $r$  est bien une solution de l'équation (6.48).

Les directions d'émission se répartissent sur des cônes d'axe  $OX$  (deux cônes sur la figure). Il y aura 0 ou 1 cône si  $s < \lambda/2$  (le vérifier).

Lorsqu'on fait varier  $\phi_b$ , les demi-angles au sommet des cônes se modifient ce qui permet de faire varier les directions d'émission. Mais ce système, par suite de la symétrie de révolution autour de  $OX$ , ne permet pas le contrôle total de la direction d'émission. Pour corriger ce défaut, certains dispositifs utilisent des antennes placées aux nœuds d'un quadrillage (réseau à deux dimensions). Ils permettent de façon pratiquement instantanée de diriger le faisceau radar vers n'importe quel point de l'espace par la modification électronique des phases des antennes.

Habituellement, le même réseau d'antennes radar est aussi utilisé pour recevoir l'onde renvoyée par l'objet-cible. Pour cela, on superpose les signaux collectés par toutes les antennes, le signal de l'antenne numéro  $m$  étant déphasé de  $m\phi_b$ . Les signaux des  $N$  antennes sont alors en phase si la condition (6.48) est vérifiée.

Cette méthode permet de réaliser un récepteur très directif, ce qui évite la détection de signaux parasites provenant de directions non visées par le faisceau radar.



## 6.10 Réseau interférométrique de radiotélescopes

La radioastronomie est l'observation astronomique des ondes électromagnétiques émises par les astres dans la gamme radio et hyperfréquence. Les récepteurs (radiotélescopes) sont des antennes d'ondes radio ou radar qui doivent être directives pour savoir de quelle direction du ciel provient l'émission.

On peut pour cela aligner  $N$  antennes fixes sur l'axe  $OX$  (l'axe est-ouest par exemple), formant un réseau d'antennes équidistantes de  $s$ , analogue au réseau d'antennes radar. Ce système permet de pointer des directions faisant un angle donné avec  $OX$ . L'angle est réglable par modification de la phase  $\phi_b$ . Pour limiter l'ensemble des directions visées, on utilise des antennes directives et/ou un réseau à deux dimensions.



FIG. 6.13.



FIG. 6.14.

Le radiotélescope du Plateau de Bure (cf. figures 6.13 et 6.14) est un interféromètre en T de 6 antennes de 15 m de diamètre (on l'appelle interféromètre plutôt que réseau parce que le nombre d'antennes n'est pas très grand). La ligne de base est-ouest est formée de 3 antennes et sa longueur est variable jusqu'à  $L = 408$  m. Pour la longueur d'onde  $\lambda = 1$  mm, la résolution angulaire peut atteindre  $\lambda/L = 0,5''$ .

FIG. 6.13 – Radiotélescope du Plateau de Bure (IRAM, Hautes Alpes, France, altitude 2500 m) [9].

FIG. 6.14 – Ligne de base de trois antennes [9].



## Annexe A

# Index des principaux symboles

$[a]$	le plus grand entier plus petit ou égal à $a$
$[AB]$	chemin optique le long de la courbe $\widehat{AB}$ 21
$\overline{AB}$	longueur algébrique du segment de droite $AB$ 39
$c$	vitesse de la lumière dans le vide ( $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ ) 7
$C$	contraste (ou modulation, ou visibilité) 64
$\mathcal{E}$	éclairage 54
$h$	constante de Planck ( $h \approx 6,626\,075\,10^{-34} \text{ J s}$ ) 41
$i$	interfrange 71
$I$	éclairage 54
$k$	module du vecteur d'onde 82
$l$	longueur de cohérence 47
$n$	indice 10
$\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers non négatifs 0, 1, 2, 3, ...
$p$	ordre d'interférence 69
$\vec{P}$	vecteur de Poynting 11
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$R(\phi)$	fonction réseau 98
$\text{sinc}$	sinus cardinal 84
$T$	temps de réponse du détecteur 48, 65
$T_0$	période 47, 64
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Z}^-$	ensemble des entiers strictement négatifs ..., -3, -2, -1
$\mathbb{Z}^+$	ensemble des entiers strictement positifs 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$	ensemble des entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Z}^*$ ou $\mathbb{N}$	ensemble des entiers non négatifs 0, 1, 2, 3, ...

$\delta$	différence de marche 38
$\Delta\nu$	largeur de raie en fréquence 45
$\Delta\sigma$	largeur de raie en nombre d'ondes 47
$\theta_1$	rayon angulaire du disque d'Airy 91
$\lambda = \lambda_0/n$	longueur d'onde dans le milieu (air, ...) 10
$\lambda_0$	longueur d'onde dans le vide 7
$\nu$	fréquence 7
$\rho_1$	rayon du disque d'Airy 91
$\sigma_0$	nombre d'ondes 47
$\tau$	durée de cohérence 47, 65
$\tau(X, Y)$	fonction transparence 83
$\hat{\tau}(x, y)$	transformée de Fourier de $\tau(X, Y)$ 84
$\phi(\vec{r})$	phase 10
$\omega$	pulsation 7

## Annexe B

### Index des noms propres

Airy .....	91	Hubble .....	94
Bessel .....	90	Huygens .....	8
Broglie .....	94	Lambert .....	55
Descartes .....	7	Lloyd .....	19
Dupin .....	15	Malus .....	15
Einstein .....	42	Maxwell .....	7
Fermat .....	7	Michelson .....	74
Fourier .....	84	Planck .....	41
Fraunhofer .....	44	Poynting .....	11
Fresnel .....	31	Rayleigh .....	92
Gauss .....	81	Rowland .....	97
Gladstone .....	30	Snell .....	7
Grimaldi .....	61	Young .....	59
Heisenberg .....	96		



# Références

- [1] Le spectre 2.5 provient du site d'Andrew Harmsworth  
<http://www.harmsy.freeuk.com/fraunhofer.html>
- [2] Le spectre de l'hydrogène 2.6 est tiré du site de Brian Niece  
<http://www.assumption.edu/users/bniece/CHE131/LineSpectra/Index.html>
- [3] Les courbes de la figure 3.4 ont été tracées à partir des données numériques de la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE) qui sont disponibles sur le site  
<http://cvrl.ioo.ucl.ac.uk/index.htm>
- [4] Les figures 4.1, 4.16 et 6.8 ne sont pas des photographies mais des dessins.
- [5] La photographie 5.11 est tirée de  
Eugene Hecht, *Optics (4th ed.)*, Addison Wesley (2002), page 453.
- [6] La photographie 5.14 est tirée de  
Max Born & Emil Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge U P (2002), page 438.
- [7] La photographie 5.22 est tirée de  
Max Born & Emil Wolf, *ibid*, page 442.
- [8] Les photographies 5.24 et 5.25 sont tirées de  
Dudley H. Towne, *Wave Phenomena*, Dover (1967), page 284.
- [9] Les photographies 6.13 et 6.14 sont tirées du site  
<http://www.astrosurf.com/borealis/seb/pdb.html>