

Optique Physique

A. GIBAUD

25 juillet 2003

Abstract

This document uses the “Springer Verlag Conference” Style. Replace this text with your own abstract.

Table des matières

1	Généralités sur la lumière.	7
1.1	L'onde électromagnétique	7
1.2	Onde plane dans le vide	9
1.2.1	Présentation de l'onde harmonique plane	9
1.2.2	Expression du champ électrique	9
1.2.3	Onde progressive	10
1.2.4	Onde plane polarisée rectilignement.	11
1.3	Ondes planes dans un milieu matériel	13
1.3.1	Equations de Maxwell dans un milieu	13
1.3.2	Solutions de l'équation de Maxwell	14
1.3.3	Relation de dispersion	14
1.4	Ondes sphériques dans le vide	15
1.5	Intensité lumineuse	16
2	Interférences lumineuses	21
2.1	Définitions	21
2.2	Superposition de deux ondes	22
2.2.1	Expression de l'intensité	22
2.2.2	Conséquences	25
3	Division du front d'onde	27
3.1	Expérience des fentes d'Young.	27
3.1.1	Description de l'expérience	27
3.1.2	Interprétation.	29
3.1.3	Interfrange	30
3.1.4	Localisation des franges	31
3.1.5	Rayons inclinés sur l'axe principal.	32
3.1.6	Interférences en lumière blanche	33
3.2	Autres dispositifs interférentiels à deux ondes	35
3.2.1	Les miroirs de Fresnel.	35
3.2.2	Les bilentilles de Billet.	36
3.2.3	Les biprismes de Fresnel	36
3.3	Interférences à N ondes.	37
3.3.1	Présentation du réseau	37
3.3.2	Onde incidente non perpendiculaire au plan du réseau.	40

3.3.3	Calcul de la figure d'interférences.	41
3.3.4	Utilité des réseaux : dispersion de la lumière	43
3.3.5	Pouvoir de dispersion d'un réseau.	45
3.3.6	Réseau au minimum de déviation.	46
3.3.7	Pouvoir de résolution du réseau.	46
4	Division d'amplitude	49
4.1	Interférences par des lames minces	49
4.1.1	Présentation de l'expérience	49
4.1.2	Origine des interférences	50
4.1.3	Calcul de la différence de marche	52
4.1.4	Calcul du rayon des anneaux	53
4.1.5	Franges d'égalé inclinaison en transmission	56
4.1.6	Applications : couches minces antireflets	57
4.1.7	Couche réfléchissante	61
4.2	Interférences localisées du film en coin	61
4.2.1	Présentation du coin	61
4.2.2	Différence de marche et interfrange	63
4.2.3	Coin d'air et anneaux de Newton	64
4.2.4	Détermination d'un profil d'épaisseur	66
4.3	Interféromètre de Michelson	70
4.3.1	Description de l'interféromètre	70
4.3.2	Figures d'interférences	72
4.4	Cavités optiques résonantes	74
4.4.1	Interférences à N ondes dans une lame mince	74
4.4.2	Intensité	78
4.4.3	Interféromètre de Fabry-Pérot	84
4.4.4	Figure d'interférences.	86
4.4.5	Pouvoir de résolution	86
4.4.6	Cavité laser	87
5	Diffraction de la lumière. Principe d'Huygens-Fresnel	93
5.1	Mise en évidence expérimentale	93
5.2	Principe d'Huygens-Fresnel	94
5.2.1	Enoncé	94
5.2.2	Formalisation mathématique	96
5.2.3	Zones de Fresnel	98
5.3	Diffraction d'une onde plane par un diaphragme plan.	100
5.3.1	Présentation générale.	100
5.3.2	Approximations	102
5.3.3	Intégrale de Fresnel.	103
5.3.4	La diffraction à distance infinie : diffraction de Fraunhofer.	104
5.4	Etude de divers systèmes expérimentaux.	105
5.4.1	La réalisation de l'onde plane.	105
5.4.2	Diffraction par une fente rectiligne de largeur finie a	107
5.4.3	Diffraction d'une onde plane par une fente rectangulaire.	108

5.4.4	Diffraction par une pupille circulaire	110
5.5	Théorème de Babinet	113
6	DIFFRACTION ET INTERFERENCES	117
6.1	Rappels sur les interférences.	117
6.2	Intensité diffractée par les fentes d'Young.	118
6.2.1	Utilisation de la transparence	118
6.2.2	Cas particulier de fentes très fines	121
6.3	Diffraction par un réseau.	122
7	COHERENCE TEMPORELLE	125
7.1	Description mathématique des ondes lumineuses	125
7.1.1	Représentation temporelle.	125
7.1.2	Représentation fréquentielle	126
7.1.3	Fonction de corrélation	129
7.1.4	Degré de cohérence	130
7.1.5	Théorème de Wiener-Khintchine	130
7.1.6	Résumé	132
7.2	Application aux signaux lumineux	132
7.2.1	Signal idéalement cohérent	132
7.2.2	Train d'onde sinusoïdal	133
7.2.3	Train d'onde sinusoïdal amorti	138
7.3	Application aux interférences	138
7.3.1	Expression de l'intensité	138
7.3.2	Contraste des franges	140
7.3.3	Temps et longueur de cohérence	141
7.3.4	Nombre de franges dans le champ d'interférences	141
7.4	Grandeurs mesurables	142
7.4.1	Intensité lumineuse.	142
7.4.2	Densité spectrale ou spectre lumineux.	143
7.4.3	Coefficient de cohérence	144
8	Holographie	147
8.1	Objet de phase	147
8.2	Plaque photographique	149
8.3	Principe de l'holographie	150
8.3.1	Montage expérimental	150
8.3.2	Principe mathématique	151
8.3.3	Reconstruction optique de l'hologramme	152
8.4	Double diffraction	153
8.4.1	Montage expérimental	153
8.4.2	Etude théorique	155
8.4.3	Expérience d'Abbe	156
8.4.4	Strioscopie	158
8.4.5	Contraste de phase	161

Chapitre 1

Généralités sur la lumière.

1.1 L'onde électromagnétique

En adoptant la démarche suivie par J.C. Maxwell , nous pouvons affirmer que la lumière est une onde électromagnétique caractérisée par l'association d'un champ électrique \vec{E} , d'un champ magnétique \vec{B} et d'un vecteur d'onde \vec{k} . Cette affirmation nécessite évidemment d'être vérifiée. En particulier l'un des buts d'un cours d'optique physique est de montrer que la lumière est bien une onde. Pour cela nous allons tout d'abord l'admettre puis ensuite nous décrirons un ensemble d'expériences qui, nous le verrons, ne peuvent s'interpréter que par la nature ondulatoire de la lumière.

Dans le vide les champs \vec{E} et \vec{B} qui définissent l'onde électromagnétique doivent satisfaire les quatre équations de Maxwell (1860)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Lorsqu'elles sont combinées entre elles, ces équations conduisent aux **équations de propagation** du champ électrique¹ ou magnétique qui s'écrivent :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\vec{E} \right) \right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}}{\partial t} \implies \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\vec{B} \right) \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}}{\partial t} \implies \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.7)$$

¹Il est utile de rappeler que

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}A) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}A) - \Delta A \quad (1.5)$$

Le grand mérite des équations de Maxwell provient de ce que leur combinaison conduit aux **équations de propagation**, encore appelées **équations de Helmholtz**, et que ces équations nous indiquent que la propagation des champs électriques et magnétiques doit se faire à la célérité c vérifiant $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Les constantes $\varepsilon_0 = 1/36\pi 10^9$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ étaient connues bien avant que Maxwell n'établissent ses équations. De ce fait, un simple calcul permet de vérifier que la célérité de propagation devait être

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 300000000 \text{m.s}^{-1}$$

La valeur particulièrement grande de cette célérité correspond à peu de chose près à celle de la lumière dans le vide ainsi qu'elle avait été mesurée en premier lieu par Fizeau en 1849, $c=315000 \text{kms}^{-1}$, (par la méthode de la roue dentée) puis par Foucault en 1862 (par la méthode du miroir tournant), $c=298000 \text{kms}^{-1}$. Alors que Maxwell avait établi sa théorie sur des bases mécanistiques, c'est à Hertz que l'on doit rendre hommage car il fût le premier à proposer que la théorie électromagnétique de Maxwell s'appliquait parfaitement à la lumière pour peu que l'on considère la lumière comme une onde électromagnétique. La célérité de la lumière est une constante universelle et peut être mesurée en déterminant le temps mis par la lumière pour parcourir un mètre dans la vide. On trouve actuellement que

$$c = 299792458 \text{m.s}^{-1} \quad (1.8)$$

On peut percevoir dans l'analogie formelle des deux équations de propagation le rôle similaire joué par le champ \vec{E} et le champ \vec{B} . Cependant en optique les phénomènes physiques sont plutôt liés au champ électrique et on se contente en général d'utiliser le champ électrique \vec{E} pour décrire l'onde lumineuse. En effet les milieux magnétiques ne sont pas transparents et on appliquera les équations de Maxwell à la propagation dans des milieux diélectriques non magnétiques dans lesquels la densité de charge électrique est nulle et où il n'existe que des courants de déplacement (Voir cours électromagnétisme). Le cas des métaux est le seul cas où les courants de conduction seront pris en compte. La connaissance du champ électrique entraîne nécessairement celle du champ magnétique au travers des équations de Maxwell. La résolution de ces équations montre que les trois vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre direct et que les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent présenter différentes formes selon la symétrie de la source qui les a produits. En particulier on distingue dans la pratique deux formes d'ondes très importantes : l'onde plane monochromatique et l'onde sphérique monochromatique qui sont des solutions simples de l'équation de propagation. Ces solutions sont pour l'onde plane et l'onde sphérique respectivement de la forme

$$s(t, r) = f(-ct + \vec{u} \cdot \vec{r}) + g(ct + \vec{u} \cdot \vec{r}) \quad (1.9)$$

$$s(t, r) = \frac{1}{r} f(-ct + \vec{u} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{r} g(ct + \vec{u} \cdot \vec{r}) \quad (1.10)$$

où r désigne la distance du point M d'observation à la source S, c est la célérité de propagation dans le milieu considéré et \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde. Les fonctions f correspondent aux ondes progressives alors que les fonctions g décrivent les ondes régressives. D'une façon très générale les solutions

des équations de propagation seront de ce type et les fonctions f et g seront déterminées par les propriétés de la source.

1.2 Onde plane dans le vide

1.2.1 Présentation de l'onde harmonique plane

L'onde lumineuse est dite **plane** si le vecteur d'onde \vec{k} qui définit sa direction de propagation est constant en sens et en direction. Cette direction est appelée la direction de propagation de l'onde et le plan perpendiculaire au vecteur \vec{k} contenant les vecteurs \vec{E} et \vec{B} est appelé **plan d'onde**. L'onde est dite **monochromatique** si le vecteur d'onde est de module constant. Elle est dite harmonique si les variations spatiales et temporelles sont sinusoïdales.

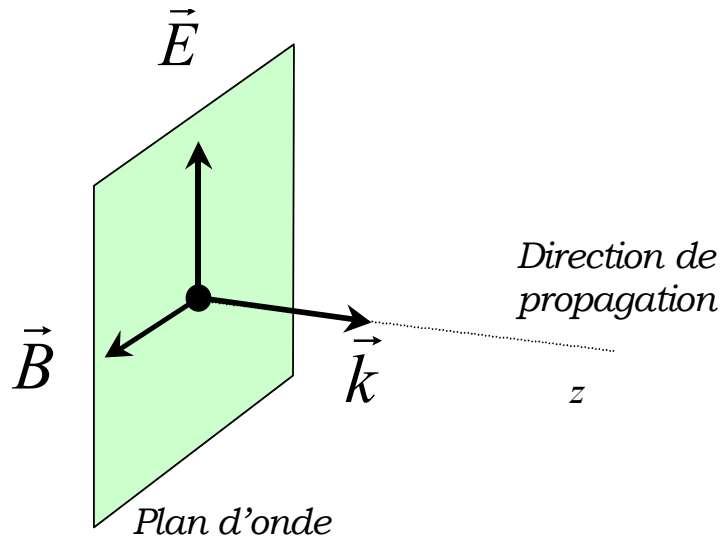


FIG. 1.1 – Représentation d'une onde plane transverse électromagnétique caractérisée par un champ électrique, un champ magnétique et un vecteur d'onde formant un trièdre direct.

1.2.2 Expression du champ électrique

En un point P de l'espace et à l'instant t quelconque, l'onde lumineuse monochromatique peut être décrite par le champ électrique instantané $\vec{E}(P, t)$ donné par :

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos(\omega_0 t + \varphi(P, t)) \quad (1.11)$$

où ω_0 représente la pulsation de l'onde.

La valeur du champ électrique dépend donc :

- de la position P du point considéré c'est la variable d'espace
- du temps t ou l'on détermine le champ c'est la variable temporelle.

Le vecteur $\vec{E}_0(P, t)$ définit la direction de **polarisation** de l'onde. Il existe de nombreux types de polarisation mais nous nous bornerons par la suite à étudier des ondes polarisées rectilignement pour lesquelles le vecteur $\vec{E}_0(P, t)$ est constant.

La phase $\varphi(P, t)$ de l'onde au point P et à l'instant t dépend de la position relative de la source S et du point P atteint par l'onde. Nous verrons plus tard que pour de nombreuses sources lumineuses, la phase à la source peut fluctuer au cours du temps. A la source S , on pourra donc écrire que le champ est défini à l'instant t par :

$$\vec{E}(S, t) = \vec{E}_0(S, t) \cos(\omega_0 t + \varphi(S, t)) \quad (1.12)$$

avec $\varphi(S, t)$ la phase à la source.

1.2.3 Onde progressive

Une onde est dite **progressive** si elle se propage dans l'espace au cours du temps. Pour une onde progressive il existe un lien entre l'onde observée en P et l'onde émise par la source. L'onde qui arrive au temps t au point P d'observation est la même que celle qui a été émise par la source un certain temps τ précédent le temps t . Comme les ondes lumineuses se propagent à la vitesse de la lumière, le retard τ entre l'instant de l'émission de l'onde en S et celui de son observation en P est

$$\tau = \frac{SP}{c} \quad (1.13)$$

Il en résulte que le champ électrique au point P sera donné par :

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}(S, t - \tau) \quad (1.14)$$

soit

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos[\omega_0(t - \tau) + \varphi(S, t - \tau)] \quad (1.15)$$

Le développement de l'argument du cosinus conduit à :

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos[\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi(S, t - \tau)] \quad (1.16)$$

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos\left[\omega_0 t - \omega_0 \frac{SP}{c} + \varphi(S, t - \tau)\right] \quad (1.17)$$

Il convient de faire apparaître le module du vecteur d'onde de propagation défini par $k_0 = \omega_0/c$ dans l'équation ci-dessus. On obtient alors

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos[\omega_0 t - k_0 SP + \varphi(S, t - \tau)] \quad (1.18)$$

Il s'ensuit que pour $t > \tau$ la phase de l'onde au point P est donnée par

$$\varphi(P, t) = -k_0 SP + \varphi(S, t - \tau) \quad (1.19)$$

La phase de l'onde au point P est donc la somme d'un terme de propagation, $-k_0 SP$, et d'un terme lié à l'émission de l'onde par le point source S .

Si l'onde se propage dans un milieu d'indice de réfraction n alors un raisonnement analogue au précédent tenant compte du changement de célérité de propagation $v = c/n$ dans le milieu d'indice n conduit à :

$$\varphi(P, t) = -k_0 n SP + \varphi(S, t - \tau) = -kSP + \varphi(S, t - \tau) \quad (1.20)$$

ce qui montre que le vecteur d'onde de propagation dans le milieu devient $k = k_0 n$.

1.2.4 Onde plane polarisée rectilignement.

Une onde est dite **plane**, si le vecteur d'onde de propagation \vec{k} qui la décrit est **constant**. Il s'ensuit qu'une onde plane se propage dans une seule direction. Si elle est étendue (voir figure 1.2) elle est alors constituée d'une multitude de rayons lumineux tous parallèles les uns aux autres. Chaque rayon est issu d'un point source S_i qui lui est propre. Si l'on admet que la propagation se fait dans la direction des z croissants et si l'on choisit comme origine de l'axe des z le point S , la phase au point P s'écrit :

$$\varphi(P, t) = -kS_i P + \varphi(S_i, t - \tau) = -kz + \varphi(S_i, t - \tau) \quad (1.21)$$

soit

$$\varphi(P, t) = -\vec{k} \cdot \vec{SP} + \varphi(S_i, t - \tau) \quad (1.22)$$

La différence de phase $\Delta\phi$ entre la phase de l'onde en P et celle de l'onde à la source est donc

$$\Delta\phi = \varphi(P, t) - \varphi(S_i, t - \tau) = -kz = -\vec{k} \cdot \vec{SP} \quad (1.23)$$

Pour des raisons de commodité, on convient souvent de prendre l'origine des phases à la source et on pose

$$\forall S_i, \quad \varphi(S_i, t) = 0 \quad (1.24)$$

Dans ce cas l'onde plane s'écrit

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P, t) \cos[\omega_0 t - kz] = \vec{E}_0(P, t) \cos\left[\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{SP}\right] \quad (1.25)$$

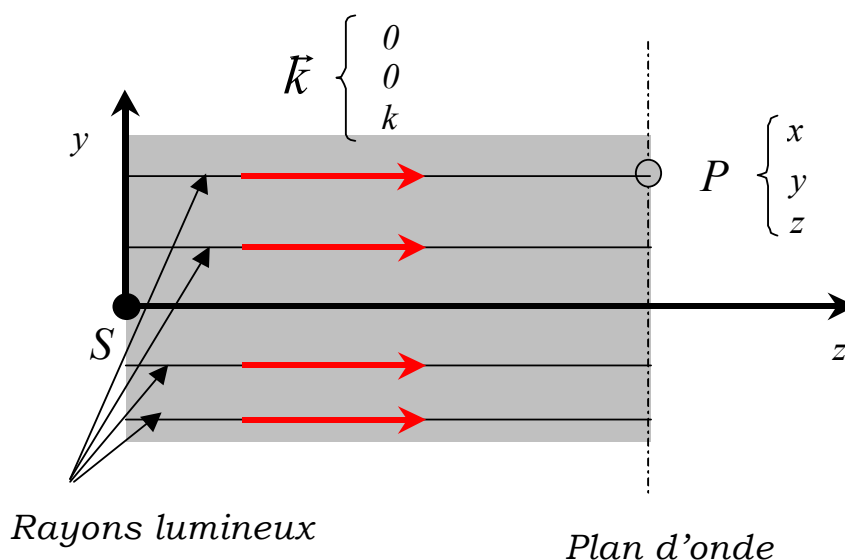


FIG. 1.2 – Représentation du vecteur d'onde et d'un plan d'onde pour une onde plane électromagnétique se propageant dans la direction de l'axe des z . On notera que l'onde représentée en gris est constituée de rayons lumineux tous parallèles les uns aux autres. Un rayon quelconque est nécessairement issu d'un point source qui lui est propre.

Il est intéressant de constater que la différence de phase $\Delta\phi$ est constante si

$$-kz = cste \implies z = cste \quad (1.26)$$

Le lieu des points **équi**phases est donc le plan $z = cste$. Ce plan est un plan perpendiculaire au vecteur d'onde qui définit la direction et le sens du rayon lumineux. Ce résultat est conforme au **théorème de Malus** qui stipule que les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. Il est facile de voir que tous les plans perpendiculaires à Sz sont aussi des plans équi

phases. Quand le champ $\vec{E}_0(P, t)$ est constant au cours du temps et dans l'espace, l'onde est dite **polarisée rectilignement**. Le plan qui contient à la fois le vecteur d'onde \vec{k}_0 et le champ \vec{E}_0 est appelé le plan de polarisation. Si la phase à l'origine est prise nulle à la source quel que soit l'instant considéré, une onde plane polarisée rectilignement s'écrit

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{SP}) \quad (1.27)$$

Nous verrons par la suite que cette situation correspond à une onde rigoureusement monochromatique appelée **onde lumineuse idéalement cohérente** à la fois dans le temps et dans l'espace car elle correspond à des trains d'onde d'extension infinie dans le temps et la phase de l'onde est identique pour tous les points contenus dans les plans perpendiculaires à sa direction de propagation.

Dans le vide (ou l'air) le module du vecteur d'onde de propagation est lié à la pulsation ω_0 de l'onde par la relation :

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \quad (1.28)$$

En explicitant la pulsation de l'onde, il est possible d'introduire la longueur d'onde qui est la distance parcourue par l'onde en une période temporelle

$$k_0 = \frac{2\pi}{cT_0} \implies \lambda_0 = cT_0$$

En optique il est courant de présenter l'onde plane polarisée rectilignement sous la notation complexe suivante :

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{SP})} \quad (1.29)$$

Cette notation est un abus d'écriture car nous aurions dû écrire que \vec{E} est la partie réelle de ce nombre complexe.

1.3 Ondes planes dans un milieu matériel

1.3.1 Equations de Maxwell dans un milieu

Dans un milieu matériel quelconque, les équations de Maxwell valables dans le vide doivent être corrigées pour tenir compte de l'éventuelle anisotropie du milieu ainsi que de ses propriétés optiques. En particulier au lieu de ne considérer que les champs \vec{E} et \vec{B} , on décrit l'onde électromagnétique par quatre grandeurs vectorielles qui sont $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ et \vec{H} , appelées respectivement champ et déplacement électrique et l'induction et l'excitation magnétique. Dans les milieux optiquement transparents l'induction est proportionnelle à l'excitation magnétique

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.30)$$

La situation est moins simple pour les grandeurs électriques car le déplacement dépend du champ électrique par le biais d'une relation tensorielle

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.31)$$

ou ε est le tenseur de rang 2 de permittivité diélectrique du milieu. Ce tenseur se réduit à une constante si le milieu est isotrope. Dans ce cas le déplacement est proportionnel au champ.

Les équations de Maxwell dans un milieu matériel deviennent

$$\text{div} \vec{D} = 0 \quad (1.32)$$

$$\text{div} \vec{B} = \vec{0} \quad (1.33)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.34)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.35)$$

1.3.2 Solutions de l'équation de Maxwell

Nous considérons des solutions sous la forme d'ondes harmoniques planes du type

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{SP})} \quad (1.36)$$

$$\vec{H}(P, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{SP})} \quad (1.37)$$

En reportant ces solutions dans les équations il est facile de voir que les champs doivent vérifier :

$$\vec{E}(P, t) = -\frac{1}{\varepsilon\omega_0} \vec{k} \wedge \vec{H}, \quad \vec{H}(P, t) = -\frac{1}{\mu_0\omega_0} \vec{k} \wedge \vec{E} \quad (1.38)$$

Pour l'onde T.E.M. valide dans les milieux isotropes, les champs ont pour expression

$$E(P, t) = -\frac{H(P, t)}{\varepsilon v}, \quad H(P, t) = -\frac{1}{\mu_0 v} E(P, t) \quad (1.39)$$

ou v est la célérité de propagation de la lumière dans le milieu matériel.

1.3.3 Relation de dispersion

Ces dernières relations conduisent par combinaison à l'équation de dispersion

$$(k^2 - \varepsilon\mu_0\omega_0^2) \vec{E} = \vec{0} \quad (1.40)$$

Il s'ensuit que le vecteur d'onde de propagation dans le milieu doit vérifier

$$k^2 = \varepsilon\mu_0\omega_0^2 \implies k = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \quad (1.41)$$

Le vecteur d'onde de propagation dans un milieu matériel diffère de celui dans le vide, $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$, par la quantité $\sqrt{\varepsilon_r}$. Cette quantité est par définition l'indice de réfraction du milieu

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (1.42)$$

Il s'agit d'une relation de dispersion parce que la constante diélectrique relative ε_r dépend de la pulsation ω_0 de l'onde incidente. L'indice de réfraction dépend donc de cette pulsation.

Il résulte de cette présentation que dans un milieu matériel :

- le vecteur d'onde est supérieur à celui du vide et la longueur d'onde inférieure à celle observée dans le vide

$$k = k_0 n \implies \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (1.43)$$

Dans un verre d'indice 1.5, la longueur d'onde de propagation est réduite de cette valeur. Pourtant un observateur ne peut pas percevoir ce changement car il reçoit sur sa rétine le rayon lumineux de longueur d'onde $\frac{\lambda_0}{n_{oeil}}$ quelle que soit la nature des milieux dans lesquels le rayon initial se sera propagé. Notre oeil est donc sensible à la longueur d'onde initiale.

- la célérité de propagation de la lumière est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.44)$$

1.4 Ondes sphériques dans le vide

L'onde émise par de nombreux objets lumineux est souvent **sphérique**. Dans ce cas le vecteur d'onde de propagation possède la symétrie sphérique et est radial. Les surfaces perpendiculaires aux vecteurs d'onde sont alors des sphères et sont appelées **surfaces d'onde**. Une onde sphérique est monochromatique si son vecteur d'onde est de module constant.

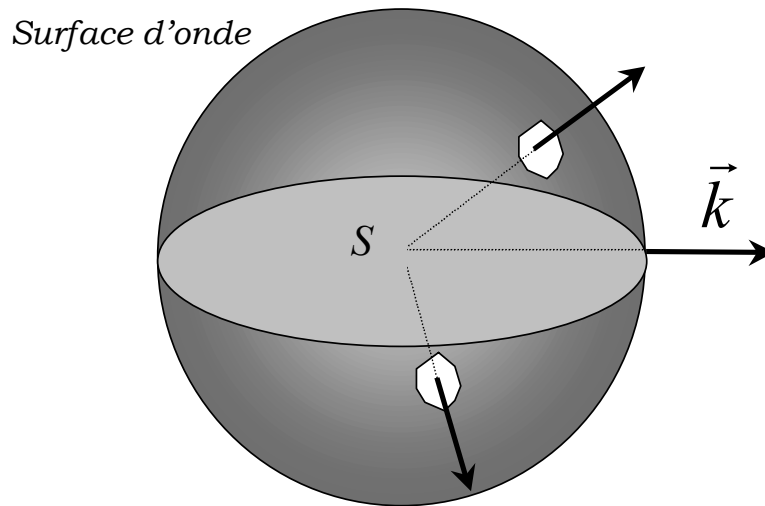


FIG. 1.3 – Représentation d'une d'onde sphérique ; les surfaces d'onde sont des sphères et le vecteur d'onde est radial.

Nous voyons que cette onde se distingue d'une onde plane par le fait que l'une, l'onde plane ne se propage que dans une seule direction, et que l'autre *a contrario* se propage dans toutes les directions de l'espace. L'onde plane quand elle est d'extension finie dans l'espace est délimitée par un faisceau lumineux parallèle qui est strictement (en l'absence de poussière diffusant la lumière) invisible pour un observateur qui n'est pas dans sa direction de propagation. Un exemple assez proche d'une telle onde lumineuse est celle émise par une source laser.

L'onde sphérique qui se propage dans toutes les directions est visible par un observateur en tous les points de l'espace. Un exemple typique d'onde sphérique est l'onde émise par une étoile. Le champ scalaire associé à une onde sphérique de pulsation ω_0 qui se propage d'un point source S à un point P dans le vide est donné par

$$E(P, t) = E_0 \frac{e^{i(\omega_0 t - k_0 r)}}{r} = E_0 e^{i\omega_0 t} \frac{e^{-ik_0 SP}}{SP} \quad (1.45)$$

Il faut bien comprendre que, lorsque l'onde sphérique se propage, le rayon SP de la surface d'onde augmente inéluctablement au cours du temps jusqu'à devenir infini. Une surface d'onde de rayon infini est assimilable à un plan d'onde ce qui fait que l'onde sphérique est assimilable à une onde plane dès que l'on s'éloigne suffisamment de la source. Ainsi le soleil qui est à 150 millions de km de la terre nous envoie des ondes sphériques qui lorsqu'elles arrivent sur terre sont assimilables à des ondes planes. Pour s'en convaincre il suffit de calculer la divergence des rayons issus des points extrêmes du soleil. Le soleil a un diamètre 100 fois supérieur à celui de la terre soit de l'ordre de 1.2 millions de km ce qui conduit à une divergence $\eta = 0.5^\circ$. Les rayons du soleil sont donc quasi-parallèles entre eux lorsqu'ils atteignent la terre.

1.5 Intensité lumineuse

Si l'on veut appréhender correctement la notion d'intensité lumineuse il importe de remarquer qu'une onde électromagnétique véhicule de l'énergie. Comme cette onde est caractérisée par le champ électrique et le champ magnétique on se doute que l'énergie véhiculée dépendra de ces deux quantités. Si l'on considère l'onde plane harmonique se propageant dans le vide (exemple une radiation particulière du spectre du soleil), on sait que cette radiation transporte de l'énergie à travers le vide. C'est la base même de l'utilisation de l'énergie solaire ou plus prosaïquement de l'art de se faire bronzer au soleil sur la plage. Une onde de ce type présente une valeur moyenne nulle au cours du temps. Il est donc clair que l'énergie reçue par une surface donnée ne peut pas être proportionnelle à la valeur moyenne du champ électrique ou du champ magnétique. En effet lorsqu'une onde tombe sur un récepteur lumineux, le récepteur (oeil, film, ect..) ne perçoit pas l'amplitude du champ mais une quantité égale au carré du module du champ. L'argument est semblable en tous points à celui utilisé en électricité pour calculer l'énergie dissipée dans une résistance parcourue par un courant électrique. Nous appellerons donc l'intensité lumineuse I de l'onde (où encore éclaircement) le module au carré du champ électrique et nous retiendrons donc que pour une onde plane :

$$I = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = E_0^2 \quad (1.46)$$

D'une façon beaucoup plus générale, l'intensité que peut mesurer un détecteur est la valeur moyenne de l'intensité de l'onde prise sur le temps de réponse du détecteur T_r soit

$$I_m = \left\langle \vec{E}(t) \cdot \vec{E}^*(t) \right\rangle = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} \vec{E}(t) \cdot \vec{E}^*(t) dt \quad (1.47)$$

ce qui conduit pour l'onde plane monochromatique à

$$I_m = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} \vec{E}_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \cdot \vec{E}_0 e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} dt = E_0^2 \quad (1.48)$$

Il importe de remarquer que l'intensité lumineuse est nécessairement une quantité réelle comme le montre l'introduction du module du champ.

Si l'on travaille avec des champs réels la définition de l'intensité doit être corrigée d'un facteur 2 pour être compatible avec le calcul fait en complexe. De plus pour l'onde

monochromatique périodique de période T_0 le temps d'intégration est ramenée à la période T_0 car intégrer sur une période est équivalent à intégrer sur autant de périodes que l'on veut. On a alors

$$I_m = 2 \langle E^2(t) \rangle = 2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \quad (1.49)$$

soit

$$I_m = E_0^2 \quad (1.50)$$

Pour des champs non stationnaires c'est à dire des champs dont la valeur moyenne dépend de l'origine prise pour faire la mesure on définit l'intensité par

$$I_m = \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = \frac{1}{T_r} \int_t^{t+T_r} \vec{E} \cdot \vec{E}^* d\theta \quad (1.51)$$

En optique l'onde a une pulsation très élevée de l'ordre de $10^{15} \text{rad.s}^{-1}$ soit une période très petite de l'ordre de 10^{-14}s . Les détecteurs usuels ne peuvent pas intégrer l'énergie instantanée à ce rythme. Leur temps de réponse est beaucoup plus grand. L'oeil a par exemple un temps de réponse de l'ordre du 1/10ème de seconde.

Les considérations physiques que nous avons utilisées pour présenter la notion d'intensité lumineuse peuvent être formalisées de façon beaucoup plus mathématique en utilisant le flux du vecteur de Poynting

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (1.52)$$

En tout point de l'espace l'onde électromagnétique émise par la source véhicule de l'énergie. La densité volumique d'énergie en un point quelconque où existe le champ est donnée par

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (1.53)$$

Si l'on tient compte de la valeur de H, il vient

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 v} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} \right) = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \quad (1.54)$$

L'énergie qui est contenue dans un volume élémentaire s'appuyant sur une surface S est

$$dQ = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 S dl = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 S v dt \quad (1.55)$$

et le flux instantané à travers cette surface est donc

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 S v \quad (1.56)$$

Il s'ensuit que l'éclairement de la surface est donné par

$$\mathcal{E} = \frac{\Phi}{S} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 v = n \varepsilon_0 c E^2 \quad (1.57)$$

A une constante près l'éclairement est donc proportionnel au carré du champ E et l'intensité mesurée par le détecteur est proportionnelle à la valeur moyenne de l'éclairement.

Exercices

Exercice n°1

Soit une onde dont les composantes sont données par

$$E = \begin{cases} E_x = Ae^{i(2.5\pi 10^{14}(t - \frac{z}{c}) + \frac{\pi}{4})} \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Déterminer la fréquence, la longueur d'onde, la direction de propagation et la polarisation de cette onde.

Exercice n°2

L'onde plane précédente se propage dans le vide. Que se passe-t-il si l'on interpose entre le point M d'observation et la source S une lame mince d'indice de réfraction n et d'épaisseur e .

Donner l'expression du champ en M .

Exercice n°3

On considère deux ondes planes progressives coplanaires se superposant en un point M de coordonnées (x,z) de leur plan de propagation. sachant que ces deux ondes font respectivement un angle θ_1 et θ_2 avec l'axe des z et que l'on appelle α l'angle formé par les deux directions de propagation déterminer

l'expression du champ en M.

la différence de phase entre ces deux ondes en M

Chapitre 2

Interférences lumineuses

2.1 Définitions

On appelle ondes lumineuses **isochrones** des ondes qui ont la même pulsation ω .

On appelle ondes lumineuses **synchrones** des ondes isochrones présentant un déphasage constant au cours du temps.

Nous avons vu au chapitre précédent que

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.1)$$

Nous pouvons donc affirmer que des ondes isochrones ont la même **longueur d'onde**. La longueur d'onde d'une radiation est la distance parcourue par l'onde en une période temporelle T_0 de l'onde.

$$\lambda_0 = cT_0 \quad (2.2)$$

Pour des ondes lumineuses situées dans le visible, la longueur d'onde des radiations est comprise entre $0.4\mu\text{m}$ pour le violet et $0.75\mu\text{m}$ pour le rouge. La pulsation de ces ondes est de l'ordre de 10^{15}rad/s ce qui correspond à des ondes de période voisine de 10^{-14}s

Le tableau ci-dessous donne la répartition des ondes électromagnétiques en fonction de la longueur d'onde.

λ	nom	nature	f	$E = h\nu$ [eV]
0.01Å	rayons γ		310^{20}Hz	1.2410^6
1Å	rayons X		310^{18}Hz	1.2410^4
100Å à $0.4\mu\text{m}$	U.V.		310^{16}Hz	124
0.4 à $0.75\mu\text{m}$	Visible			0.62
0.75 à $100\mu\text{m}$	I.R.		310^{12}Hz	1.2410^{-3}
1cm	Ondes centimétriques	Radar	310^{10}Hz	
1m	Ondes métriques	VHF	300MHz	
100m	Ondes décamétriques	GO	3MHz	
1km	Ondes kilométriques	PO	300kHz	

2.2 Superposition de deux ondes

2.2.1 Expression de l'intensité

Nous allons considérer le cas de deux ondes isochrones de même état de polarisation. Ces deux ondes proviennent de deux sources S_1 et S_2 et parviennent au point P où elles se superposent.

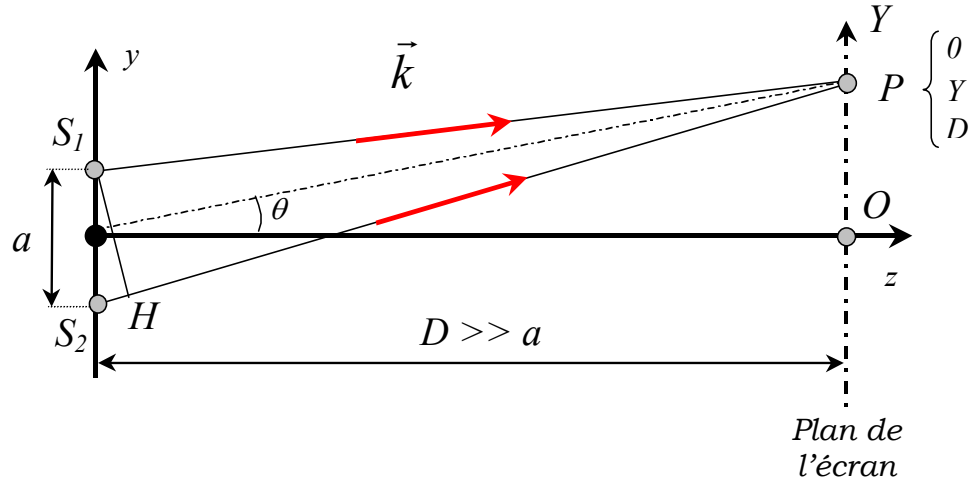


FIG. 2.1 – Superposition de deux ondes en un point P d'un écran d'observation.

Les ondes lumineuses provenant de S_1 et de S_2 ont pour expression en P :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(P, t) &= A_1 e^{i(\omega_0 t - \phi_1(P, t))} \vec{u} \\ \vec{E}_2(P, t) &= A_2 e^{i(\omega_0 t - \phi_2(P, t))} \vec{u}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Il en résulte que le champ résultant en P est la somme vectorielle de ces deux champs et s'écrit :

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_1(P, t) + \vec{E}_2(P, t) = A_1 e^{i(\omega_0 t - \phi_1(P, t))} \vec{u} + A_2 e^{i(\omega_0 t - \phi_2(P, t))} \vec{u}\quad (2.4)$$

Ce champ a le même état de polarisation que les deux champs incidents. On peut ainsi constater que la polarisation peut donc être omise et que les champs électriques peuvent être assimilés dans un tel cas à des champs vibratoires scalaires.

Le carré du module du champ résultant est donc donné par :

$$E^2(P, t) = E(P, t)E^*(P, t)\quad (2.5)$$

ce qui conduit à :

$$E^2(P, t) = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\phi_1(P, t) - \phi_2(P, t))} + e^{-i(\phi_1(P, t) - \phi_2(P, t))})\quad (2.6)$$

En appelant $\Delta\phi(P, t)$ la différence de phase entre les deux ondes on voit que le module au carré du champ résultant en P s'écrit :

$$E^2(P, t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi(P, t) \quad (2.7)$$

Les deux ondes provenant des deux sources S_1 et S_2 interfèrent en P et conduisent à un champ résultant qui peut varier en fonction de la différence de phase entre les deux ondes issues de S_1 et de S_2 . Lorsque les deux ondes arrivent en phase au point P l'amplitude du champ est maximale et vaut $A_1 + A_2$. Si elles arrivent en opposition de phase en P l'amplitude du champ est minimale et vaut $A_1 - A_2$. De façon générale l'intensité lumineuse qui est proportionnelle au carré du module du champ est susceptible de fluctuer avec la différence de phase des deux ondes incidentes. L'intensité que l'on mesure à l'aide d'un détecteur est intégrée sur le temps de réponse du détecteur ce qui équivaut à faire la moyenne temporelle du carré du module du champ soit :

$$I_m = \langle E^2(P, t) \rangle = \langle A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi(P, t) \rangle \quad (2.8)$$

Dans cette expression, les crochets signifient que l'on réalise la moyenne de cette quantité sur l'intervalle de temps de mesure soit :

$$\langle E^2(P, t) \rangle = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} E^2(P, t) dt \quad (2.9)$$

La moyenne d'une somme étant la somme des moyennes nous obtenons :

$$I_m = \langle E^2(P, t) \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle + 2A_1A_2 \langle \cos \Delta\phi(P, t) \rangle \quad (2.10)$$

ce qui entraîne

$$I_m(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \langle \cos \Delta\phi(P, t) \rangle$$

Nous voyons donc que l'intensité résultant de la superposition de deux ondes dépend essentiellement de la valeur moyenne des fluctuations temporelles de la phase entre les deux ondes. Il y aura possibilité de voir des **interférences** entre les deux ondes si les fluctuations de phase ne varient pas aléatoirement dans le temps ce qui impose de disposer de sources synchrones.

Pour deux sources **incohérentes**, la différence de phase entre les deux sources varie continuellement dans le temps entre 0 et 2π . Les ondes issues des deux sources seront donc incohérentes entre elles après s'être propagées et $\Delta\phi(P, t)$ sera donc une variable aléatoire. Il en résulte que le cosinus de cet angle varie entre 1 et -1 et qu'en moyenne dans le temps il vaut 0. Pour des sources incohérentes, l'intensité détectée est donc :

$$I = I_1 + I_2 \quad (2.11)$$

c'est à dire la somme des intensités provenant de chaque ondes.

Nous retiendrons donc que :

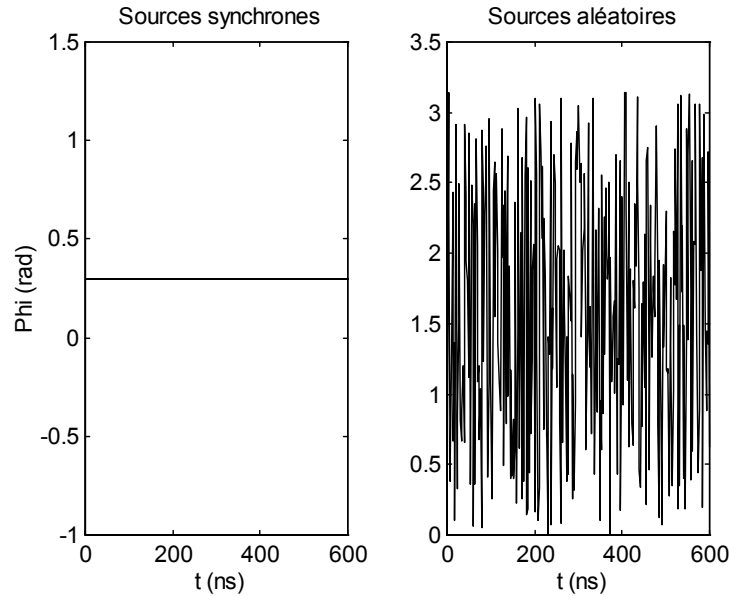


FIG. 2.2 – Représentation de la différence de phase pour deux sources lumineuses synchrones (à gauche) et pour deux sources aléatoires (à droite).

La superposition de deux ondes lumineuses issues de deux sources incohérentes produit sur un écran une intensité uniforme égale à la somme des intensités de ces deux ondes

Si les sources sont synchrones la différence de phase est constante au cours du temps et la moyenne temporelle du cosinus est égale à :

$$\langle \cos \Delta\phi(P, t) \rangle = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} \cos \Delta\phi(P, t) dt = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} \cos \Delta\phi(P, t) dt = \cos \Delta\phi(P) \quad (2.12)$$

Il en résulte que l'intensité mesurée n'est plus la somme des intensités de chaque onde mais :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi(P) \quad (2.13)$$

Nous retiendrons donc que :

L'intensité issue de la superposition de deux ondes cohérentes n'est pas uniforme mais présente des maxima et minima d'intensité appelés franges d'interférences. L'intensité au point P s'obtient en calculant le module au carré de la somme des amplitudes complexes en P.

Nous allons maintenant étudier ce que l'on peut attendre de l'équation 2.13

2.2.2 Conséquences

Nous venons de montrer que la superposition de deux ondes produit une intensité régie par l'équation 2.13

$$I_m(P) = \left\langle \left| \vec{E}(P, t) \right|^2 \right\rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\phi(P, t) \rangle .$$

Il nous faut maintenant exprimer la différence de phase entre les ondes arrivant en P à l'instant t . Cette différence de phase est la somme d'une différence de phase due à la propagation des ondes et d'une éventuelle différence de phase due à l'incohérence des sources.

$$\Delta\phi(P, t) = \left[\vec{k} \cdot \overrightarrow{S_2 P} - \vec{k} \cdot \overrightarrow{S_1 P} \right] + [\varphi(S_1, t - \tau_1) - \varphi(S_2, t - \tau_2)] \quad (2.14)$$

Supposons que les ondes soient synchrones à la source, alors

$$\Delta\phi(P) = \left[\vec{k} \cdot \overrightarrow{S_2 P} - \vec{k} \cdot \overrightarrow{S_1 P} \right] = \vec{k} \cdot \left(\overrightarrow{S_2 P} - \overrightarrow{S_1 P} \right) \quad (2.15)$$

Si les deux sources ont même intensité, l'intensité en P devient

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi(P)) = 2I_0 \left[1 + \cos \vec{k} \cdot \left(\overrightarrow{S_2 P} - \overrightarrow{S_1 P} \right) \right] . \quad (2.16)$$

Pour des ondes planes se propageant dans la direction de l'axe z nous avons

$$\vec{k} \cdot \left(\overrightarrow{S_2 P} - \overrightarrow{S_1 P} \right) = k(z_2 - z_1) \quad (2.17)$$

ce qui conduit à

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi(P)) = 2I_0 [1 + \cos k(z_2 - z_1)] . \quad (2.18)$$

L'intensité en P ne dépend alors que de la différence de trajet parcourue par les deux ondes pour aller de S_2 ou S_1 en P . Cette différence de trajet est appelée tout naturellement la **différence de marche** et est notée δ . Nous voyons ainsi que la différence de phase entre les deux ondes arrivant au point P s'exprime par

$$\phi(P) = k\delta(P) = \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda} \quad (2.19)$$

ce qui conduit à

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi(P)) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda} \right] . \quad (2.20)$$

L'équation 2.20 montre que selon la valeur de la différence de marche $\delta(P)$, l'intensité mesurée en P peut être aussi bien :

- nulle si $\delta(P) = (2p + 1)\lambda/2$ car dans ce cas $\phi(P) = (2p + 1)\pi$ et les ondes arrivent en P en **opposition de phase**
- maximale et égale à $4I_0$ si $\delta(P) = p\lambda$ car dans ce cas $\phi(P) = 2p\pi$ et les ondes arrivent en **phase** en P .

Dans le premier cas nous dirons que les ondes interfèrent de façon **destructive** en P alors que dans le second cas elles interfèrent de façon **constructive**.

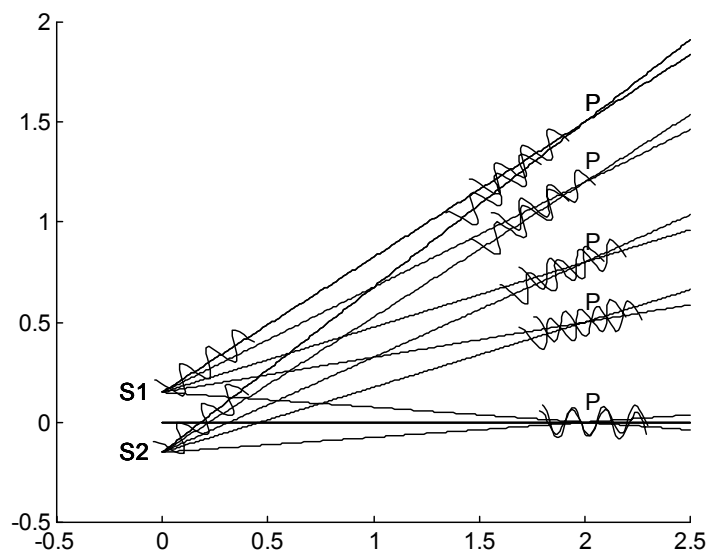


FIG. 2.3 – Représentation schématique de la superposition de deux ondes en différents points P d'un écran. Selon la position de ce point les ondes issues des sources $S1$ et $S2$ arrivent en phase, en opposition de phase, en quadrature ou déphasées de façon quelconque en P .

Il apparaît ainsi une propriété remarquable de cette approche qui est la suivante :

”La superposition de deux ondes lumineuses synchrones peut soit produire de l'obscurité soit une intensité lumineuse supérieure à la somme des intensités de chaque source !!!”

Cette propriété peu banale constitue le phénomène d'interférences lumineuses. L'observation expérimentale d'un tel phénomène prouve la nature ondulatoire de la lumière. En d'autres termes, si la lumière est bien une onde nous devons donc pouvoir le vérifier expérimentalement en réalisant des interférences.

Il faut rendre hommage ici à Young et à Fresnel qui au 19^{ème} siècle ont mis pour la première fois en évidence la nature ondulatoire de la lumière. Newton avait au 17^{ème} siècle réfuté cette hypothèse et il était admis par la communauté scientifique de l'époque que la lumière avait une nature corpusculaire plutôt qu'ondulatoire. Nous allons voir maintenant comment Young s'y est pris pour mettre en évidence le phénomène des interférences lumineuses.

Chapitre 3

Division du front d'onde

3.1 Expérience des fentes d'Young.

3.1.1 Description de l'expérience

Le dispositif imaginé par T. Young présenté sur la figure 3.1 est constitué de deux fentes sources S_1 et S_2 qui émettent de la lumière de façon synchrone et avec la même polarisation. Pour que cette propriété soit vérifiée, Young a eu l'idée géniale d'utiliser une onde plane qu'il a dirigé vers les deux fentes comme le montre la figure 3.1.

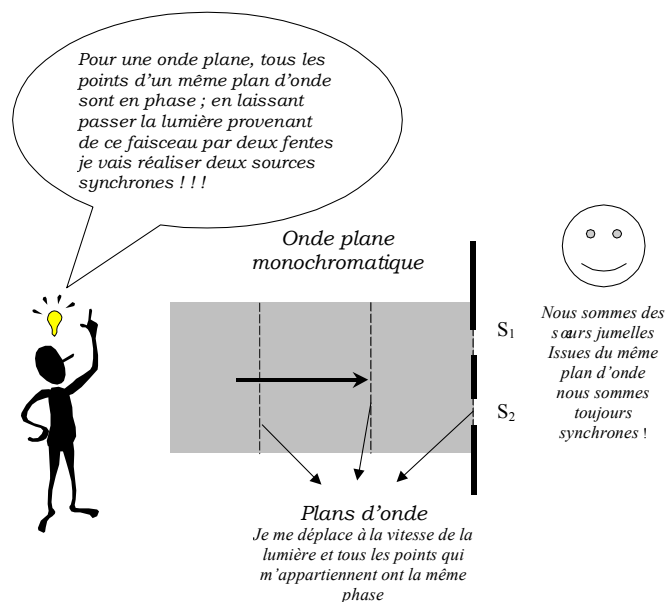


FIG. 3.1 – La réalisation par Young de deux sources S_1 et S_2 synchrones. La méthode consiste à diviser le front d'une onde plane en deux en interposant deux fentes sur le trajet d'un faisceau lumineux parallèle.

Lors du passage par les fentes, l'onde incidente est divisée en deux parties égales

ayant exactement les mêmes caractéristiques. On peut ainsi considérer que T. Young est au travers de cette expérience le père du clonage (optique). A la sortie des fentes, l'onde plane change de direction de propagation comme l'indique la figure 2.1. Ce phénomène appelé **diffraction** sera décrit dans un prochain chapitre. Young a ensuite placé un écran à une distance D grande devant S_1S_2 et a observé une figure appelée figure d'interférences.

Les deux fentes étant très proches l'une de l'autre et l'écran loin des deux sources, les ondes recueillies au point P de l'écran arrivent en P quasiment avec la même direction. En pratique, la distance a est de l'ordre du mm et la distance D est supérieure à 1m. En prenant $a = 1\text{mm}$ et $D = 1\text{m}$, l'angle sous lequel on voit les deux fentes sources du centre de l'écran est

$$\varepsilon = \frac{a}{D} = 10^{-3}\text{rad} \quad (3.1)$$

ce qui correspond à 0.06° . Il s'ensuit que les deux ondes peuvent être considérées avec une assez bonne approximation comme des ondes planes synchrones ayant *même vecteur d'onde* et *même état de polarisation*. Nous préciserons plus tard les conditions de validité de cette approximation.

La figure observée sur un écran placé à $D = 1.5\text{m}$ de deux fentes distantes de $a = 0.5\text{mm}$ pour une onde de longueur d'onde $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ est représentée sur la figure 3.2.

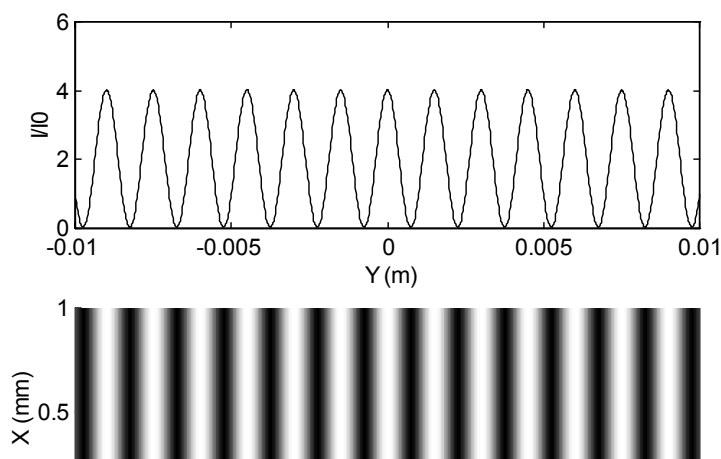


FIG. 3.2 – *Figure d'interférences observée sur un écran à la suite de la superposition des deux ondes issues des sources S_1 et S_2 . L'image du haut représente la façon dont varie l'intensité en fonction de la variable X (éloignement au centre de l'écran). Celle du bas donne une idée de l'image réellement observée.*

L'intensité observée sur l'écran n'est pas uniforme ; elle est constituée d'une succes-

sion de zones sombres (absence de lumière $I = 0$) et de zones brillantes très lumineuses qui forment ce que l'on appelle les **franges d'interférence**. Les franges sont régulièrement espacées et la frange centrale est brillante. L'intensité des franges n'est pas en général aussi uniforme que la figure le laisse prétendre. Nous verrons au chapitre 4 que ce phénomène est la résultat de la diffraction par chaque fente.

3.1.2 Interprétation.

Comme les deux sources S_1 et S_2 sont formées par deux fentes identiques nous inférons que l'amplitude des champs électriques est identique. L'intensité en P résultant de la superposition des deux ondes est donnée par la relation précédente soit :

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi(P)) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi(P)}{2} \quad (3.2)$$

Le calcul de l'intensité en P passe donc maintenant par le calcul du déphasage entre les deux ondes. Rappelons que l'amplitude instantanée des deux ondes incidentes en P s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(P) &= E_{01} e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} \vec{u} \\ \vec{E}_2(P) &= E_{02} e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)} \vec{u} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et que les phases sont obtenues à partir des distances S_1P et S_2P parcourues selon la relation :

$$\begin{aligned} \varphi_1(P, t) &= -kS_1P + \varphi(S_1, t - \tau_1) \\ \varphi_2(P, t) &= -kS_2P + \varphi(S_2, t - \tau_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous avons vu qu'à tout instant t

$$\varphi(S_1, t) = \varphi(S_2, t) \quad (3.5)$$

car les deux sources sont synchrones. Nous allons supposer que cette condition est aussi vérifiée au cours du temps au moins pendant un laps de temps assez grand de sorte que nous imposons aussi que

$$\varphi(S_1, t - \tau_1) = \varphi(S_2, t - \tau_2) \quad (3.6a)$$

Cette condition n'est pas toujours valide et nécessite pour être appréhendée de connaître le temps de cohérence de la source utilisée. En supposant l'équation 3.6a vérifiée nous pouvons conclure que :

$$\varphi_2(P, t) - \varphi_1(P, t) = k(S_2P - S_1P) = k\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (3.7)$$

ou δ est la différence de trajet parcourue par les deux ondes ou **différence de marche**. Si nous nous rapportons à la figure 2.1 nous voyons que $\delta = S_2H$. Cette distance s'exprime à partir de la distance entre les deux sources a . En effet nous voyons que si θ est l'angle sous lequel on voit le point P de S alors :

$$\theta = \frac{Y}{D} \implies S_2H = \delta = a\theta = \frac{aY}{D} \quad (3.8)$$

Il en résulte que l'intensité mesurée en P s'écrit :

$$I(P) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a Y}{\lambda D} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} \quad (3.9)$$

Cette intensité fluctue avec la position du point P et est caractérisée par une figure d'interférences dans laquelle il y a alternance périodique de maxima d'intensité de valeur $4I_0$ et de minima nuls. Ces alternances sont appelées des **franges**. Au centre de l'écran ($Y = 0$) l'intensité est maximale car la différence de marche est évidemment nulle. La frange centrale est donc une frange **brillante**. Les franges brillantes sont observées à chaque fois que la phase est un multiple de π soit à chaque fois que

$$\frac{\pi a Y}{\lambda D} = p\pi \implies Y_p = \frac{p\lambda D}{a} \quad (3.10)$$

La frange n° p est qualifiée de frange **d'ordre p**.

Cette condition est vérifiée aussi à chaque fois que

$$\delta(P) = p\lambda \implies \phi(P) = 2p\pi \quad (3.11)$$

Nous retiendrons donc que :

Les franges brillantes correspondent donc à des ondes qui arrivent en phase en P ou pour lesquelles la différence de marche est un multiple entier de longueurs d'onde.

Les franges sombres sont localisées en

$$\frac{\pi a Y}{\lambda D} = (2p + 1) \frac{\pi}{2} \implies Y_p = \frac{(2p + 1)\lambda D}{2a} \quad (3.12)$$

Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire montrer que les franges sont sombres en P si

$$\delta(P) = (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \implies \phi(P) = (2p + 1)\pi \quad (3.13)$$

Les franges sombres correspondent donc à des ondes qui arrivent en opposition de phase en P ou pour lesquelles la différence de marche est un multiple impair de demi-longueurs d'onde.

3.1.3 Interfrange

La distance qui sépare deux franges brillantes (ou sombres) consécutives définit l'**interfrange** i de la figure d'interférence.

L'interfrange i est donc égal à :

$$i = Y_{k+1} - Y_k = \frac{\lambda D}{a} \quad (3.14)$$

Il est proportionnel à la longueur d'onde et à la distance qui sépare les fentes de l'écran. Plus les fentes sont éloignées l'une de l'autre et plus l'interfrange est petit.

Dans l'exemple que nous avons choisi pour lequel $\lambda = 500\text{nm}$, $a = 0.5\text{mm}$, $D=1.5\text{m}$, nous devons avoir

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{510^{-7} 1.5}{510^{-4}} = 1.510^{-3} m \quad (3.15)$$

ce qui est conforme avec les données de l'expérience présentée Fig. 3.2.

3.1.4 Localisation des franges

Les ondes qui se superposent sur l'écran peuvent se superposer en tous points de l'espace ; on dit que les interférences **ne sont pas localisées** ou qu'elles sont localisées à l'infini. Le champ d'interférences, c'est à dire l'extension des franges dans l'espace, est toujours fini. Nous verrons que le facteur principal qui limite le champ est soit la diffraction par l'ouverture des trous dans le cas d'ondes monochromatiques, soit la faible cohérence temporelle dans le cas d'une source polychromatique.

Il est fréquent d'utiliser pour observer les interférences lumineuses une lentille de distance focale f placée contre le dispositif interférentiel. Dans ce cas les ondes qui se superposent dans la direction θ convergent au point P localisé en $X(P) = f\theta$. Nous voyons donc que l'expression de l'intensité devient :

$$I(P) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a X}{\lambda f} = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi a X}{\lambda f} \right) \quad (3.16)$$

On peut se demander quel est le lieu des points correspondant à une frange brillante d'ordre p . Ce lieu est déterminé par la relation

$$\delta(P) = S_2P - S_1P = p\lambda \quad (3.17)$$

Dans le cas de l'expérience des trous d'Young on peut montrer mathématiquement que ce lieu correspond à des branches d'hyperboles (le segment S_2S_1 est alors parallèle au plan d'observation). La répartition complète du lieu des franges brillantes de même ordre peut se faire dans tous l'espace en imaginant des sources ponctuelles. La figure 3.3 donne le lieu des points d'égale différence de marche par rapport aux deux sources ponctuelles. On peut y observer que pour des trous d'Young S_1S_2 est parallèle au plan d'observation et que ce lieu est formé de branches d'hyperboles.

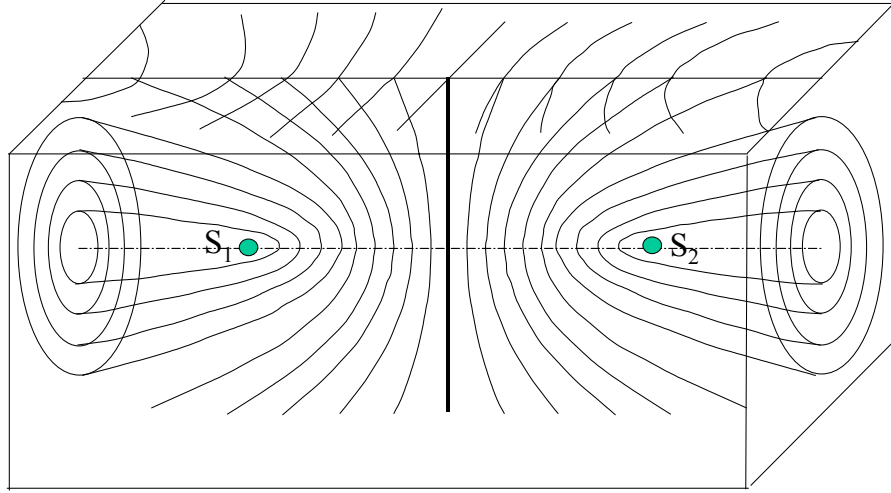


FIG. 3.3 – Localisation spatiale des franges d'interférences engendrées par deux sources synchrones ponctuelles. Les lignes définissent le lieu des franges brillantes. Il est fondamental de bien remarquer le lien entre la symétrie de ces lignes et celles des sources.

3.1.5 Rayons inclinés sur l'axe principal.

Si l'inclinaison est nulle nous avons

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi X a}{\lambda D} \right) \quad (3.18)$$

L'argument du cosinus n'est rien d'autre que la différence de phase entre les ondes issues des sources S_1 et S_2 . Si maintenant on incline les rayons incidents d'un angle α par rapport à l'axe principal passant par le centre des fentes nous sommes tenus d'introduire un déphasage supplémentaire qui tient compte du fait que l'onde qui arrive en S_1 n'est pas en phase avec celle qui arrive en S_2 mais présente un déphasage égal à

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \alpha \quad (3.19)$$

Nous notons que ce déphasage est constant pour autant que l'angle α le soit. Il en résulte que l'intensité en un point P de l'écran devient égale à

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \left\{ \frac{2\pi X a}{\lambda D} + \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \alpha \right\} \right) \quad (3.20)$$

Si l'on suppose que l'onde plane inclinée est obtenue en positionnant une source ponctuelle au foyer d'une lentille convergente de focale f , nous avons alors

$$\sin \alpha \approx \frac{\xi}{f} \quad (3.21)$$

et il s'ensuit que

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} a \left\{ \frac{X}{D} + \frac{\xi}{f} \right\} \right) \quad (3.22)$$

La figure d'interférences est donc décalée du centre de l'écran de $-\frac{\xi D}{f}$.

3.1.6 Interférences en lumière blanche

Si la lumière incidente n'est pas monochromatique, on observe que les franges d'interférences se brouillent dès l'ordre $p=1$. La frange centrale est brillante et le premier ordre est irisé. Ce résultat s'interprète en considérant que chaque photon lumineux de la bande spectrale de la source produit son propre système de franges. Deux photons de longueur d'onde distincte sont incohérents entre eux. Leur différence de phase est aléatoire dans le temps.

Pour une suite discrète de longueur d'onde λ_l , donc de pulsation $\omega_l = 2\pi c/\lambda_l$, le champ scalaire en P issu de la superposition des ondes provenant de S_1 et S_2 est donné par

$$E(P, t) = \sum_l A_l e^{i(\omega_l t - \phi_{1l}(P, t))} + A_l e^{i(\omega_l t - \phi_{2l}(P, t))} = \sum_l A_l e^{i\omega_l t} \left[e^{-i\phi_{1l}(P, t)} + e^{-i\phi_{2l}(P, t)} \right] \quad (3.23)$$

La sommation s'effectue sur toutes les longueurs d'onde contenues dans la source. L'intensité est donnée par

$$I = \left\langle \sum_l A_l e^{i\omega_l t} \left[e^{-i\phi_{1l}(P, t)} + e^{-i\phi_{2l}(P, t)} \right] \sum_m A_m e^{i\omega_m t} \left[e^{-i\phi_{1m}(P, t)} + e^{-i\phi_{2m}(P, t)} \right] \right\rangle \quad (3.24)$$

Pour effectuer ce calcul il faut considérer que :

- les photons de même longueur d'onde sont cohérents entre eux
- les photons de longueurs d'onde différentes sont émis par deux processus distincts donc sans relation de phase à source. Il s'ensuit que dans la double somme seuls les termes pour lesquels $l = m$ persistent. L'intensité est donc donnée par

$$I = \left\langle \sum_l \left| A_l e^{i\omega_l t} \left[e^{-i\phi_{1l}(P, t)} + e^{-i\phi_{2l}(P, t)} \right] \right|^2 \right\rangle = \left\langle \sum_l 2I_l \left[1 + \cos [\phi_{1l}(P, t) - \phi_{2l}(P, t)] \right]^2 \right\rangle \quad (3.25)$$

Comme chaque photon est cohérent avec lui-même la valeur moyenne conduit à

$$I = \sum_l 2I_l \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda_l} \right] \quad (3.26)$$

Ce résultat était prédictible dans la mesure où des photons de longueurs d'onde différentes sont incohérents entre eux, l'intensité mesurée doit être la somme des intensités générées par les sources incohérentes. Chaque photon produit donc son propre système de franges comme le montre la figure ?? pour laquelle $D=1\text{m}$, $a=0.5\text{mm}$. Celles-ci se

superposent sur l'écran. La figure d'interférences est constituée de quelques franges qui sont de moins en moins contrastée au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la frange centrale blanche comme l'indique la figure

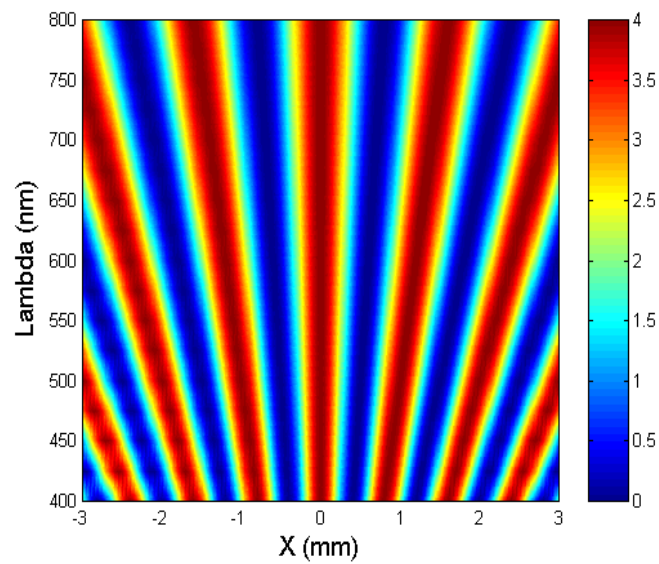


FIG. 3.4 – Evolution des franges d'interférences avec la longueur d'onde pour le spectre visible.

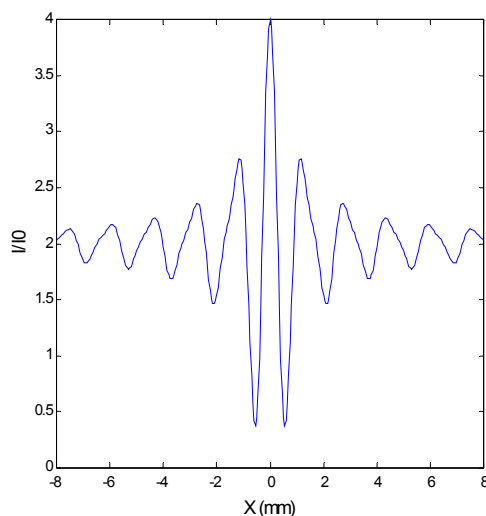


FIG. 3.5 – *Franges d'interférence en lumière blanche obtenues par intégration de l'intensité des franges présentées dans la figure précédente. La frange centrale est blanche et intense. Les franges successives sont de moins en moins contrastées. L'intensité tend vers une intensité moyenne constante.*

A l'ordre zéro toutes les ondes se superposent en phases et la lumière est blanche. A l'ordre 1 il est facile de voir que l'interfrange violet est presque deux fois plus court que celui du rouge. On observe une frange irisée composée des différentes longueurs d'onde de la source. Puis très rapidement les franges se brouillent dès cet ordre passé. On observe un blanc dit d'ordre supérieur.

3.2 Autres dispositifs interférentiels à deux ondes

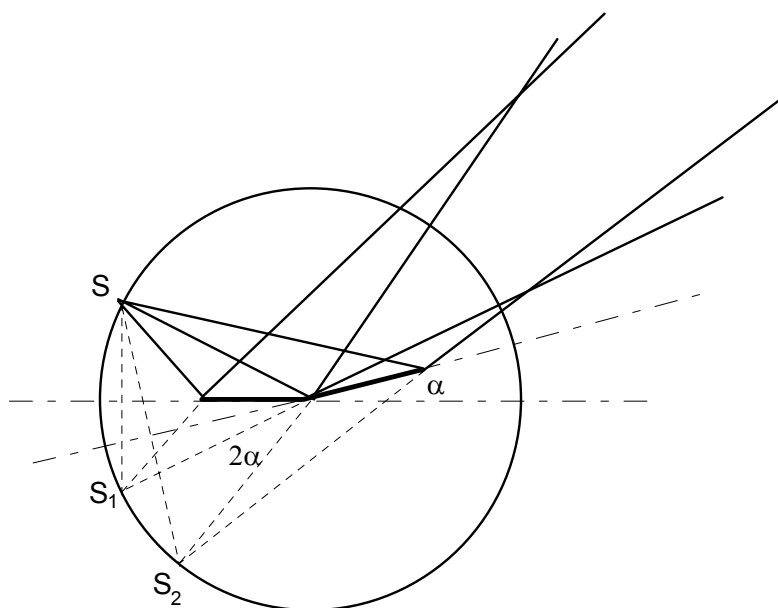
Il existe beaucoup de dispositifs interférentiels à deux ondes. Parmi les plus connus nous distinguerons :

- les miroirs de Fresnel
- les biprismes de Fresnel
- les bilentilles de Billet
- les miroirs de Lloyd

Tous ces dispositifs sont équivalents à ceux des trous d'Young. Pour interpréter la figure d'interférences, il convient en général de déterminer la distance S_1S_2 qui sépare les deux sources.

3.2.1 Les miroirs de Fresnel.

A la même époque que Young, Fresnel a cherché à mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière en faisant interférer des sources lumineuses. Il a imaginé un

FIG. 3.6 – *Le dispositif des miroirs de Fresnel.*

dispositif constitué de deux miroirs réfléchissant la lumière issue d'une source ponctuelle divergente. Le dispositif est représenté sur la figure 3.6.

On remarque sur ce dessin que la lumière issue de la source ponctuelle est réfléchiée sur chacun des deux miroirs et semble donc provenir de deux sources ponctuelles virtuelles dont la séparation dépend de l'angle entre les deux miroirs. Le dispositif produit donc deux sources synchrones qui peuvent interférer entre elles. Soit R , La distance qui sépare la source de l'arête des deux miroirs et α l'angle entre les deux miroirs. Une simple construction géométrique montre que la distance S_1S_2 est donnée par

$$S_1S_2 = 2R\alpha \quad (3.27)$$

3.2.2 Les bilentilles de Billet.

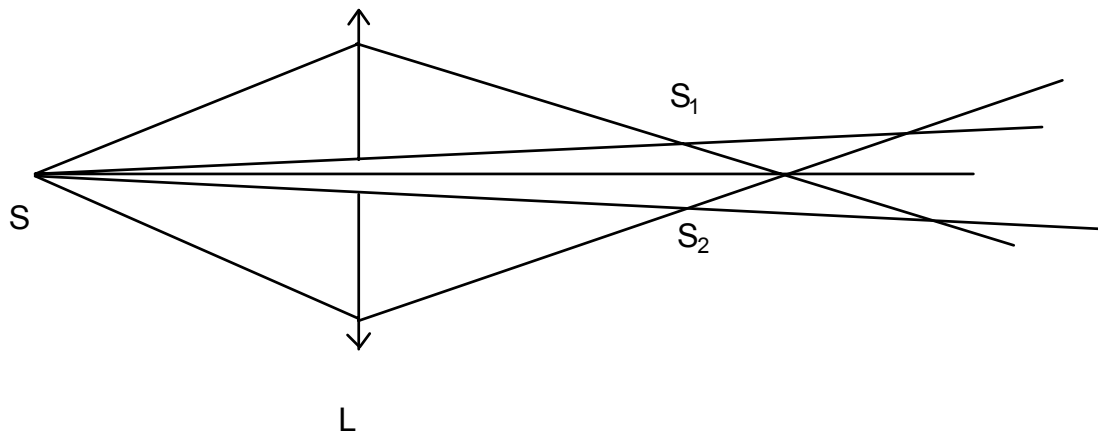
Un système équivalent consiste à utiliser deux demi-lentilles dont le centre optique est légèrement en dehors de l'axe principal. On obtient alors une duplication de la source et les sources dupliquées peuvent ensuite interférer.

Dans le dispositif des bilentilles de Billet, il est utile d'utiliser le montage $4f$ car S_1 et S_2 ont alors la même taille que S . Si l'on appelle θ l'angle au centre $\widehat{S_1SS_2}$ il apparaît immédiatement que

$$S_1S_2 = 4f\theta \quad (3.28)$$

3.2.3 Les biprismes de Fresnel

Il s'agit de deux prismes de très faible angle au sommet montés base contre base. Pour trouver la position des sources secondaires il suffit de considérer un rayon lumineux qui

FIG. 3.7 – *Le système interférentiel des bi-lentilles de Billet.*

passé par le sommet du prisme. La déviation d'un rayon lumineux par un prisme de petit angle au sommet A est donnée par

$$D = (n - 1)A \quad (3.29)$$

3.3 Interférences à N ondes.

3.3.1 Présentation du réseau

Nous étendons le calcul des interférences à deux ondes à celui d'ondes multiples qui se superposent. Ceci fait appel à une structure périodique connue sous le nom de **réseau** représenté sur la figure ???. Un tel dispositif est constitué de N ouvertures périodiquement espacées de b . Nous supposons qu'il est éclairé par une onde plane monochromatique.

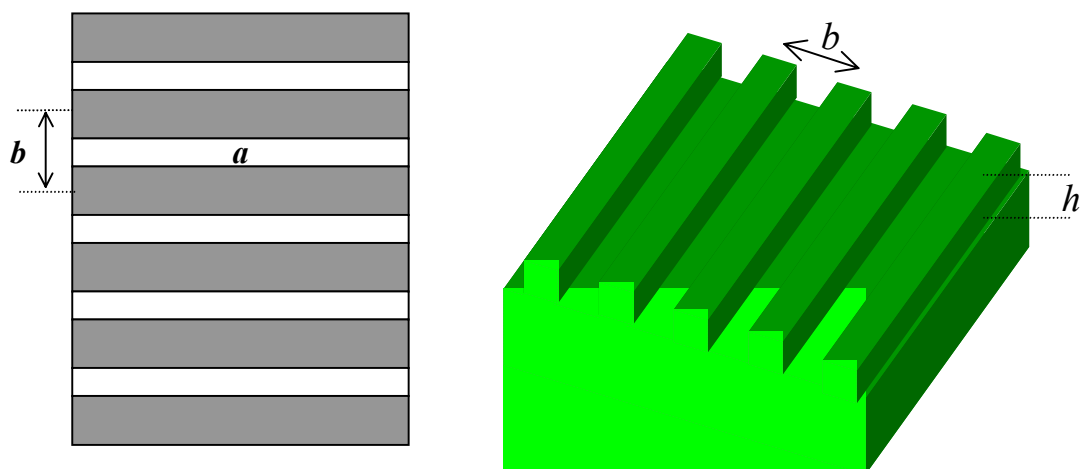


FIG. 3.8 – Représentation schématique d'un réseau constitué de bandes transparentes de largeur a séparées par des bandes sombres. La périodicité du réseau est notée b . Sur la partie droite un réseau gravé.

On définit le nombre de traits N du réseau et le nombre de traits par millimètre $n = N/L$. Les réseaux classiques vont de 100 traits au millimètre à 1600 traits par millimètre pour les plus performants. On remarquera que le nombre de traits par millimètre est égal à :

$$n = \frac{N}{L} = \frac{1}{b} \quad (3.30)$$

Ces N ouvertures diffractent la lumière si bien qu'un point P très éloigné du réseau peut recevoir la superposition de N ondes issues des N ouvertures. Lorsque le point d'observation est très éloigné, ces ondes sont considérées comme planes et l'on fait l'hypothèse qu'elles ont toutes le même vecteur d'onde propagation k_0 . Si l'on regarde dans une direction de diffraction θ , cela signifie que les ondes issues de chaque fente sont déphasées l'une par rapport à l'autre (voir Fig. 3.9).

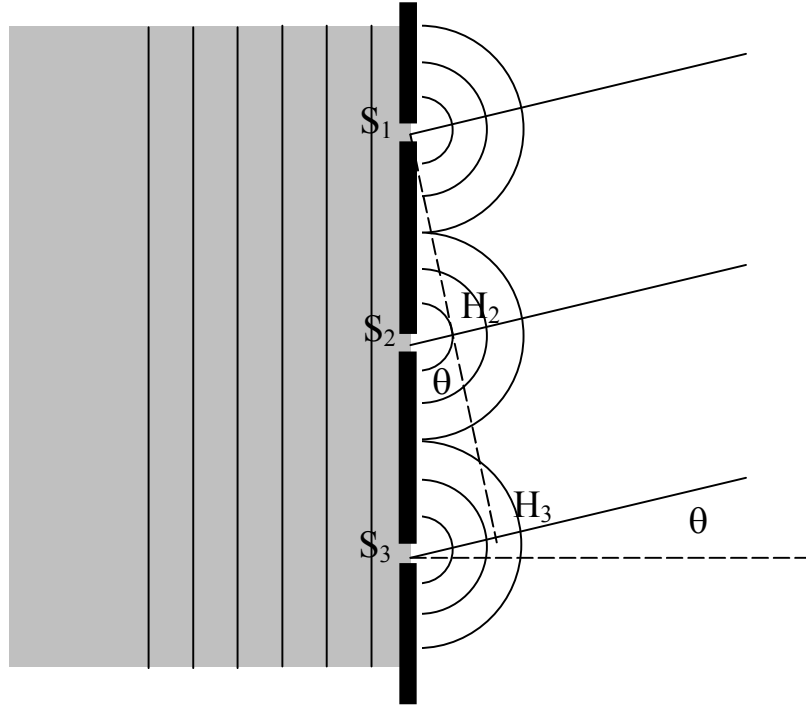


FIG. 3.9 – Transformation d'une onde plane en une onde sphérique lors de son passage au travers d'un réseau plan.

Ainsi l'onde qui émerge de la fente 2 devra pour être dans le même état vibratoire que celui de la fente 1 parcourir la distance supplémentaire $\delta_2 = S_2H = b\theta$. Il en résulte que ces deux ondes sont déphasées de $\varphi_2 = \frac{2\pi\delta_2}{\lambda}$. La périodicité du réseau de fentes fait que la différence de marche entre l'onde issue de la fente 1 et celle issue de la fente m augmente linéairement avec m . Pour la fente numéro m , la différence de marche avec l'onde issue de la fente 1 est donc :

$$\delta_m = (m - 1) b\theta \quad (3.31)$$

Si l'on prend l'origine des phases sur la fente 1, l'amplitude du champ électrique en P est donnée par :

$$E_1(P, t) = A_1 e^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \quad (3.32)$$

Les ondes émises par les fentes d'ordre supérieur sont en avance de phase par rapport à l'onde émise par la fente 1 et le champ électrique émis par la fente p s'écrit donc :

$$E_m(P, t) = A_m e^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P - \varphi(m))} = A_p e^{i(\omega_0 t - \frac{2\pi m b \theta}{\lambda})} \quad (3.33)$$

Nous faisons l'hypothèse que l'onde issue de l'ouverture du haut permet de définir la référence des phases et que les ondes issues des ouvertures successives sont déphasées par rapport à cette onde de référence (voir figure). Le champ en P est donc obtenu en sommant les champs issus de toutes les ouvertures soit :

$$E(P, t) = \sum_{m=1}^N E_m(P, t) = \sum_{m=1}^N A_m e^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P - \varphi_m(P, t))} \quad (3.34)$$

Comme toutes les ouvertures sont identiques les amplitudes des champs issus de ces ouvertures sont égales et

$$E(P, t) = A e^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \sum_{m=1}^N e^{-i\varphi_m(P, t)} \quad (3.35)$$

3.3.2 Onde incidente non perpendiculaire au plan du réseau.

Si l'onde plane incidente n'arrive pas perpendiculairement au plan du réseau, il faut tenir compte dans le calcul de la différence de phase entre deux ondes successives d'une différence de marche $\delta = AS$ supplémentaire comme l'indique la figure. La différence de marche totale entre les deux ondes passant par deux fentes consécutives est donnée par :

$$\delta = AS + SB \quad (3.36)$$

soit

$$\delta = b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) \quad (3.37)$$

Il importe de noter la convention de signes utilisée pour ce type de calcul. Comme en optique géométrique l'angle est toujours orienté de l'axe optique du système vers le rayon lumineux. Il s'ensuit que θ_d est positif alors que θ_0 est négatif ce qui explique le signe - dans la relation précédente.

Les ondes issues des différentes fentes du réseau interféreront constructivement si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde c'est à dire si

$$b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) = p\lambda \quad (3.38)$$

Cette relation peut aussi être exprimée à la partir du déphasage entre les ondes soit

$$\frac{2\pi}{\lambda} b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) = 2p\pi \quad (3.39)$$

La relation 3.38 est appelée **relation fondamentale** du réseau. Elle permet de déterminer dans quelle direction par rapport au faisceau incident le faisceau émergent est observé avec une intensité maximale. Le nombre p est appelé **ordre de la déviation**. Ainsi à l'ordre 0 le faisceau incident est dans la même direction que le faisceau émergent.

Dès que p diffère de 0, le faisceau émergent est dévié dans une direction qui dépend de la longueur d'onde. On dit pour cette raison que le réseau disperse la lumière. Nous y reviendrons un peu plus tard.

3.3.3 Calcul de la figure d'interférences.

Un observateur regardant à travers un réseau dans la direction ϕ recevra donc une onde dont l'amplitude sera la somme des amplitudes de chaque onde émise par chaque fente affectées d'un terme de phase qui traduit la différence de marche existant entre ces ondes. L'amplitude totale est donnée par :

$$E = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)}(1 + e^{-i\phi} + e^{-2i\phi} + \dots + e^{-(N-1)i\phi}) \quad (3.40)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$E = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \frac{e^{-i\frac{N\phi}{2}} e^{i\frac{N\phi}{2}} - e^{-i\frac{N\phi}{2}}}{e^{-i\frac{\phi}{2}} e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}} \quad (3.41)$$

Cette relation peut se transformer en :

$$E = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 S_1 P)} \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \quad (3.42)$$

et l'intensité s'écrit :

$$I(\phi) = EE^* = A^2 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (3.43)$$

La figure d'interférence est caractérisée par :

- des maxima principaux d'amplitude proportionnelle à N^2
- $N - 2$ maxima secondaires de très faible amplitude
- $N - 1$ minima nuls

ou N représente le nombre de fentes (ou de traits) illuminées par le faisceau incident.

La position des maxima principaux est obtenue en annulant la valeur des deux sinus ce qui correspond à la condition d'annulation du sinus qui se trouve au dénominateur c'est à dire :

$$\phi = 2p\pi \quad (3.44)$$

La position des minima est obtenue en annulant le sinus qui se trouve au numérateur sans annuler celui qui est au dénominateur (puisque quand les deux s'annulent en même temps on obtient un maximum principal) soit à chaque fois que :

$$\phi = \frac{2m\pi}{N} \quad (3.45)$$

La position des maxima secondaires est obtenue en écrivant que le sinus du numérateur vaut 1 soit :

$$\phi = \frac{(2m + 1)\pi}{2N} \quad (3.46)$$

Cette condition n'est vérifiée qu'entre les minima ce qui impose d'éliminer deux valeurs à savoir la valeur correspondant à $m = 0$ et celle correspondant à $m = N - 1$

qui conduisent à des maxima secondaires situés entre les maxima principaux et le premier (respectivement dernier) minimum nul. En toute rigueur la position des maxima secondaires est obtenue en annulant la dérivée de l'intensité ce qui conduit à la relation suivante :

$$\frac{dI}{d\phi} = 0 \implies \left(N \cos \frac{N\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{N\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{N\phi}{2} = 0 \quad (3.47)$$

soit

$$\tan N \frac{\phi}{2} = N \tan \frac{\phi}{2} \quad (3.48)$$

Cette équation est une équation transcendante en ϕ et ne peut être résolue que numériquement. Nous donnons un exemple de résolution graphique de cette relation sur la figure 3.10 dans le cas où $N=5$.

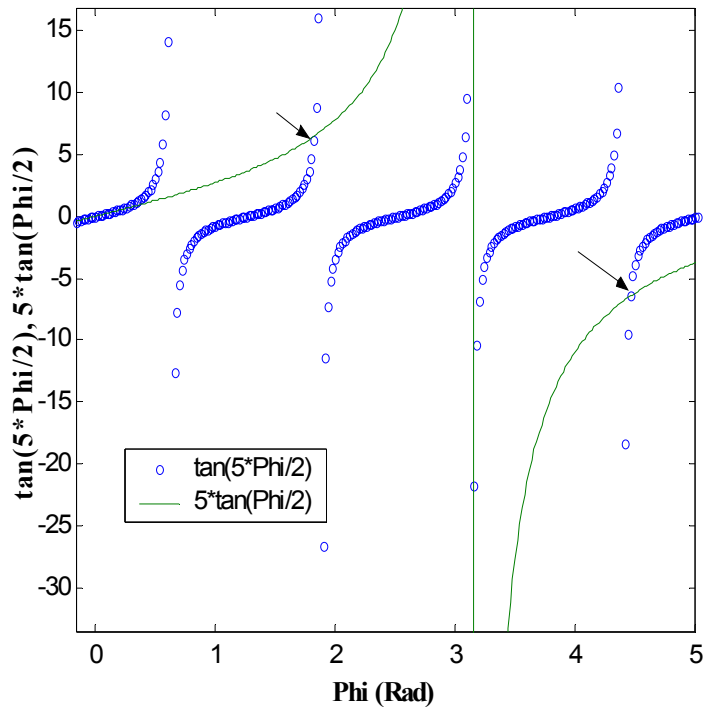


FIG. 3.10 – Représentation graphique de la résolution de l'équation transcendante d'un réseau contenant 5 fentes

Nous observons qu'il existe en dehors de 0 et de 2π , 2 zéros (marqués par les flèches sur la figure 3.10) localisés en $3\pi/5$, et $7\pi/5$ ce qui correspond à la présence dans la courbe d'intensité de $N - 2$ maxima secondaires.

La figure?? correspond à l'intensité calculée d'une figure d'interférences à 5 fentes.

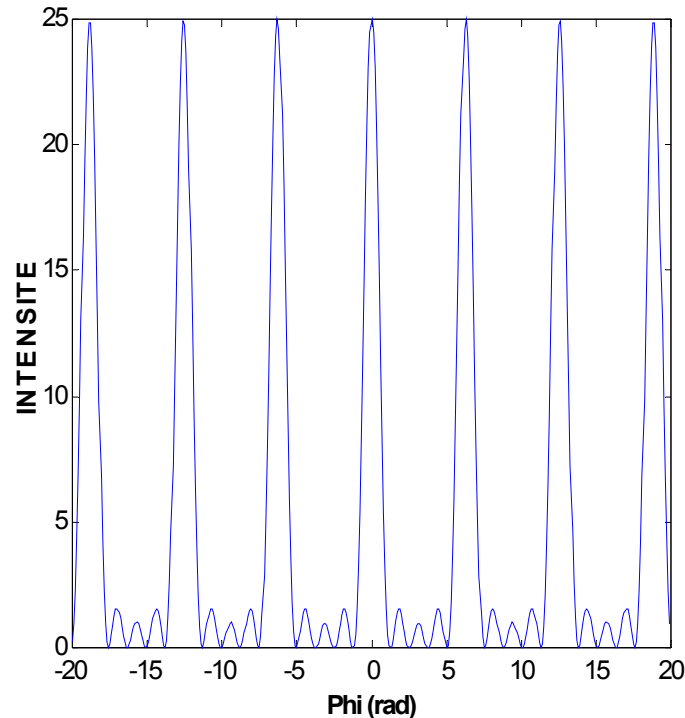


FIG. 3.11 – Représentation de l'intensité diffractée par un réseau comportant 5 fentes. On note la présence de 3 maxima secondaires entre chaque maximum principal. Les maxima principaux sont observés à chaque fois que ϕ est un multiple de 2π . L'intensité ne décroît pas avec l'angle car la diffraction n'est pas prise en compte.

On voit immédiatement sur la figure d'interférences que la lumière issue d'un réseau est constituée de pics très intenses à chaque fois que le déphasage entre les ondes issues de chaque fente est un multiple de 2π . L'effet est d'autant plus intense qu'il y a plus de traits éclairés sur le réseau puisque l'intensité est proportionnelle à N^2 . Toutefois il faut remarquer que si le nombre de traits par mm augmente cela signifie que le réseau est constitué d'ouvertures de plus en plus fines ce qui nuit à la quantité de lumière qui traverse le réseau. Le réseau devient de moins en moins lumineux car l'intensité I_0 de l'onde émergente décroît avec l'ouverture des fentes.

Le calcul précédent est simplifié en ce sens qu'il ne tient pas compte de la contribution de la diffraction par chaque fente du réseau et ne prend en compte que la contribution des interférences entre les sources. Si l'on tient compte de la diffraction par chaque fente on peut alors expliquer la perte de luminosité.

3.3.4 Utilité des réseaux : dispersion de la lumière

L'équation fondamentale des réseaux s'écrit :

$$b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) = p\lambda \quad (3.49)$$

Elle montre que le faisceau incident est dévié sous un angle θ_d qui dépend de :

- de l'ordre d'observation p
- de la longueur d'onde λ

A l'ordre 0 il n'y a pas de déviation et la longueur d'onde n'intervient pas. Pour p différent de zéro, la déviation augmente avec l'ordre d'observation et avec la longueur d'onde. Lorsque le faisceau incident est monochromatique seul l'influence de l'ordre peut être observée. La figure a l'allure suivante :

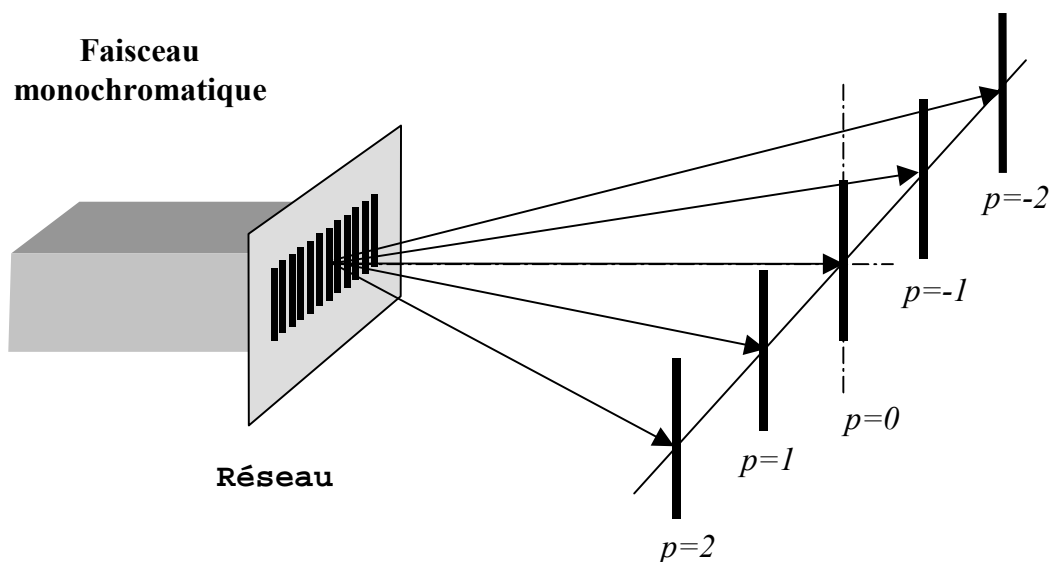


FIG. 3.12 – *Dipersion de la lumière monochromatique par un réseau; on peut observer les maxima principaux de l'ordre -2 à l'ordre 2*

Lorsque la lumière est polychromatique, toutes les longueurs d'onde sont regroupées à l'ordre zéro. Aux ordres supérieurs, les différentes longueurs d'ondes qui composent la lumière sont d'autant plus déviées qu'elles sont élevées et le diagramme a l'allure suivante :

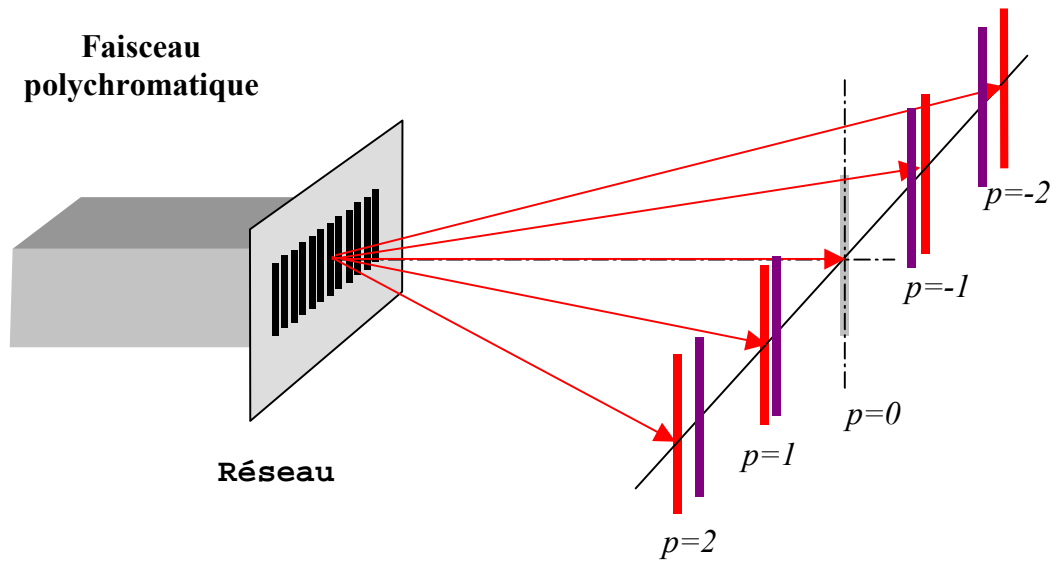


FIG. 3.13 – Dispersion de la lumière polychromatique par un réseau. Il importe de noter qu'à l'ordre zéro il n'y a pas de dispersion alors qu'aux ordres suivants la lumière est d'autant plus déviée que la longueur d'onde est grande

Le phénomène observé est appelé phénomène de dispersion de la lumière polychromatique. Ce phénomène est également visible avec un prisme qui est cependant moins dispersif que le réseau.

L'aptitude du réseau à disperser la lumière est mise à profit pour analyser la nature des sources lumineuses. C'est ainsi que les étoiles ont une composition qui peut déterminée par analyse spectrale à travers un réseau. En effet le spectre de nombreuses sources est un spectre de raies dont les longueurs d'onde sont caractéristiques de l'élément qui constitue la source. Un réseau donne directement la densité spectrale d'une source pour peu que l'axe de déviation soit gradué en longueur d'onde.

Le réseau permet donc de déterminer des longueurs d'onde. Il permet en outre de sélectionner dans un spectre certaines longueurs d'onde en utilisant des fentes.

3.3.5 Pouvoir de dispersion d'un réseau.

On appelle pouvoir dispersif d'un réseau son aptitude à disperser des longueurs d'onde. Mathématiquement le pouvoir dispersif est défini par :

$$\frac{d\theta_d}{d\lambda} \quad (3.50)$$

Cette quantité peut être calculée en différentiant l'équation fondamentale. En effet nous avons :

$$\begin{aligned} b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) &= p\lambda \\ bd(\sin \theta_d) &= pd\lambda \Rightarrow \frac{d\theta_d}{d\lambda} = \frac{pn}{\cos \theta_d} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le pouvoir dispersif est aux petits angles pratiquement égal à pn et augmente avec l'ordre et le nombre de traits par millimètre. Il est nul à l'ordre zéro ce qui montre qu'il est impossible de disperser la lumière à l'ordre zéro.

3.3.6 Réseau au minimum de déviation.

La déviation du faisceau incident peut être exprimée en fonction des angles d'incidence et d'émergence du faisceau. Elle est donnée par :

$$D = \theta_d - \theta_0 \quad (3.52)$$

avec $\theta_0 < 0$.

Cette quantité varie en fonction de l'angle d'incidence θ_0 et passe par un minimum lorsque :

$$\frac{dD}{d\theta_0} = 0 = \frac{d\theta_d}{d\theta_0} - 1 \Rightarrow d\theta_d = d\theta_0 \quad (3.53)$$

En outre la différentielle de l'équation du réseau donne puisque λ est fixe :

$$\cos \theta_d d\theta_d - \cos \theta d\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta_d = \cos \theta \quad (3.54)$$

On en déduit que le minimum de déviation est atteint si :

$$\theta_d = \theta_0 \quad \text{ou} \quad \theta_d = -\theta_0 \quad (3.55)$$

Seule la solution négative est raisonnable puisque l'autre correspond à une déviation nulle ce qui impose :

$$\theta_d = -\theta_0 \Rightarrow D_m = 2\theta_d \quad (3.56)$$

En reportant cette relation dans l'équation fondamentale, on trouve que la longueur d'onde est reliée au minimum de déviation par :

$$2b \sin \frac{D_m}{2} = p\lambda \Rightarrow 2 \sin \frac{D_m}{2} = pn\lambda \quad (3.57)$$

où $n = 1/b$ désigne le nombre de traits par millimètres du réseau.

Cette relation montre que l'on peut déterminer de façon très précise la longueur d'onde d'une radiation en se plaçant au minimum de déviation. Il suffit pour cela de connaître le nombre n de traits par millimètre du réseau et l'ordre p .

3.3.7 Pouvoir de résolution du réseau.

Le pouvoir de résolution d'un réseau est l'aptitude du réseau à séparer deux longueurs d'onde. Il est défini par le **critère de Rayleigh** qui considère que deux longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ sont séparables si le maximum de l'une ($\lambda + d\lambda$) est à la position du premier minimum nul de l'autre (λ).

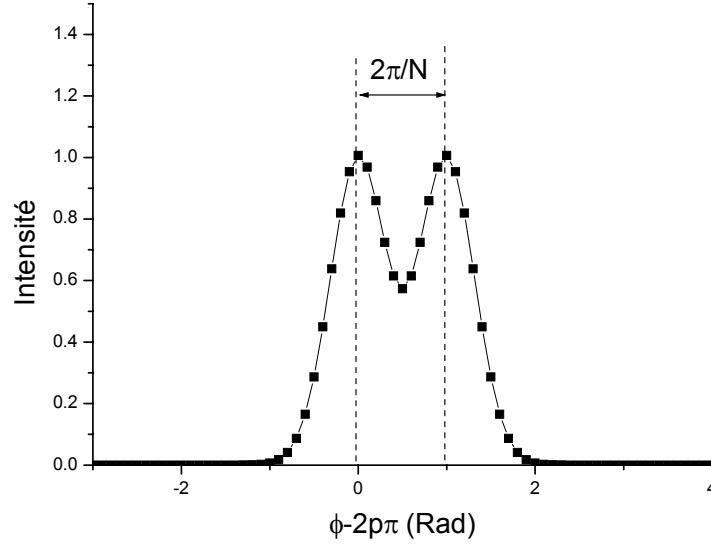


FIG. 3.14 – Représentation schématique du critère de Rayleigh pour la séparation de deux longueurs d'onde.

Si l'on se place à l'ordre p pour la radiation λ , la position du premier minimum nul correspond à un déphasage :

$$\phi_{\min}(\lambda) = 2p\pi + \frac{2\pi}{N} \quad (3.58)$$

A l'ordre p et pour la longueur d'onde λ , on observe un maximum si

$$\phi_{\max}(\lambda) = \frac{2\pi b(\sin \theta_d - \sin \theta_0)}{\lambda} = 2p\pi \quad (3.59)$$

Par différentiation de cette relation on obtient à λ **fixé** la différentielle de la différence de phase qui donne de combien on doit changer l'angle de diffraction θ_d pour changer la phase d'une quantité $d\phi$

$$d\phi = \frac{2\pi b \cos \theta_d d\theta_d}{\lambda} \quad (3.60)$$

Ce changement de phase est de $2\pi/N$ pour passer du maximum au minimum nul immédiatement voisin. Le critère de Rayleigh impose que

$$d\phi = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi b \cos \theta_d d\theta_d}{\lambda} \implies b \cos \theta_d d\theta_d = \frac{\lambda}{N} \quad (3.61)$$

D'autre part si à **ordre fixe** p on change la longueur d'onde, la relation fondamentale des réseaux impose que

$$b(\sin \theta_d - \sin \theta_0) = p\lambda \implies b \cos \theta_d d\theta_d = p d\lambda \quad (3.62)$$

Par identification il s'ensuit que le pouvoir de résolution R peut s'écrire

$$pd\lambda = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow R = \left| \frac{\lambda}{d\lambda} \right| = pN \quad (3.63)$$

On observe ainsi que le pouvoir de résolution augmente avec l'ordre p et ne dépend que du nombre N de traits éclairés par la lumière incidente.

Pour un réseau contenant $n=1000$ traits/mm éclairé sur 3mm et en se plaçant à l'ordre 1 nous avons :

$$R = 3000 \quad (3.64)$$

ce qui conduit à séparer pour une longueur d'onde $\lambda=589.6$ nm un $d\lambda$ de :

$$d\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{589.6}{3000} \approx 0.2\text{nm} \quad (3.65)$$

Ce calcul montre ainsi que l'on peut théoriquement séparer le doublet du sodium (0.6nm) avec un tel réseau à l'ordre 1. Toutefois la résolution d'un réseau dépend beaucoup de la façon dont il est éclairé. Dans les spectrographes à réseau, la largeur de la fente incidente joue un rôle primordial sur le pouvoir séparateur. Cette fente doit être suffisamment fine pour que les radiations soient séparables.

Chapitre 4

Division d'amplitude

Dans le chapitre précédent nous avons vu comment traiter le problème de la superposition de deux ondes lumineuses issues d'un même front d'onde dont on en prélevait deux parties afin de générer deux sources secondaires synchrones par ce que l'on pourrait appeler la méthode du clonage optique. Le champ d'interférences dans ce cas n'est pas limité et les interférences sont dites non localisées. Il existe cependant une autre façon de produire des interférences en utilisant la **division de l'amplitude** d'une onde qui, partiellement réfléchiée et transmise sur un dispositif, peut se recombiner pour former des interférences. On montre dans ce cas que les interférences sont **localisées** soit sur le dispositif soit à l'infini. La division d'amplitude est sans aucun doute la méthode interférentielle qui offre le plus d'applications potentielles et qui se manifeste le plus souvent de façon éclatante comme sur les bulles de savon, les taches d'huile ou les ailes des papillons.

4.1 Interférences par des lames minces

4.1.1 Présentation de l'expérience

Nous considérons une lame mince dont les deux faces sont rigoureusement parallèles entre elles que l'on éclaire par une source monochromatique en incidence normale placée au dessus de la lame. Le phénomène est observé en réflexion (ou en transmission) sur un écran placé à grande distance de la lame si la source est étendue. La source S se trouve dans le milieu 0, la lame dans le milieu 1 et le milieu du bas est le milieu 2.

On observe une figure d'interférences constituée d'anneaux sombres et brillants concentriques dont le diamètre diminue quand l'épaisseur e de la lame augmente. L'utilisation d'une lentille permet de projeter les anneaux sur un écran placé à la distance focale f de la lentille de projection. Les anneaux sont aussi visibles à l'œil nu puisque le cristallin de l'œil permet de focaliser les rayons lumineux sur la rétine.

L'observation d'anneaux alternativement sombres et brillants permet d'affirmer que

- il y a interférence entre des ondes qui se superposent après réflexion ou transmission dans la lame mince

- le problème conserve la symétrie de révolution de la source et du plan de la lame en accord avec la loi de Curie. Il n'est donc pas utile de considérer l'ensemble de la figure mais il suffit de se placer dans un plan quelconque contenant la source.

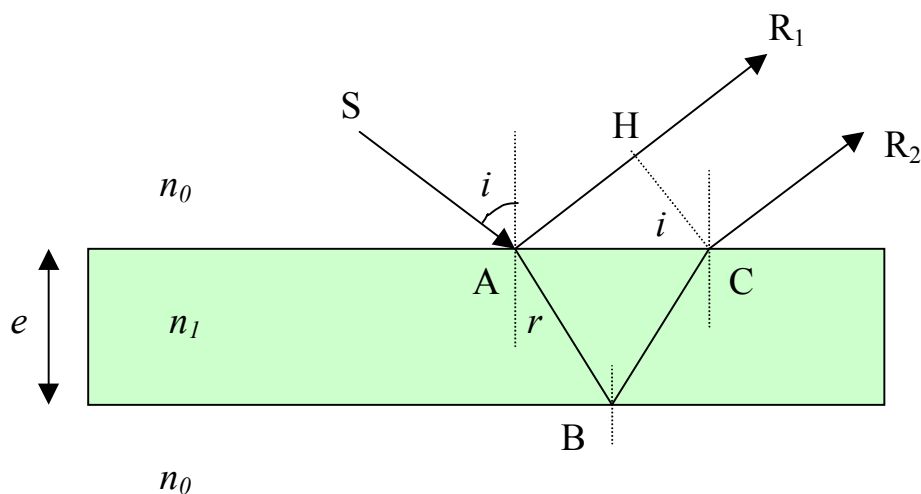


FIG. 4.1 – Illustration de la division d'amplitude au passage aux points A, B et C du faisceau incident sur un dioptre.

- une source étendue permet d'observer le phénomène d'interférences. Nous considérerons par la suite que la source est ponctuelle afin de simplifier les constructions géométriques.

4.1.2 Origine des interférences

L'onde incidente est divergente et est donc constituée d'une infinité de rayons contenus dans le cône d'émission de la source. Un rayon particulier issu de la source (cf. Fig. 4.1) se réfléchit en partie au point A sur le haut de la lame. De façon complémentaire une fraction du rayon incident est transmise à travers la lame en subissant une réfraction avant de se réfléchir au point B du bas de la lame pour ressortir au point C après une seconde réfraction. Au point A, l'onde incidente d'amplitude E_0 subit donc une division d'amplitude puisque le champ réfléchi s'écrit $r_{0,1}E_0$ et le champ transmis $t_{0,1}E_0$. Les coefficients $r_{0,1}$ et $t_{0,1}$ sont respectivement les coefficients de Fresnel de réflexion et de transmission en amplitude du dioptre air-lame. Ces coefficients sont définis par les relations de Fresnel qui traduisent la continuité du champ électrique et de sa dérivée à l'interface. En incidence normale, on peut montrer que

$$\begin{aligned} r_{0,1} &= \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \\ t_{0,1} &= \frac{2n_0}{n_0 + n_1} \end{aligned}$$

avec la relation constitutive de Fresnel

$$1 + r_{0,1} = t_{0,1}$$

Pour le dioptré air-verre, $n_0 = 1$ et $n_1 = 1.5$. Le coefficient de réflexion $r_{0,1}$ est alors négatif et vaut sensiblement 20% ce qui conduit à une transmission de 80% du champ incident dans la lame. Le caractère négatif du coefficient de réflexion traduit le fait que l'onde est réfléchie en opposition de phase avec le champ incident ce qui peut aussi se voir en écrivant

$$r_{0,1} = \left| \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right| e^{i\pi} \quad (4.1)$$

Une réflexion sur le dioptré air-verre se fait donc avec un changement de phase de π

Si le dioptré du bas (noté 2) est le dioptré milieu-air, nous pouvons réutiliser ces relations en échangeant les indices et l'on obtient

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{n_1 - n_0}{n_0 + n_1} \\ t_{1,2} &= \frac{2n_1}{n_0 + n_1} = t_{1,0} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il n'y a pas de changement de phase dans ce cas et l'on voit que $r_{1,2} = -r_{0,1} = r$ et $t_{1,2} = 120\%$ ¹. Il est à première vue surprenant que l'amplitude transmise puisse être supérieure à celle de l'onde incidente mais il n'y a pas de contradiction car ce qui importe c'est la conservation de l'énergie. Il est facile de vérifier que les modules au carré, R et T , des coefficients de réflexion et de transmission vérifient

$$R + T = r_{1,0}r_{1,0}^* + \frac{n_0}{n_1}t_{1,0}t_{1,0}^* = 1$$

Nous voyons donc que le champ incident se divise en amplitude à chaque fois qu'il rencontre un dioptré. Les rayons issus de cette division ont une amplitude qui dépend du nombre de divisions effectuées. Ainsi le rayon incident d'amplitude E_0 se divise en deux rayons d'amplitude $-rE_0$ et $t_{0,1}E_0$ ce qui conduit à un rayon émergent en C d'amplitude $t_{0,1}t_{1,0}rE_0$. Nous pouvons facilement extrapoler le résultat aux rayons qui subissent des réflexions multiples pour trouver que leurs amplitudes seraient $t_{0,1}t_{1,0}r^3E_0$, $t_{0,1}t_{1,0}r^5E_0$ Les rayons émergents ont donc une amplitude qui varie comme -0.2 , 0.2×0.96 , $0.2^3 \times 0.96$, $0.2^5 \times 0.96$. Il s'ensuit que les deux premiers rayons ont des amplitudes équivalentes alors que les rayons suivants ont des amplitudes négligeables. Il est clair que les interférences observées sur l'écran proviennent de la superposition des deux premiers rayons que l'on appellera R_1 et R_2 . Ces deux rayons sont issus

¹On peut facilement s'étonner de voir un coefficient de transmission de 120%. Il faut pour comprendre que cette valeur n'est pas ridicule se rappeler que c'est l'énergie qui se conserve ce qui impose $R+T=1$ en absence d'absorption (milieux diélectriques).

L'énergie est obtenue en écrivant le module du vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Il est facile de vérifier que $S = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E^2| = \frac{cn}{\sqrt{\mu}} |E^2|$. D'autre part le coefficient de réflexion en intensité (en incidence normale) est donné par $R = \frac{S^r}{S^i}$ et le coefficient de transmission en intensité par $T = \frac{S^t}{S^i}$

Pour des milieux non magnétiques on voit que la condition $R + T = 1$ appliquée à l'interface 1,0 conduit à

$$r_{1,0}r_{1,0}^* + \frac{n_0}{n_1}t_{1,0}t_{1,0}^* = 1$$

du même rayon incident dont l'amplitude est divisée en A. Ils présentent donc à leur sortie de la lame une **cohérence parfaite** et ils interfèrent car ils ne parcourent pas le même trajet dans la lame. La connaissance de la différence de marche entre ces deux rayons permet de prédire le rayon des anneaux. Nous noterons que ce phénomène est visible quel que soit le rayon considéré (un rayon qui se divise est forcément cohérent spatialement avec lui même) ce qui permet de comprendre pourquoi une source étendue *a priori* incohérente spatialement permet l'observation des anneaux.

4.1.3 Calcul de la différence de marche

Les rayons R_1 et R_2 sont parallèles entre eux après les diverses réflexions. Pour connaître leur différence de marche il convient d'établir la différence de chemin optique parcourue par les deux ondes à l'issue de leur division en A (cf. Fig.4.1). Nous remarquons qu'à partir des points C et H les deux rayons parcourent les mêmes chemins optiques. La différence de marche est donc

$$\delta = n_1 (AB + BC) - n_0 AH = 2n_1 AB - n_0 AH \quad (4.3)$$

soit

$$\delta = 2n_1 \frac{e}{\cos r} - n_0 AC \sin i = 2n_1 \frac{e}{\cos r} - n_0 2e \tan r \sin i \quad (4.4)$$

En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_0 \sin i = n_1 \sin r$, nous obtenons

$$\delta = 2n_1 e \cos r \quad (4.5)$$

Cette différence de marche correspond à une différence de phase entre le rayon 2 et le rayon 1 qui est égale à

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad (4.6)$$

Il convient de se souvenir alors que le rayon R_1 a subi un déphasage de π à la réflexion ce qui n'est pas le cas du rayon R_2 . Il s'ensuit que

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \pi \quad (4.7)$$

Nous voyons ainsi que la différence de phase entre les deux rayons R_1 et R_2 est obtenue en faisant la somme des différences de phase dues à la propagation et à la réflexion soit

$$\Delta\phi = \Delta\phi_p + \Delta\phi_r \quad \text{avec} \quad \Delta\phi_p = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \Delta\phi_r = \pm\pi \quad (4.8)$$

La différence de marche est donc donnée par

$$\delta = 2n_1 e \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.9)$$

Une façon plus claire de mettre en évidence cette différence de phase est de revenir aux amplitudes des deux rayons. Au point P d'observation sur l'écran se superposent deux rayons dont on peut représenter le champ par

$$E = r_{0,1}E_0e^{i(\omega_0t-\phi_1)} + t_{0,1}t_{1,0}r_{1,0}E_0e^{i(\omega_0t-\phi_2)} \simeq r_{1,0}E_0e^{i\omega_0t} \left(e^{i(-\phi_1\pm\pi)} + e^{-i\phi_2} \right) \quad (4.10)$$

avec $r_{1,0} = -r_{0,1} > 0$. On voit tout de suite que c'est le changement de signe du coefficient de réflexion sur le premier dioptre qui impose le changement additionnel de phase de $\pm\pi$. Nous retiendrons le résultat important suivant :

Lors de la division d'amplitude, des réflexions de nature différente comme la réflexion sur le dioptre air-verre et celle sur le dioptre verre-air entraînent un changement additionnel de phase de $\pm\pi$ à la réflexion. Ce changement de phase est appelé **changement de phase à la réflexion**.

Remarques :

Nous remarquons que le déphasage entre les deux rayons ne dépend que :

- de l'épaisseur de la lame et de son indice
- de l'angle de réfraction dans la lame donc de l'angle d'incidence par application de la loi de Snell-Descartes
- de la longueur d'onde d'observation

Il en résulte que le déphasage est constant pour une lame et une longueur d'onde données si l'angle d'incidence (égal à l'angle de réflexion) est constant soit

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \pi = cste \implies r = cste \implies i = cste \quad (4.11)$$

Le lieu des points d'incidence constante à partir de la source est un cône de demi-angle au sommet i . On voit donc de suite qu'un déphasage constant correspondra à des rayons incidents donc réfléchis ayant tous la **même inclinaison** ce qui explique pourquoi

a) on observe des anneaux si l'on place l'axe principal de la lentille perpendiculairement à la lame

b) les anneaux sont qualifiés de **franges d'égale inclinaison**.

c) les franges sont localisées à l'infini et que les anneaux sont observables dans le plan focal image d'une lentille mince

Nous notons que les anneaux brillants correspondent à un déphasage multiple de 2π ce qui donne leur ordre d'interférence p

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2} \text{ avec } p = 0, 1, 2 \quad (4.12)$$

L'ordre d'interférence est demi-entier pour les anneaux sombres.

D'une façon générale pour un angle r on peut calculer un ordre p quelconque (fractionnaire) qui vérifie

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2}$$

4.1.4 Calcul du rayon des anneaux

Le rayon des anneaux dépend évidemment de leur ordre. A l'ordre p , on a donc

$$p = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_p \pm \frac{1}{2} \quad (4.13)$$

Le calcul précédent montre que l'ordre d'interférence décroît quand r augmente. L'ordre d'interférence est donc plus élevé au centre de la figure. Si nous appelons p_0 cet ordre, il vérifie

$$p_0 = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

Il est clair que cet ordre n'est pas forcément entier ce qui montre que le centre de la figure n'est pas nécessairement brillant. Par exemple si l'on a une lame de verre d'indice $n_1 = 1.5$, d'épaisseur 15000nm et éclairée à $\lambda_0 = 589\text{nm}$ on a :

$$p_0 = 764.0068 \pm 0.5 = 764.5 \text{ ou } 763.5 \quad (4.15)$$

Soit p_1 l'ordre d'interférence qui correspond au premier anneau brillant on a alors

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon > 0 \\ p_0 &\in R \text{ et } p_1 \in N \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dans notre exemple on voit que cela conduit à $\varepsilon = 0.5$ et $p_1 = 764$ ou 763 . Dans ce cas comme l'ordre au centre est de type demi-entier le centre de la figure sera noir.

Soit m le numéro d'un anneau brillant ($m = 1$ est le premier anneau, $m = 2$ le second etc..). Nous voyons que l'ordre p_m de cet anneau diffère du numéro de l'anneau (il est facile de vérifier que $p_1 \neq 1$). Toutefois, il est possible d'écrire que

$$p_m = p_1 - (m - 1) \quad (4.17)$$

A l'ordre p_m qui correspond à l'anneau brillant m on a donc

$$p_m = p_1 - (m - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_m \pm \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

ce qui conduit à

$$p_0 - \varepsilon - (m - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_m \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon + (m - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} (1 - \cos r_m) \quad (4.19)$$

Nous voyons en particulier que la différence de phase qui correspond à l'anneau brillant numéro m est donnée par

$$\Delta\phi_m = 2\pi \left(\frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_m \pm \frac{1}{2} \right) = 2\pi (p_0 - \varepsilon - (m - 1)) \quad (4.20)$$

Si l'on fait l'hypothèse que le rayon angulaire des anneaux est petit alors

$$\begin{aligned} \cos r_m &\simeq 1 - \frac{r_m^2}{2} \\ n_0 i_m &= n_1 r_m \implies r_m = \frac{n_0 i_m}{n_1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Il s'ensuit que le rayon angulaire i_m de réflexion de l'anneau brillant numéro m est donné par

$$\varepsilon + (m - 1) = \frac{2n_1 e}{\lambda_0} \frac{r_m^2}{2} = \frac{n_1 e}{\lambda_0} \left(\frac{n_0 i_m}{n_1} \right)^2 \implies i_m = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{\frac{\lambda_0}{n_1 e} (m - 1 + \varepsilon)} \quad (4.22)$$

Le rayon angulaire d'un anneau sombre suit évidemment la même loi, mais il diffère de celui de l'anneau brillant d'une valeur $1/2$ qui peut être incluse dans l'ordre fractionnaire ε . Du point de vue expérimental il convient de remarquer que la mesure effectuée est toujours celle du rayon de l'anneau et non celle du rayon angulaire. Pour cela on utilise une lentille de grande focale ($f = 1\text{m}$) ou un viseur réglé par autocollimation sur l'infini. Comme le rayon angulaire des anneaux est faible nous pouvons assimiler l'angle de réflexion à sa tangente et comme l'indique la figure il est facile de voir que

$$R_m = f i_m = \frac{f}{n_0} \sqrt{\frac{n_1 \lambda_0}{e} (m - 1 + \varepsilon)} \quad (4.23)$$

Nous rappelons que comme il s'agit d'interférences à deux ondes l'intensité mesurée en un point P de l'écran vérifie

$$I_{mes}(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi(P) \quad (4.24)$$

soit pour des ondes de même intensité

$$I_{mes}(P) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \pi \right) \right) \quad (4.25)$$

ce qui s'exprime en fonction du rayon R des anneaux par

$$I_{mes}(R) = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{4\pi n_1 e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 R}{n_1 f} \right)^2 \right) \pm \pi \right] \right) \quad (4.26)$$

soit

$$I_{mes}(R) = 2I_0 \left(1 - \cos \left[\frac{4\pi n_1 e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 R}{n_1 f} \right)^2 \right) \right] \right) \quad (4.27)$$

La figure 4.2 représente l'intensité normalisée des anneaux d'interférences observés pour une lame mince d'indice $n_1=1.5$ et d'épaisseur $150\mu\text{m}$ éclairée par une lampe à vapeur de sodium en fonction de la distance au centre de l'écran.

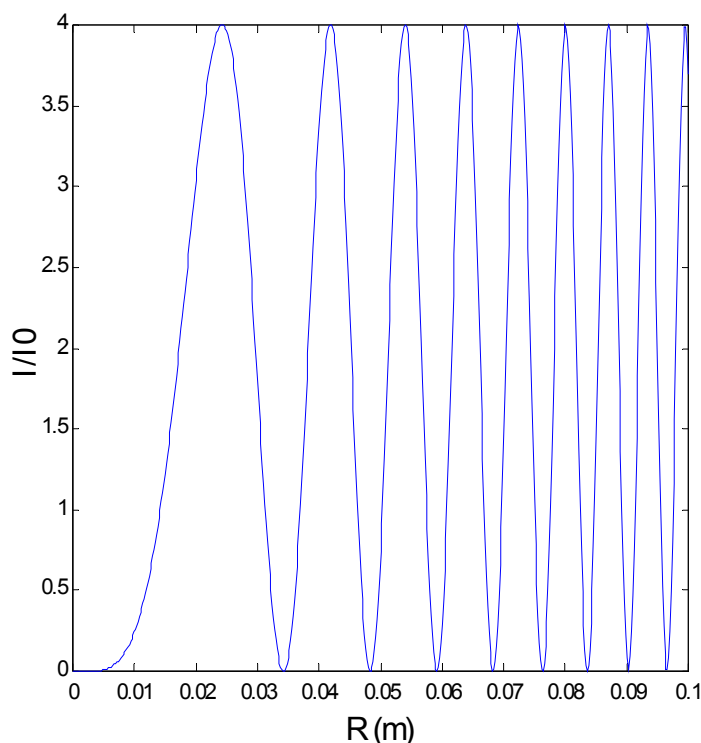


FIG. 4.2 – Représentation de l'intensité des anneaux en fonction de leur position dans le plan focal d'une lentille mince de focale 1m. Les anneaux sont produits par une lame mince de verre d'indice 1.5, d'épaisseur $150\mu\text{m}$ qui est éclairée en incidence quasi normale par une source de longueur d'onde 589nm .

Remarques :

Condition de planéité de la lame :

Pour observer correctement les anneaux il faut que les deux faces de la lame soient bien planes. Tout écart à la planéité a pour effet de distordre les anneaux. On peut admettre que les anneaux restent bien visibles si l'ordre d'interférence $p(e) = \frac{2n_1 e \cos r}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2}$ ne change pas de plus d'une valeur demi-entière.

$$dp = \frac{2n_1 \cos r}{\lambda_0} de < \frac{1}{2} \Rightarrow de < \frac{\lambda_0}{4n_1 \cos r} \approx \frac{\lambda_0}{4n_1} \quad (4.28)$$

Dans le visible cet écart ne doit donc pas excéder $0.1\mu\text{m}$ ce qui correspond au poli optique.

4.1.5 Franges d'égale inclinaison en transmission

En transmission, le principe du calcul du rayon des anneaux est identique à ceci près que les rayons transmis présentent des coefficients de transmission qui ont le même signe (>0). Le rayon incident est réfracté en A puis partiellement transmis en B dans l'air et réfléchi 2 fois avant d'être transmis en D.

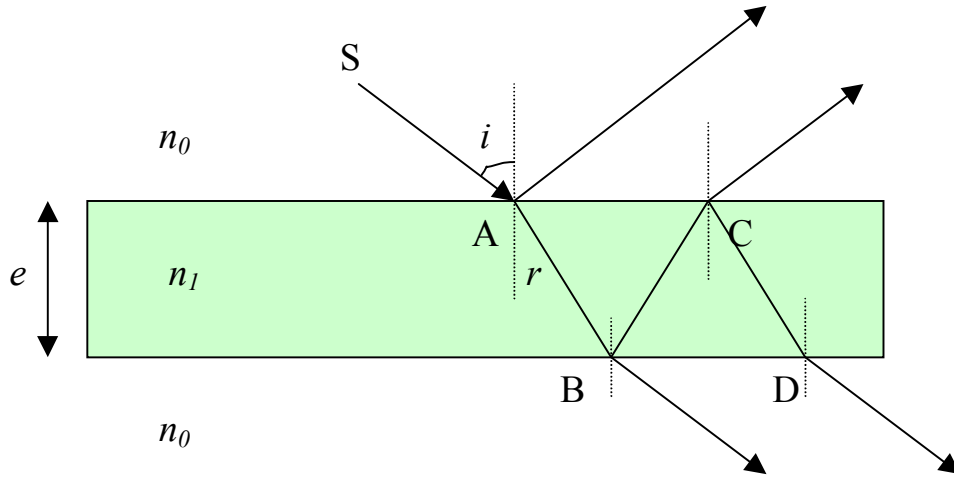


FIG. 4.3 –

Il s'ensuit que la différence de phase devient

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \quad (4.29)$$

Une difficulté supplémentaire vient cependant du fait que si l'on utilise une lame de faible coefficient de réflexion comme une lame de verre dans l'air pour laquelle $r=0.2$, les coefficients de transmission des deux premiers rayons sont très différents. Ces coefficients s'écrivent

$$t_{0,1}t_{1,0}, t_{0,1}t_{1,0}r_{1,0}^2 \quad (4.30)$$

ce qui montre que le deuxième rayon est $r_{1,0}^2$ plus faible en amplitude que le premier soit pour le dioptre air-verre 25 fois plus faible. Il s'ensuit que le contraste des franges est faible car l'intensité qui domine sur l'écran est celle du premier rayon. Cette argument est cependant qualitatif car la compréhension du phénomène ne peut se faire correctement qu'en tenant compte des réflexions et transmissions multiples dans la lame. Cette étude sera abordée lors de la présentation de l'interféromètre de Pérot-Fabry.

4.1.6 Applications : couches minces antireflets

Nous considérons la réflexion d'une lumière monochromatique sur une lame mince d'épaisseur e et d'indice n_1 éclairée en incidence normale. Nous avons vu que la différence de marche géométrique entre le rayon réfléchi sur le dioptre supérieur et celui réfléchi sur le dioptre inférieur est

$$\delta = 2n_1e \implies \Delta\phi = \frac{4\pi n_1e}{\lambda_0} \quad (4.31)$$

La couche mince possède une réflectivité R qui dépend des indices des différents milieux et de l'épaisseur e de la lame. Le champ total réfléchi est donné par

$$E = r_{0,1}E_0e^{i(\omega_0t-\phi_1)} + t_{0,1}t_{1,0}r_{1,2}E_0e^{i(\omega_0t-\phi_2)} = E_0e^{i\omega_0t}e^{-i\phi_1} \left(r_{0,1} + t_{0,1}t_{1,0}r_{1,2}e^{i\Delta\phi} \right) \quad (4.32)$$

avec

$$r_{i,j} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}, \quad t_{i,j} = \frac{2n_i}{n_i + n_j} \quad (4.33)$$

Le champ peut s'écrire également

$$E = E_0e^{i\omega_0t}e^{-i\phi_1} \frac{r_{0,1} + r_{1,2}e^{-i\Delta\phi}}{1 + r_{0,1}r_{1,2}e^{-i\Delta\phi}} \quad (4.34)$$

Le dénominateur contient la contribution des ondes multiples et peut être approximé à 1 si $r_{0,1}r_{1,2} \ll 1$. Il s'ensuit que le champ réfléchi s'écrit :

$$E = E_0e^{i\omega_0t}e^{-i\phi_1}(r_{0,1} + r_{1,2}e^{-i\Delta\phi}) \quad (4.35)$$

Le système est antireflet si, par interférence destructive par réflexion, le champ réfléchi est nul ce qui impose

$$r_{0,1} + r_{1,2}e^{-i\Delta\phi} = 0 \quad (4.36)$$

On peut facilement se convaincre (voir Fig. 4.4) en utilisant une représentation de Fresnel que la seule solution est $r_{1,2} = -r_{0,1}$.

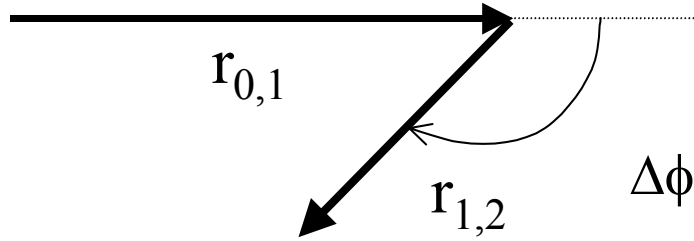


FIG. 4.4 – Représentation de Fresnel illustrant la somme de deux ondes d'amplitude $r_{0,1}$ et $r_{1,2}$ déphasées de $\Delta\phi$.

Si les coefficients de Fresnel $r_{0,1}$ et $r_{1,2}$ sont de même signe, il faut que la différence de phase entre les ondes se réfléchissant sur les deux interfaces vérifie

$$e^{-i\Delta\phi} = -1 \implies \frac{4\pi n_1 e}{\lambda_0} = (2p + 1)\pi \quad (4.37)$$

L'épaisseur de la lame antireflet doit donc vérifier

$$e = \frac{(2p + 1)\lambda_0}{4n_1} \quad (4.38)$$

De plus l'indice de la lame mince doit satisfaire l'égalité des coefficients de réflexion soit

$$\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (4.39)$$

Pour une lame antireflet placée dans l'air cette condition conduit à

$$n_1 = \sqrt{n_2} \quad (4.40)$$

Comme les indices en optique sont supérieurs à 1, l'équation 4.40 ne peut être satisfaite que si l'on dépose sur le milieu 2 une couche d'indice n_1 inférieur à n_2 . L'épaisseur la plus petite qui correspondra à un coefficient de réflexion nul sera

$$e = \frac{\lambda_0}{4n_1} \quad (4.41)$$

Il s'agit d'une lame quart d'onde pour la longueur d'onde λ_0 . Il est clair que la condition d'anti-reflet n'est valide que pour cette longueur d'onde λ_0 et que dès que l'on s'écarte de cette radiation la réflexion sur la lame devient de nouveau possible comme le montre la figure 4.5

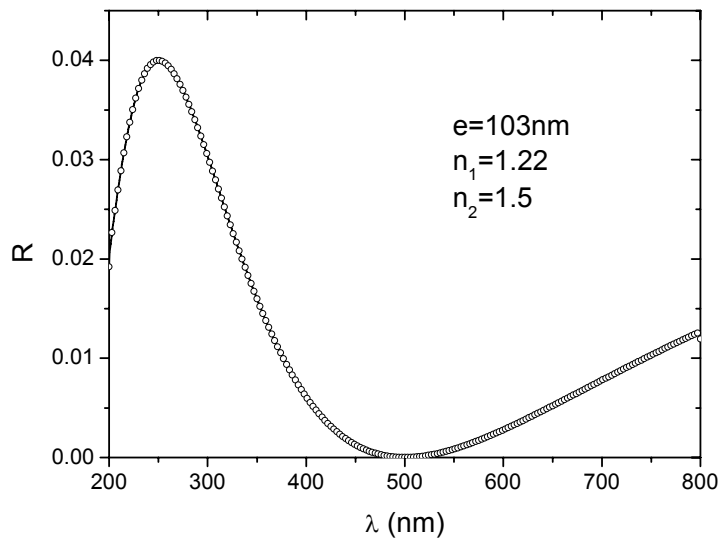


FIG. 4.5 – Représentation de la réflectivité d'une couche antireflet d'indice $n_1=1.22$ déposée sur du verre d'indice $n_2=1.5$ pour des longueurs d'onde allant de 200nm à 800nm. Pour la longueur d'onde de centrage $\lambda_0=500nm$ la couche est quart d'onde et la réflectivité est nulle. Elle est toutefois maximale à $\lambda_0/2$

Comme seule la longueur d'onde de centrage n'est pas réfléchi, les lames traitées anti-reflet présentent une couleur caractéristique bleu-violet ou rouge car pour ces longueurs d'onde le coefficient de réflexion n'est pas nul.

Nous retiendrons donc qu'une couche antireflet déposée sur un milieu d'indice n_2 sera anti-reflet pour la radiation λ_0 si

$$e = \frac{\lambda_0}{4n_1} \text{ avec } n_1 = \sqrt{n_2} \quad (4.42)$$

Ainsi une lame antireflet déposée sur du verre d'indice $n_2 = 1.5$ doit avoir un indice de $n_1 = 1.22$ et une épaisseur donnée par l'équation 4.38. L'inconvénient majeur de ce type de revêtement est qu'il faut pouvoir trouver un matériau d'indice 1.22 ce qui est quasi impossible à trouver en pratique comme le montre le tableau ci-dessous

Matériau	Indice de réfraction
Cryolite Na_3AlF_6	1.36
MgF_2	1.38
Silice SiO_2	1.46
Alumine Al_2O_3	1.62
Oxyde de titane TiO_2	2.3
Silicium Si	3.85
Germanium	4.1
Séniure de Zinc ZnSe	2.44
Sulfure de Zinc ZnS	2.3
Oxyde de zirconium ZrO_2	2
Verre	1.5-1.6
Aluminium	5.23
Or	2.83
Argent	3.44

Les lames minces antireflet sont actuellement fabriquées en utilisant plusieurs couches voire même des empilements multicouche. La méthode la plus simple consiste à empiler une couche de haut indice suivie par une couche de bas indice comme par exemple TiO_2 suivi de SiO_2 . Les coefficients de réflexion deviennent :

$$r_{0,1} = -0.187, \quad r_{1,2} = -0.213 \text{ et } r_{2,3} = 0.195 \quad (4.43)$$

et le champ est réfléchi est donné par

$$E = E_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\phi_1} (r_{0,1} + r_{1,2} e^{-i\Delta\phi_1} + r_{2,3} e^{-i(\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2)}) \quad (4.44)$$

Il est facile de trouver les épaisseurs des couches 1 et 2 en utilisant la construction de Fresnel dans laquelle le centre des cercles de rayons $r_{1,2}$ et $r_{2,3}$ sont aux deux extrémités du vecteur de Fresnel $r_{0,1}$.

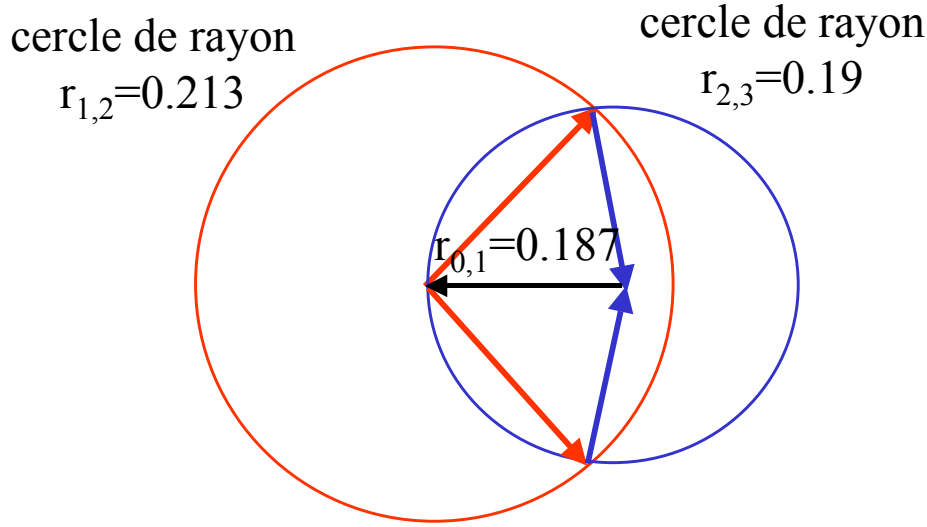


FIG. 4.6 –

Il existe deux solutions correspondant aux deux points d'intersection des deux cercles. La position de ces points définit la valeur des phases $\Delta\phi_1 = \frac{4\pi n_1 e_1}{\lambda_0}$ et $\Delta\phi_2 = \frac{4\pi n_2 e_2}{\lambda_0}$ et par conséquent celles des épaisseurs des deux couches. Pour l'empilement verre, TiO_2 , SiO_2 et la longueur d'onde de centrage 500nm il y a antireflet si $e_1=234.5\text{nm}$ et $e_2=112\text{nm}$.

La fabrication de filtre interférentiel à bande très étroite est basée sur le principe d'empilement de couches minces diélectriques. Il est alors possible de fabriquer un matériau qui ne réfléchit pas du tout une longueur d'onde précise tout en la transmettant intégralement.

4.1.7 Couche réfléchissante

Si un matériau d'indice optique supérieur n_1 à celui du substrat n_2 est déposé sous forme d'une lame quart d'onde on observe alors que les coefficients de réflexion $r_{0,1} = n_0 - n_1/n_0 + n_1 < 0$ et $r_{1,2} = n_1 - n_2/n_1 + n_2 > 0$ sont de signes opposés et la condition imposée à l'épaisseur conduit à un coefficient de réflexion total égal à

$$r = r_{0,1} - r_{1,2} \quad (4.45)$$

qui est alors maximum. L'interférence devient constructive par réflexion.

4.2 Interférences localisées du film en coin

4.2.1 Présentation du coin

Un coin (cf. Fig. 4.7) est réalisé à chaque fois que deux surfaces réfléchissantes ne sont pas rigoureusement parallèles entre elles mais forment un dièdre d'angle au sommet α faible.

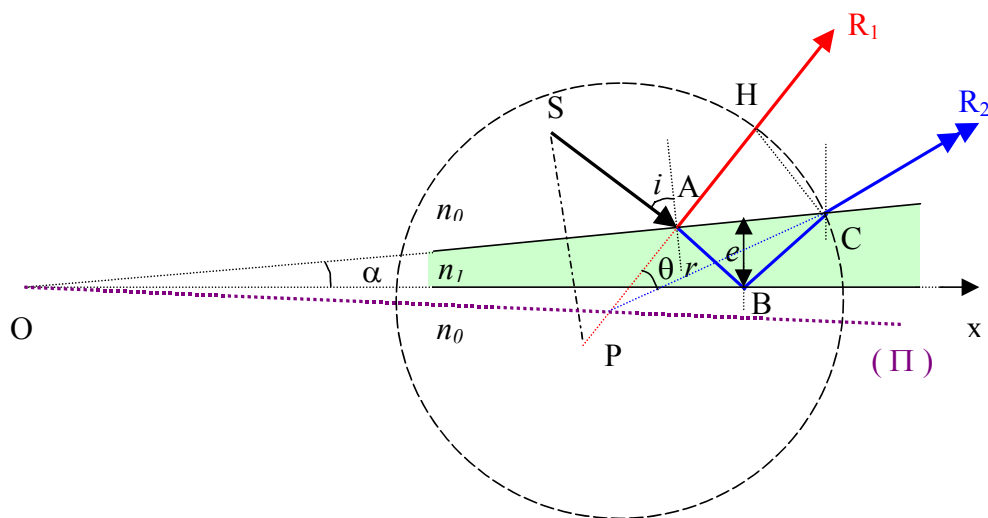


FIG. 4.7 – Illustration du cheminement de la lumière dans un coin d'angle au sommet α

Nous observons qu'un rayon lumineux SA se réfléchit sur le premier dioptré et est transmis (AB) dans le coin avant de se réfléchir sur le second dioptré. Les deux rayons émergents R_1 et R_2 ne sont pas parallèles entre eux compte tenu de l'angle α du dièdre. Ils se coupent donc, non pas à l'infini, mais en un point P qui se trouve localisé au voisinage du coin. En ce point les deux rayons se superposent avec un déphasage qui dépend principalement de l'épaisseur du coin. C'est le seul endroit où ces rayons se superposent et c'est donc en ce point que les interférences sont observées; pour cette raison les interférences sont dites **localisées**. Expérimentalement on observe une figure d'interférences constituée de franges rectilignes parallèles à l'axe du dièdre. Cette observation est une nouvelle fois conforme à la loi de Curie sur la symétrie des effets. La présence d'un dièdre détruit la symétrie de révolution de la lame à faces parallèles et les franges adoptent la symétrie imposée par le dièdre.

Leur localisation peut être parfaitement déterminée analytiquement. Pour cela il faut trouver la position du point P de croisement des deux rayons en se rappelant que contrairement à la figure les angles i et r sont très petits. Dans le triangle ACP (cf. Fig. 4.7) nous pouvons écrire que

$$\frac{AC}{\sin \theta \simeq \theta} = \frac{CP}{\sin C} = \frac{CP}{\sin(i + \pi/2) \simeq 1} \implies CP = \frac{AC}{\theta} \quad (4.46)$$

Dans le triangle ABC nous avons

$$\theta + \frac{\pi}{2} + i + \frac{\pi}{2} - i' = \pi \implies \theta = i' - i \simeq \frac{n_1(r + 2\alpha)}{n_0} - \frac{n_1 r}{n_0} = \frac{n_1 2\alpha}{n_0} \quad (4.47)$$

avec i' représentant l'angle de sortie du rayon R_2 par rapport à la normale au dioptré.

D'autre part dans le triangle ABC, $BC = x\alpha$ (x étant la position du point B par rapport à l'arête O du dièdre) et

$$\frac{AC}{\sin(2r + 2\alpha)} = \frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - r\right)} \simeq 1 \quad (4.48)$$

d'où

$$CP = \frac{x\alpha(2r + 2\alpha)}{\theta} = \frac{n_0x\alpha(2r + 2\alpha)}{n_12\alpha} = \frac{n_0x(r + \alpha)}{n_1} \quad (4.49)$$

Compte tenu de la faiblesse des angles, le point P est très proche de B et

$$\widehat{COP} \simeq \frac{CP}{x} = \frac{n_0(r + \alpha)}{n_1} \quad (4.50)$$

Cela montre que l'angle \widehat{COP} ne dépend pas de x et que le point P est situé dans le voisinage immédiat des deux dioptrés.

4.2.2 Différence de marche et interfrange

Nous considérons les deux rayons R_1 et R_2 . Soit (C) le cercle de centre P et de rayon PC (cf. Fig. 4.7). Il est facile de voir qu'en A le rayon est unique et se divise en ce point. Après le passage aux points C et H, les rayons se propagent de la même manière dans le milieu d'indice n_0 . Il s'ensuit que la différence de marche entre les deux rayons R_1 et R_2 est égale à la différence de chemin optique entre les deux rayons soit :

$$\delta = [ABC] - [AH] = n_1(AB + BC) - n_0AH \quad (4.51)$$

Le calcul est donc identique à celui mené pour la lame à face parallèle et conduit à

$$\delta = 2n_1e \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.52)$$

Nous considérons que le coin est éclairé en incidence quasi-normale ce qui conduit au deuxième ordre près à

$$\delta(P) \simeq 2n_1e(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2n_1\alpha x(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.53)$$

où $e(P)$ est l'épaisseur du coin à l'abscisse $x(P)$.

L'ordre d'interférence au point P est donné par

$$p = \frac{2n_1e(P)}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2} = \frac{2n_1\alpha x(P)}{\lambda_0} \pm \frac{1}{2} \quad (4.54)$$

Nous voyons que, dans le cas d'un coin, l'ordre d'interférence est constant si l'épaisseur e est constante. Les franges sont de ce fait qualifiées de **franges d'égale épaisseur** et sont aussi appelées **franges de Fizeau**. Comme l'épaisseur du film augmente avec l'éloignement $x(P)$ du centre du dièdre l'ordre n'est pas constant ; il est minimal sur l'arête du dièdre et croît au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

L'interfrange qui sépare deux franges consécutives de même nature est donné par

$$\Delta p = 1 = \frac{2n_1\alpha(x_{p+1} - x_p)}{\lambda_0} \implies i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{2n_1\alpha} \quad (4.55)$$

L'interfrange est donc constant et ne dépend que de l'angle du dièdre. Il croît lorsque cet angle devient très faible. Il délimite des franges rectilignes parallèles à l'axe du dièdre.

4.2.3 Coin d'air et anneaux de Newton

Il est facile de produire des franges de Fizeau avec deux lames de verre (lames de microscope) séparées par une cale d'épaisseur (papier à cigarette, cale de bougie).

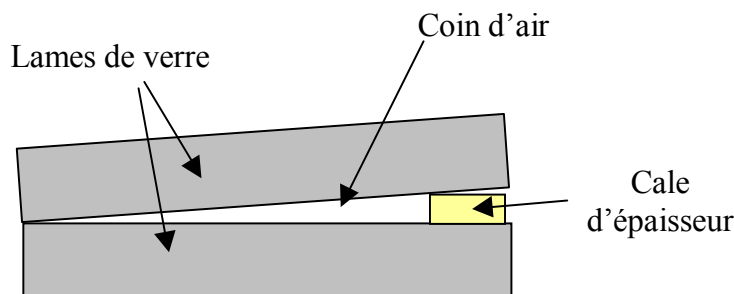


FIG. 4.8 –

Un coin d'air de ce type éclairé en lumière monochromatique produit des franges bien rectilignes. Pour $\lambda=589\text{nm}$ (lampe à vapeur de sodium) et un angle de $1'$, on observe un interfrange de $589 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 60 / 2\pi = 1\text{mm}$.

La réalisation d'un coin d'air est aussi possible avec deux miroirs, l'un réel et l'autre virtuel ainsi que nous le verrons quand nous étudierons l'interféromètre de Michelson.

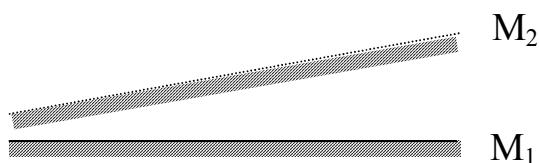


FIG. 4.9 –

Dans ces deux cas la réflexion se fait sur des interfaces de même type et il n'y a pas lieu de considérer de différence de phase à la réflexion. La différence de marche est donc

$$\delta = 2e \cos r \implies \Delta\phi = \frac{4\pi e \cos r}{\lambda_0} \quad (4.56)$$

De plus les coefficients de réflexion sont rigoureusement les mêmes sur les deux dioptries ce qui permet d'appliquer directement la formule des interférences à deux ondes.

Une autre géométrie presque équivalente est celle proposée par Newton dans l'expérience dite des **anneaux de Newton**. Le dispositif interférentiel est constitué d'un miroir plan où d'une lame de verre plane surmontée d'une lentille sphérique plan-convexe. La lame d'air qui délimite les deux surfaces est donc d'épaisseur variable.

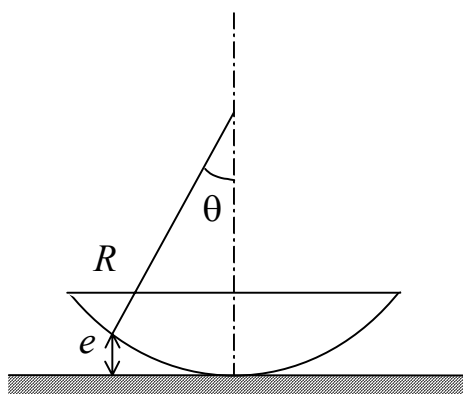


FIG. 4.10 –

Le dispositif des anneaux de Newton donne des anneaux compte tenu de sa symétrie de révolution. Une autre différence se manifeste quant à la nature des réflexions mises en jeu. La réflexion est de type verre-air sur le dioptre sphérique de la lentille et air-verre sur le miroir. On a donc pour les anneaux de Newton

$$\delta(P) = 2e(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2R(1 - \cos \theta(P)) \pm \frac{\lambda_0}{2} \simeq R\theta^2(P) \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.57)$$

Si l'on appelle ρ le rayon des anneaux nous voyons que

$$\rho(P) = R\theta(P) \implies \delta(P) = \frac{\rho^2(P)}{R} \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.58)$$

Il est facile de voir sur ces deux exemples que l'anneau central est sombre pour des anneaux de Newton observés en réflexion.

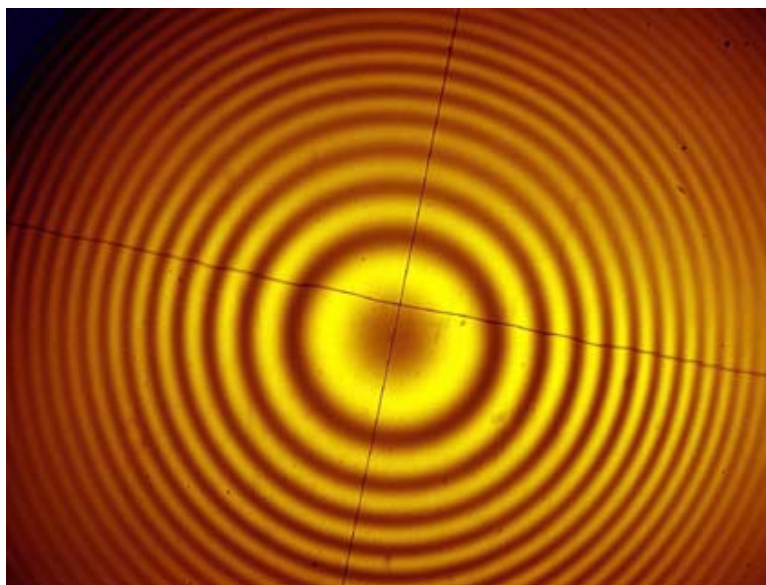


FIG. 4.11 – Photographie des anneaux de Newton en réflexion. Le dispositif est éclairé avec une lampe à vapeur de sodium.

Le rayon de l'anneau sombre d'ordre p vérifie

$$\frac{\rho_p^2(P)}{R} = p\lambda_0 \implies \rho_p(P) = \sqrt{pR\lambda_0} \quad (4.59)$$

Nous remarquerons avec intérêt que les anneaux de Newton peuvent être observés en transmission si la lame plane est transparente ; dans ce cas la transmission est réalisée pour les deux rayons avec le même signe. L'anneau central est donc brillant.

4.2.4 Détermination d'un profil d'épaisseur

Tirage d'un film liquide

Les franges de Fizeau peuvent être facilement observées en immergeant verticalement un wafer de silicium dans de l'éthanol ou dans une solution plus visqueuse. En le retirant à vitesse constante, un film liquide se forme à la surface du wafer. Ce film persiste tant que le wafer est dans la solution. Il est dû à la compétition qui se produit entre les forces de gravitation et de viscosité qui cherchent respectivement à ramener le liquide dans le béccher et à maintenir le film sur le wafer. Le film qui est produit de cette façon n'est évidemment pas d'épaisseur constante. Il est mince au voisinage de la ligne de séchage puis devient de plus en plus épais. Le profil d'épaisseur du film liquide est facile à déterminer en remarquant que les franges observées par interférométrie optique sont d'abord très resserrées puis deviennent de plus en plus larges comme le montre la figure 4.12. En incidence normale, chaque frange sombre d'ordre p correspond à une épaisseur égale à

$$e(p) = \frac{2p+1}{4n_1} \lambda_0 \quad (4.60)$$

car les coefficients de réflexion sur les deux dioptrés sont de même signe (<0).

La première frange correspond à la ligne de séchage du film. Cette technique de dépôt de film appelée en anglais "dip-coating" est très utilisée pour fabriquer des films d'épaisseur voisine de 300nm.

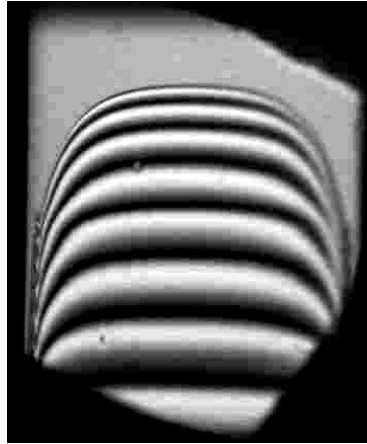


FIG. 4.12 – *Franges d'interférences observées sur un film liquide d'éthanol éclairé en lumière monochromatique durant la translation à vitesse constante du wafer de silicium qui trempe dans un béccher d'éthanol.*

Cette technique est très sensible à la moindre variation d'épaisseur. C'est ainsi qu'en présence de turbulence au moment du tirage du film, les franges prennent un profil tourmenté qui reflète bien l'effet produit par les turbulences sur l'épaisseur du film.

Films de savon

Une situation très analogue est observable dans les films de savon que l'on laisse se reposer verticalement. Par gravitation le film de savon s'épaissit à sa base et il se forme un film d'épaisseur croissante au fur et à mesure que l'on s'éloigne du sommet du film. Eclairé en lumière blanche on constate que le film se pare des couleurs de l'arc en ciel car à chaque épaisseur du film, une longueur d'onde bien précise satisfait les conditions d'interférence constructives. Cependant on observe que le film devient noir dans sa partie supérieure. En effet son épaisseur devient si petite que la différence de marche $\delta = 2n_1e \pm \frac{\lambda_0}{2}$ devient proche de $\frac{\lambda_0}{2}$. Il s'ensuit que les rayons qui se réfléchissent sur les deux interfaces sont en opposition de phase et ne réfléchissent plus la lumière. Le film apparaît donc noir. Par contre un film d'épaisseur voisine de 280 à 560 nm prend une couleur caractéristique de son épaisseur. On donne traditionnellement le nom de teinte de Newton aux couleurs observées par interférences à deux ondes en lumière blanche.

Teinte de Newton.

Nous rappelons que la différence de phase entre deux rayons réfléchis en incidence normale sur une couche mince est soit $4\pi ne/\lambda_0 \pm \pi$ soit $4\pi ne/\lambda_0$ selon que les coefficients

de réflexion sont de signe opposé ou de même signe. On voit donc que cette différence de phase dépend principalement de l'épaisseur du film et de son indice. Eclairé en lumière blanche un film mince peut réfléchir totalement une longueur d'onde si son épaisseur optique est selon la nature des réflexion respectivement

$$ne = (2p \pm 1) \frac{\lambda_0}{4} \quad (4.61)$$

$$ne = p\lambda_0/2 \quad (4.62)$$

Il est facile de voir que dans le deuxième cas à l'ordre 2 l'épaisseur optique qui correspond à une réflexion constructive est $ne = \lambda_0$. Il s'ensuit que la couleur du film qui correspond à la valeur de λ_0 indique au premier coup d'oeil son épaisseur optique. A l'ordre 1 les couleurs sont très vives car l'épaisseur traversée est faible et l'absorption dans le film est réduite. Le tableau ci-après donne la correspondance entre l'épaisseur optique d'un film et sa couleur pour peu que la source de lumière ait un spectre voisin de celui du soleil et que la dispersion du film soit faible.

ne (nm)	ordre	réflexion opposée	ordre	réflexion en phase
0	1	noir	1	blanc
158		bleu gris		blanc brúnatre
259		blanc		rouge
281		jaune paille	2	violet
306		jaune clair		indigo
332		jaune vif		bleu
430		jaune brun		bleu gris
505		orangé		vert bleu
536		rouge		vert pâle
551		rouge foncé		vert jaune
565	pourpre	vert clair		
575	violet	jaune vert		
589	indigo	jaune d'or		
664	2	bleu ciel	orangé	

Le phénomène qui vient d'être décrit est très facilement observable dans la nature. Il est à l'origine des couleurs vives observées sur les bulles de savon, sur les ailes des papillons (voir figure 4.13) ou sur les taches d'huile.

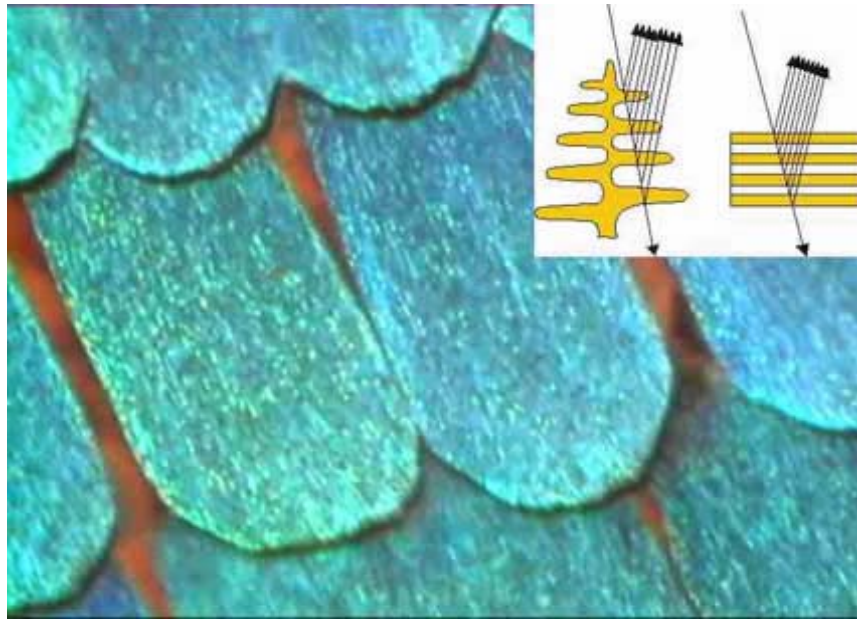


FIG. 4.13 – *Ecaille d'une aile de papillon; en insertion principe de réflexion à ondes multiples sur les écailles.*

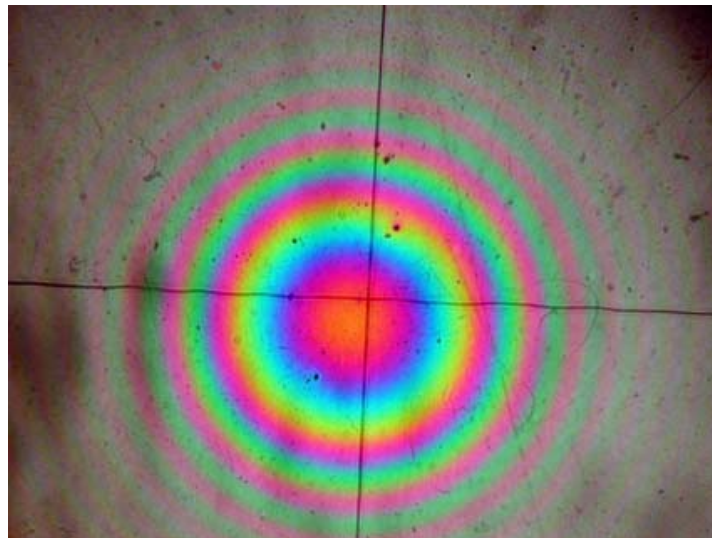


FIG. 4.14 – *Anneaux de Newton observés en lumière blanche et en réflexion. On constate que les anneaux sont colorés. A chaque couleur correspond une épaisseur. La répétition des mêmes couleurs quand les anneaux croissent est due à l'observation d'ordres de plus en plus élevés.*

4.3 Interféromètre de Michelson

4.3.1 Description de l'interféromètre

Michelson (1852-) est l'inventeur d'un interféromètre constitué de deux miroirs M_1 et M_2 localisés sur deux bras orthogonaux. Il a utilisé son appareil pour chercher à mettre en évidence la composition de la vitesse de propagation de la lumière avec celle de la rotation de la terre. Il a obtenu le Prix Nobel de Physique en 1907 pour ses travaux d'interférométrie.



FIG. 4.15 –

Dans l'interféromètre de Michelson, l'un des deux miroirs se trouve sur un chariot mobile, l'autre miroir est fixe. La séparation d'amplitude de l'onde incidente est réalisée à l'aide d'une **séparatrice** qui est une lame de verre argentée (dépôt d'une couche mince semi-réfléchissante) de telle sorte que les amplitudes des rayons réfléchis et transmis dans cette lame soient pratiquement égales. Cette lame est rigoureusement disposée à 45° l'onde incidente et des deux miroirs.

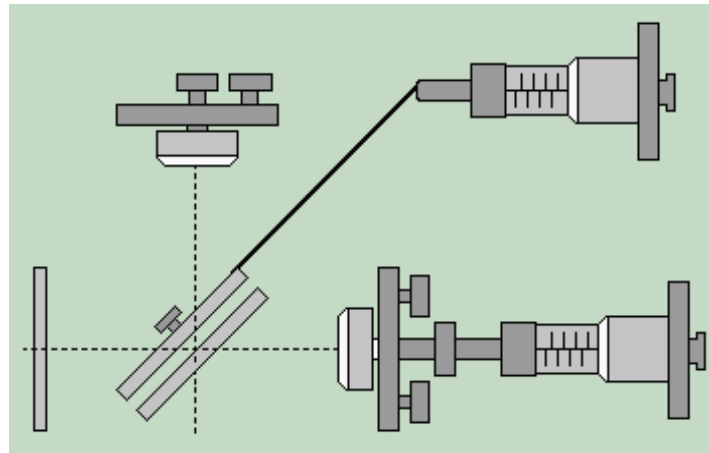


FIG. 4.17 – Représentation simplifiée de l'interféromètre de Michelson



FIG. 4.16 – Photographie d'un interféromètre de Michelson. On reconnaît le chariot en bas à droite, la séparatrice et la compensatrice en bas à gauche et les deux miroirs à 90° dont l'un est porté par le chariot.

Les rayons R_1 et R_2 qui sont réfléchis et transmis dans la séparatrice se propagent vers les miroirs M_1 et M_2 où ils subissent une réflexion avant de revenir vers la séparatrice. Ils se superposent à la sortie de cette lame. La lame séparatrice a une certaine épaisseur ce qui fait que si les deux miroirs sont à égale distance de la séparatrice, les chemins optiques suivis par les deux rayons R_1 et R_2 ne sont pas égaux. Le rayon R_1 ne traverse qu'une fois la lame avant sa sortie alors que R_2 la traverse 3 fois. Si l'on appelle e l'épaisseur de cette lame, la lame introduit une différence de marche entre les deux rayons R_1 et R_2 égale à

$$\delta = 2ne \quad (4.63)$$

qu'il faut compenser si l'on veut que l'interféromètre ne soit pas perturbé par ce trajet excédentaire. Pour cette raison, la compensation s'effectue en introduisant une lame **compensatrice** de même épaisseur e et de même indice n que la séparatrice sur le trajet du rayon R_1 . Cette lame est rigoureusement parallèle à la séparatrice. La présence de la séparatrice qui est métallisée introduit une différence de phase dite à la réflexion entre les deux rayons. Cette différence de phase est égale à π pour une lame de verre. La métallisation engendre une complexité supplémentaire qui n'est pas prise en compte en général pour ne pas alourdir les calculs mais qui a pour effet de ne pas générer une différence de phase égale à π que nous appellerons par la suite ϕ_r .

4.3.2 Figures d'interférences

Teinte plate et contact optique

Les figures d'interférences observables avec un interféromètre de Michelson sont celles qui correspondent à la division d'amplitude. Elles dépendent de l'orientation respectives des deux miroirs. Si ceux-ci sont à égale distance de la séparatrice et si ils sont perpendiculaires entre eux, la différence de marche entre les deux rayons est nulle. Ils se superposent en tous points du champ d'interférence avec la différence de phase ϕ_r représentant la différence de phase à la réflexion. Cette différence de phase dépend très fortement de la nature des couches minces déposées sur la séparatrice². L'observateur voit en tous points une intensité égale à

$$I_m(P) = 2I_0(1 + \cos \phi_r) \quad (4.64)$$

qui est donc uniforme. Cette intensité uniforme est appelée la **teinte plate** et elle se produit au **contact optique** c'est à dire à l'endroit très précis où la différence de marche est nulle. D'un point de vue expérimental la teinte plate s'obtient en "chariotant" de façon à égaliser la longueur des bras du Michelson. Cette position est définie de façon quasi-ponctuelle et le contact optique est évidemment perdu pour un déplacement infinitésimal (de l'ordre du μm) du chariot. Nous noterons que la teinte observée en lumière monochromatique au contact optique ne dépend que de ϕ_r .

Schéma équivalent du Michelson

Le fonctionnement d'un Michelson s'interprète facilement si l'on remplace l'un des deux miroirs par son symétrique par rapport à la séparatrice. Dans cette opération le miroir symétrique M'_1 du miroir M_1 est un miroir virtuel qui se trouve à la distance $LM'_1 = LM_1$ de la lame.

On distingue alors deux types de fonctionnement selon l'orientation respective des deux miroirs M'_1 et M_2 :

- la lame d'air si ces deux miroirs sont rigoureusement parallèles ce qui conduit aux franges d'égale inclinaison

²M.W. Hamilton, Phase shifts in multilayer dielectric beam splitters, Am. J. Phys. **68**, 2, (2000), p186-191

- le coin d'air si ces deux miroirs font un petit angle α entre eux ce qui conduit aux franges d'égale épaisseur

Dans le premier cas la différence de marche entre deux rayons R_1 et R_2 qui passent par le centre de la lame est égale à

$$\delta = 2 (LM'_1 - LM_2) \quad (4.65)$$

et la différence de phase entre ces deux rayons est

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0} (LM'_1 - LM_2) + \phi_r \quad (4.66)$$

Le centre de la figure est donc alternativement brillant où sombre selon la valeur de $\Delta\phi$.

Si l'on considère l'ensemble des rayons issus de la source, nous constatons que le plan d'observation a la symétrie de révolution. Le problème est strictement équivalent à celui d'une lame mince d'air à faces parallèles d'indice $n_1 = n_0 = 1$.

L'observation des anneaux peut se faire au moyen d'une lentille mince de grande focale f ou au moyen d'une lunette réglée sur l'infini (équivalente à une lentille mince de courte focale f). L'intensité en un point P du plan d'observation distant de R du centre est donnée par

$$I_{mes}(R) = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f} \right)^2 \right) + \phi_r \right] \right) \quad (4.67)$$

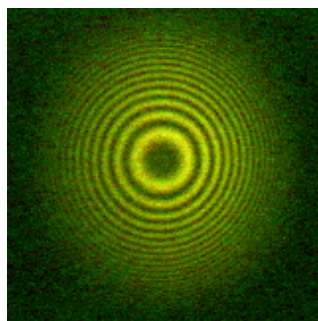


FIG. 4.18 – Anneaux créés par une lame d'air à face parallèle éclairée par lampe à vapeur de sodium dans un interféromètre de Michelson.

Dans le second cas le problème est celui d'un coin d'air. Les franges sont cette fois-ci rectilignes et parallèles à l'arête du coin d'air. La différence de marche en un point P de l'écran situé à la position $x(P)$ du centre est égale à

$$\delta(P) \simeq 2e(P) \pm \frac{\lambda_0 \phi_r}{2\pi} = 2\alpha x(P) \pm \frac{\lambda_0 \phi_r}{2\pi}$$

et l'intensité au point P est égale à

$$I_{mes}(R_m) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda_0} \right) \quad (4.68)$$

L'observation se fait soit à la lunette soit en projetant les franges localisées du coin d'air avec une lentille mince de focale f . Les franges dans ce cas sont agrandies d'un facteur $\gamma = \frac{p'}{p}$ avec p' la distance de la lentille à l'écran et p la distance de la lentille au coin d'air.

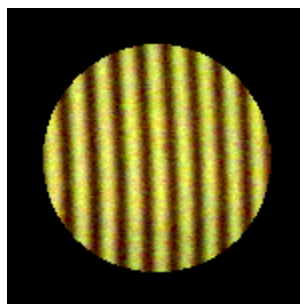


FIG. 4.19 – *Franges rectilignes du coin d'air obtenues en inclinant le miroir M_1 d'un angle α par rapport au miroir M_2 dans un interféromètre de Michelson. L'éclairage est réalisé avec une lampe à vapeur de sodium.*

4.4 Cavités optiques résonantes

4.4.1 Interférences à N ondes dans une lame mince

Présentation du système

Nous considérons de nouveau le cas d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e que nous utilisons en transmission. Un rayon incident arrive sur la lame et subit à l'intérieur de celle-ci des réflexions multiples ainsi qu'une série de transmissions. A la sortie tous les rayons transmis sont parallèles entre eux et présentent un déphasage qui va croissant avec le nombre de réflexion par rapport au rayon R_1 transmis sans réflexion en B. Ces rayons qui convergent à l'infini peuvent être focalisés en un point P d'un écran en utilisant une lentille mince convergente de distance focale f comme on peut le voir sur la figure 4.20.

Le système présente une symétrie de révolution autour de l'axe optique de la lentille mince passant par la source et la figure d'interférence présente donc la même symétrie. Elle est constituée d'anneaux concentriques centrés sur O.

Calcul de la différence de marche

Le rayon R_1 et le rayon R_2 sont parallèles entre eux. Pour connaître leur différence de marche il convient d'établir la différence de chemin optique parcourue par les deux ondes à l'issue de leur division en B où ils sont en phase (voir figure 4.20). Nous remarquons qu'à partir des points D et H les deux rayons parcourent les mêmes chemins optiques.

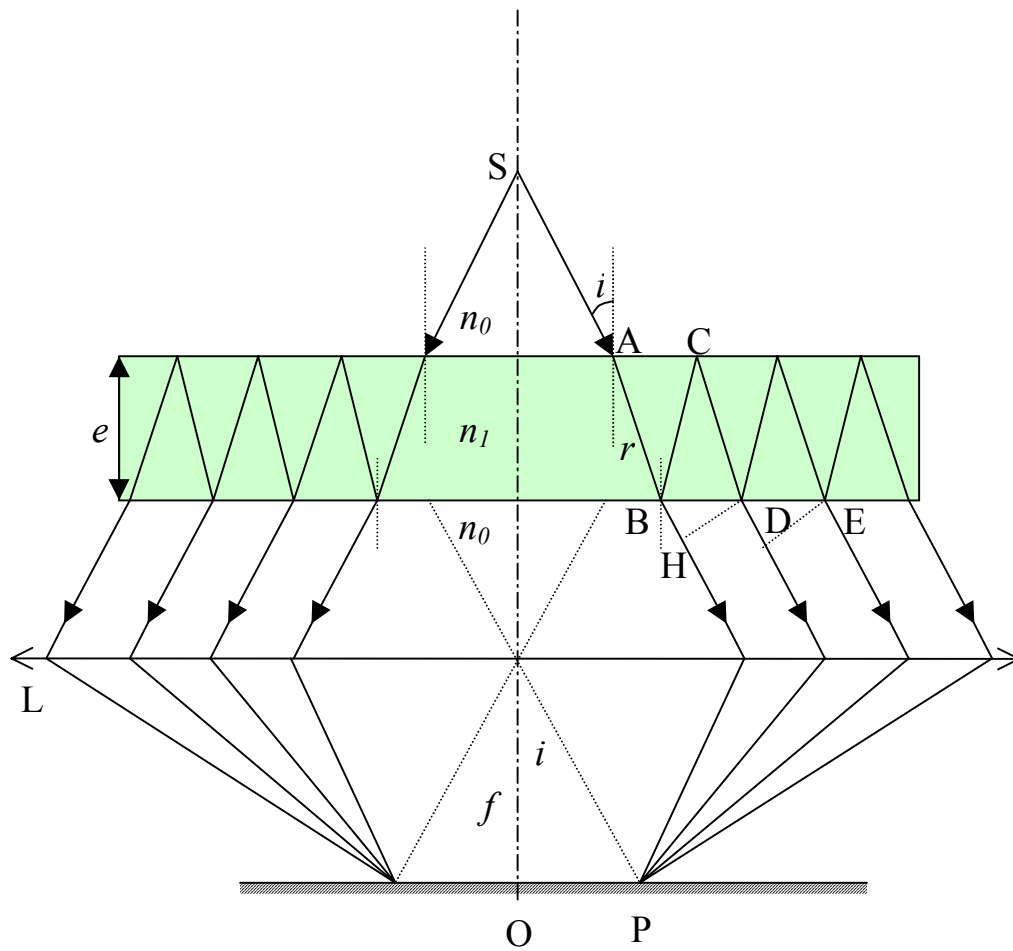


FIG. 4.20 – Transmission de N ondes à travers une lame mince d'épaisseur e et d'indice n_1

La différence de marche entre les rayons R_1 et R_2 issus de B lorsqu'ils atteignent les points D et H est donc

$$\delta = n_1(BC + CD) - n_0BH = 2n_1BC - n_0BH \quad (4.69)$$

soit

$$\delta = 2n_1 \frac{e}{\cos r} - n_0CD \sin i = 2n_1 \frac{e}{\cos r} - n_0 2e \tan r \sin i \quad (4.70)$$

En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_0 \sin i = n_1 \sin r$, nous obtenons

$$\delta = 2n_1 e \cos r \quad (4.71)$$

La différence de marche entre le rayon 2 et le rayon 1 aux points D et H correspond à une différence de phase qui est égale à

$$\varphi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} \quad (4.72)$$

Nous notons qu'il n'y a pas de changement de phase à la réflexion car les réflexions sont de même nature.

Le problème est identique pour les rayons R_2 et R_3 qui sortent de la lame aux points D et E. La différence de phase entre ces deux rayons est donc

$$\phi_3 - \phi_2 = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} = \varphi \quad (4.73)$$

Il s'ensuit que la différence de phase entre le rayon R_3 et le rayon R_1 est

$$\phi_3 - \phi_1 = (\phi_3 - \phi_2) + (\phi_2 - \phi_1) = \frac{8\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0} = 2\varphi \quad (4.74)$$

Par itération nous voyons que le rayon R_N sera déphasé par rapport au rayon R_1 de

$$\phi_N - \phi_1 = (N - 1)\varphi$$

Une bonne façon de voir comment les ondes se déphasent les unes par rapport aux autres est de prendre la référence de phase sur le plan Π perpendiculaire au rayon R_N passant par le point du dioptre ou sort ce rayon. Au delà du plan Π nous admettrons que tous les rayons parcourent rigoureusement le même chemin optique pour aller en P (ceci est une conséquence des propriétés des lentilles minces). Pour aller de Π en P les rayons subiront tous le même déphasage $\Delta\phi_{\Pi \rightarrow P}$. Sur le plan Π , les rayons ont une phase qui dépend du rayon considéré et qui vaut $\phi_N(\Pi) = \phi_1(\Pi) + (N - 1)\varphi$. En P les rayons seront donc déphasés de

$$\phi_N(P) = \phi_N(\Pi) + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P} = \phi_1(\Pi) + (N - 1)\varphi + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P}$$

Amplitude des rayons transmis

Soit E_0 l'amplitude du champ incident ; le champ transmis en A dans la lame est $t_{0,1}E_0$ où $t_{0,1}$ est le coefficient de transmission du dioptre air-lame. En B une partie de l'onde transmise est réfléchi sur le dioptre lame-air et l'autre partie est transmise dans l'air. L'amplitude du champ est affectée à chaque réflexion et transmission ; ainsi le rayon R_1 sortant en B a pour amplitude

$$A_1 = t_{0,1}t_{1,0}E_0$$

Le rayon R_2 subit deux réflexions supplémentaires avant de sortir en D et a une amplitude

$$A_2 = t_{0,1}t_{1,0}r_{1,0}^2E_0 = A_1r_{1,0}^2$$

Si l'on appelle $r = r_{1,0}$ le coefficient de Fresnel du dioptre 1,0, les rayons successifs auront donc pour amplitude

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1r^2 \\ A_3 &= A_1r^4 \\ A_4 &= A_1r^6 \\ &\dots \\ A_N &= A_1r^{2(N-1)} \end{aligned}$$

Amplitude de l'onde résultante

Le champ résultant au point P d'observation sur l'écran est obtenu en sommant tous les champs provenant des différents rayons. Nous considérons ici des champs scalaires

$$E(P, t) = e^{i\omega t} \sum_{j=1}^N A_j e^{i\phi_j(P, t)} \quad (4.75)$$

En tenant compte des amplitudes et des phases des rayons en P nous avons

$$E(P, t) = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1(\Pi) + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P})} \sum_{j=1}^N r^{2(j-1)} e^{i(j-1)\varphi} = \quad (4.76)$$

$$= t_{0,1}t_{1,0}E_0 e^{i(\omega t + \phi_1(\Pi) + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P})} \sum_{j=1}^N (r^2 e^{i\varphi})^{j-1} \quad (4.77)$$

Il s'ensuit que l'amplitude du champ en P est donnée par une suite géométrique de raison $r^2 e^{i\varphi}$. Le calcul de cette suite est classique et conduit à

$$\sum_{j=1}^N (r^2 e^{i\varphi})^{j-1} = \frac{1 - (r^2 e^{i\varphi})^N}{1 - r^2 e^{i\varphi}}$$

En adoptant les notations suivantes $R = r^2$ et $T = t_{0,1}t_{1,0}$, nous aboutissons à

$$E(P, t) = TE_0 e^{i(\omega t + \phi_1(\Pi) + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P})} \frac{1 - (Re^{i\varphi})^N}{1 - Re^{i\varphi}}$$

Comme le coefficient R est petit ($R < 1$) le terme $(Re^{i\varphi})^N$ devient rapidement négligeable dès que N excède 10 et le champ en P devient

$$E(P, t) = e^{i(\omega t + \phi_1(\Pi) + \Delta\phi_{\Pi \rightarrow P})} \frac{TE_0}{1 - Re^{i\varphi}} \quad (4.78)$$

4.4.2 Intensité

Il est facile de voir que l'intensité s'écrit

$$I(\varphi) = \left| \frac{TE_0}{1 - Re^{i\varphi}} \right|^2 = \frac{(TE_0)^2}{(1 - Re^{i\varphi})(1 - Re^{-i\varphi})} \quad (4.79)$$

soit

$$I(\varphi) = \left| \frac{TE_0}{1 - Re^{i\varphi}} \right|^2 = \frac{(TE_0)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \quad (4.80)$$

Pour des raisons pratiques il est utile de récrire l'intensité comme

$$I(\varphi) = \frac{(TE_0)^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} = \frac{(TE_0)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (4.81)$$

Lorsque $\frac{\varphi}{2} = p\pi$ l'intensité est maximale et vaut alors

$$I_{\max} = \frac{(TE_0)^2}{(1 - R)^2} \quad (4.82)$$

Il s'ensuit que

$$I(\varphi) = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (4.83)$$

où l'on a introduit le coefficient $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$. La fonction $I(P)/I_{\max}$ qui est égale à

$$\mathcal{A}(\varphi) = \frac{I(\varphi)}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (4.84)$$

s'appelle fonction d'Airy (à ne pas confondre avec la tâche d'Airy).

Nous rappelons qu'en incidence normale les coefficients de Fresnel pour le dioptré 1,0 sont

$$\begin{aligned} r_{1,0} &= \frac{n_1 - n_0}{n_0 + n_1} \\ t_{1,0} &= \frac{2n_1}{n_0 + n_1} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Pour le dioptre verre-air $r = 0.2$ et le coefficient m est égal à

$$m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \simeq 0.172 \quad (4.86)$$

La figure 4.21 représente l'évolution de m en fonction du coefficient de réflexion du dioptre. Il est évident sur cette figure que m est d'autant plus grand que le coefficient de réflexion est élevé.

FIG. 4.21 – Evolution du coefficient m en fonction du coefficient de réflexion r du dioptre

Etude de la fonction d'Airy.

Il est facile de voir que la fonction d'Airy est

- maximale quand $\varphi = 2p\pi$ et vaut

$$\mathcal{A}_{\max} = 1 \quad (4.87)$$

- minimale quand $\varphi = (2p + 1)\pi$ et vaut

$$\mathcal{A}_{\min} = \frac{1}{1+m} \quad (4.88)$$

- périodique de période 2π .

Nous rappelons ici que la période de la fonction d'Airy est liée au déphasage φ entre les ondes multiples qui sont transmises dans la lame. Le déphasage égal à $\varphi = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0}$

peut varier si l'on modifie l'épaisseur e de la lame ou si l'on y transmet une radiation polychromatique.

D'autre part la fonction d'Airy est d'autant plus contrastée que la valeur de A_{\min} sera petite. Le contraste est défini par

$$C = \frac{A_{\max}}{A_{\min}} = 1 + m \quad (4.89)$$

L'étude de la fonction peut donc être limitée à l'intervalle $[0, 2\pi]$ et l'intensité maximale peut être étudiée au voisinage de $\varphi = 0$ ce qui correspond à

$$\mathcal{A}(\varphi \rightarrow 0) \simeq \frac{1}{1 + \frac{m\varphi^2}{4}} \quad (4.90)$$

La fonction $\mathcal{A}(\varphi \rightarrow 0)$ est une Lorentzienne. Sa pleine largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi$ qui correspond à $\mathcal{A}(\delta\varphi) = \frac{A_{\max}}{2}$ est donnée par

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{m}} \quad (4.91)$$

Le rapport de la période de la fonction d'Airy à la pleine largeur à mi-hauteur s'appelle finesse, F , et vaut

$$F = \frac{\pi\sqrt{m}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{F} \quad (4.92)$$

Il s'ensuit que les maxima seront d'autant plus fins que F sera grand. Nous présentons sur la figure 4.22 un exemple de l'influence de la finesse sur la fonction d'Airy. Nous observons très clairement que le contraste est d'autant plus faible que la finesse est petite. Pour $F \simeq 2$, la réponse de la cavité est quasi sinusoïdale et l'on peut considérer que l'on a interférence à deux ondes. Plus le coefficient de réflexion augmente et plus le nombre d'ondes qui interfèrent est grand. Empiriquement on admet parfois que la finesse représente le nombre de rayons qui interfèrent ; ainsi pour une finesse de 10 on admettra que 10 rayons interfèrent.

FIG. 4.22 – Evolution de la fonction d’Airy pour différentes valeurs de la finesse

Il importe de remarquer que nous venons de faire l’étude de la fonction d’Airy en fonction du déphasage $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{4\pi n_1 e \cos r}{\lambda_0}$. Si l’on considère une cavité d’indice $n_1=1$ et d’épaisseur $e=10\text{mm}$ éclairée en incidence normale par une radiation monochromatique de longueur d’onde $\lambda_0 = 500\text{nm}$, le déphasage au centre de la cavité est donnée par

$$\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda_0} = \frac{4\pi 10^{-2}}{500 \cdot 10^{-9}} = 8\pi 10^4 \quad (4.93)$$

On voit ainsi que l’ordre au centre est gigantesque et vaut $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 20000$. Cet ordre étant entier il y aura un maximum d’intensité au centre de la cavité. L’ordre 19999 sera l’ordre correspondant au maximum suivant et sera observé à un angle r correspondant à $p_1 = \frac{2e \cos r}{\lambda_0} = 19999$. La fonction est caractérisée par une série de dents qui deviennent très pointues quand la finesse est élevée. Elle tend vers un peigne de Dirac pour une finesse de l’ordre de 100. On voit également que la cavité produit un maximum d’intensité en son centre si et seulement si l’épaisseur de la cavité vérifie

$$e = p \frac{\lambda_0}{2n_1} \quad (4.94)$$

Dans l’air $n_1=1$ et il faut donc que l’épaisseur de la cavité soit une multiple entier de demi longueur d’onde pour produire un maximum en son centre. Cette condition est l’équivalent d’une condition de résonance que l’on retrouve par exemple dans le cas d’une corde vibrante. Cette condition est difficile à réaliser car elle doit être satisfaite à mieux que $\frac{\lambda_0}{2}$

Si au lieu de travailler à longueur d'onde fixe on envoie dans la cavité une radiation polychromatique on a alors

$$\varphi = \frac{4\pi n_1 e \cos r\nu}{c} \quad (4.95)$$

On constate que le déphasage est proportionnel à la fréquence de l'onde ce qui permet d'affirmer que la fonction d'Airy présentera des maxima à des fréquences particulières. La distance entre deux dents consécutives du peigne est égale à 2π si l'on travaille en phase. A une variation de phase de 2π engendrée par le passage de l'ordre p à $p - 1$, correspond une variation de fréquence $\nu_p - \nu_{p-1}$. Cette différence appelée intervalle spectral libre (ISL) est égale en incidence normale pour une lame d'air à

$$ISL = \nu_p - \nu_{p-1} = \frac{c}{2e} = \frac{1}{\tau_{AR}} \quad (4.96)$$

ou τ_{AR} désigne le temps mis par un rayon lumineux pour faire un aller-retour dans la cavité. L'ISL pour une cavité remplie d'air ne dépend donc que de l'épaisseur de la cavité.

La finesse s'écrit également

$$F = \frac{\nu_p - \nu_{p-1}}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{ISL}{\Delta\nu_{1/2}} \quad (4.97)$$

Données numériques

Supposons que la cavité soit de l'air enfermé entre deux parois de verre revêtues de couches diélectriques assurant un coefficient de réflexion de 0.96 séparées d'une distance $e=6\text{mm}$. On a alors

$$m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} = 575 \quad (4.98)$$

$$\tau_{AR} = \frac{2e}{c} = 40\text{ps} \quad (4.99)$$

$$ISL = \frac{1}{\tau_{AR}} = 25\text{GHz} \quad (4.100)$$

$$F = \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = 37.66 \quad (4.101)$$

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{ISL}{F} = 625\text{MHz} \quad (4.102)$$

Si l'on considère une radiation de longueur d'onde de centrage 600nm entrant dans la cavité on voit que

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_{1/2}}{\lambda_0} \implies \Delta\lambda_{1/2} = \lambda_0 \frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu_0} = 15\text{nm} \quad (4.103)$$

Calcul du rayon des anneaux

Nous notons que les anneaux brillants correspondent à un déphasage multiple de 2π ce qui donne leur ordre d'interférence p

$$p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2n_1e \cos r}{\lambda_0} \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

L'ordre d'interférence est demi-entier pour les anneaux sombres.

D'une façon générale pour un angle r on peut calculer un ordre p quelconque (fractionnaire) qui vérifie

$$p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2n_1e \cos r}{\lambda_0}$$

Le rayon des anneaux dépend évidemment de leur ordre. A l'ordre p , on a donc

$$p = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r$$

Le calcul très semblable à celui effectué pour une couche mince en réflexion montre que :

- au centre

$$p_0 = \frac{2n_1e}{\lambda_0}$$

- le premier anneau brillant se trouve à l'ordre p_1

$$p_1 = \frac{2n_1e}{\lambda_0} - \varepsilon$$

- A l'ordre p_k qui correspond à l'anneau brillant k on a donc

$$p_k = p_1 - (k - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_k$$

ce qui conduit à

$$p_0 - \varepsilon - (k - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \cos r_k \Rightarrow \varepsilon + (k - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} (1 - \cos r_k)$$

Si l'on fait l'hypothèse que le rayon angulaire des anneaux est petit alors

$$\begin{aligned} \cos r_k &\simeq 1 - \frac{r_k^2}{2} \\ n_0 i_k &= n_1 r_k \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le rayon angulaire i_k de réflexion de l'anneau brillant numéro k est donné par

$$\varepsilon + (k - 1) = \frac{2n_1e}{\lambda_0} \frac{r_k^2}{2} = \frac{n_1e}{\lambda_0} \left(\frac{n_0 i_k}{n_1} \right)^2 \Rightarrow i_k = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{\lambda_0}{n_1e} (k - 1 + \varepsilon)}$$

Le rayon angulaire d'un anneau sombre suit évidemment la même loi, mais il diffère de celui de l'anneau brillant d'une valeur $1/2$ qui peut être incluse dans l'ordre fractionnaire ε . Du point de vue expérimental il convient de remarquer que la mesure effectuée est toujours celle du rayon de l'anneau et non celle du rayon angulaire. Pour cela on utilise une lentille de grande focale ($f = 1\text{m}$) ou un viseur réglé par autocollimation sur l'infini. Comme le rayon angulaire des anneaux est faible nous pouvons assimiler l'angle de réflexion à sa tangente et comme l'indique la figure il est facile de voir que

$$R_k = fi_k = \frac{f}{n_0} \sqrt{\frac{\lambda_0}{n_1 e} (k - 1 + \varepsilon)}$$

4.4.3 Interféromètre de Fabry-Pérot

Description

L'interféromètre de Fabry-Pérot³ est basé sur le principe de la superposition de N ondes cohérentes divisées en amplitude. C'est une cavité résonante optique d'épaisseur de l'ordre du cm. A la différence de la lame mince, il est constitué d'une lame d'air emprisonnée entre deux plaques de verres prismatiques métallisées au contact de la lame d'air. Les plaques de verre sont prismatiques afin d'éviter les réflexions multiples dans celles-ci. Elles sont métallisées afin d'accroître le coefficient de réflexion air-métal et d'augmenter la finesse. L'indice de la lame d'air est le même que celui du milieu d'observation donc $n_1 = n_0 = 1$.

³Marie Paul Auguste Charles Fabry (1867-1945) et Jean Baptiste Gaspard Perot (1863-1925)

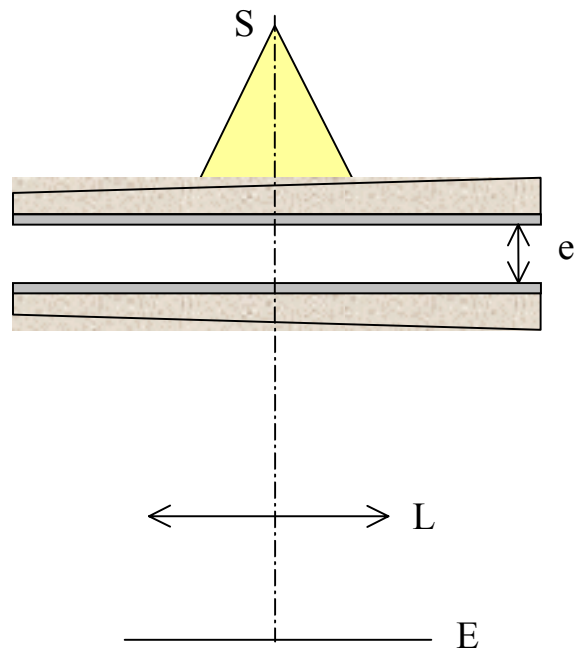


FIG. 4.23 – Représentation en vue de dessus d'un interféromètre de Fabry-Pérot

La figure ci-après est une photographie d'un interféromètre de Fabry-Pérot. Les vis permettent de régler l'épaisseur de la lame d'air.

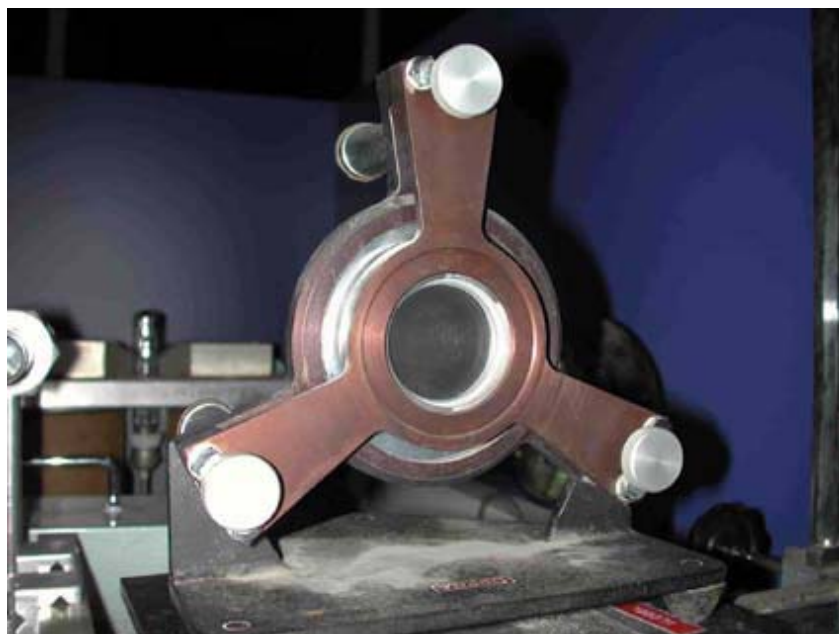


FIG. 4.24 – Photographie d'un interféromètre de Fabry-Pérot. On distingue sur la photographie les vis de réglage du parallélisme des lames.

4.4.4 Figure d'interférences.

L'interféromètre de Fabry-Pérot donne des anneaux concentriques. Le rayon de l'anneau numéro k mesuré dans le plan focal de la lentille est donné par

$$R_k = fi_k = f \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (k - 1 + \varepsilon)}$$

Nous pouvons noter que la lentille qui permet l'observation des anneaux est en général un viseur. Un instrument de ce type est constitué d'une lentille mince convergente appelée l'objectif du viseur et d'un oculaire qui permet d'observer ce qui se passe dans le plan focal de l'objectif tout du moins si le viseur est réglé sur l'infini (ce type de réglage est obtenu par autocollimation).

Les anneaux observés dans le viseur sont d'autant plus fins que la finesse de l'instrument est grande. Pour avoir un bonne finesse il faut disposer d'un fort coefficient de réflexion air-verre. C'est pour cette raison que les miroirs d'un Perot-Fabry sont métallisés. Les anneaux sont d'autant plus visibles que la source utilisée est monochromatique. Si l'on utilise une lampe à vapeur caractérisée par un spectre de raies, chaque longueur d'onde contenue dans le spectre produira son propre système d'anneaux.

4.4.5 Pouvoir de résolution

En particulier, si deux radiations très voisines l'une de l'autre sont présentes dans le spectre nous aurons pour le même ordre

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e \cos r \lambda}{\lambda}$$

Toute variation de la longueur d'onde engendrera à δ donné une variation de phase φ donnée par la différentielle de φ soit

$$d\varphi = -\frac{2\pi\delta}{\lambda^2}d\lambda \quad (4.104)$$

Si nous repérons cette variation au voisinage d'un anneau brillant nous avons $\varphi = p\pi$, ce qui se traduit par

$$d\varphi = -p\pi \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (4.105)$$

Si l'on applique le critère de Rayleigh qui veut que deux radiations soient séparables si le maximum de l'une est au moins séparé du maximum de l'autre de la demi-largeur à mi-hauteur du maximum il vient

$$d\varphi = \frac{\pi}{F} = p\pi \frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = pF \quad (4.106)$$

Par définition la quantité $\frac{\lambda}{d\lambda}$ définit le pouvoir de résolution du Pérot-Fabry. La relation 4.106 montre que pour augmenter le pouvoir de résolution il importe soit de regarder à ordre élevé, donc près du centre, soit d'augmenter la finesse, c'est à dire le coefficient de réflexion du dioptre air-verre. A titre d'exemple nous considérons un PF d'épaisseur 10mm éclairé avec une radiation de longueur d'onde $\lambda = 500\text{nm}$. L'ordre au centre est donc $p_0 = \frac{2e}{\lambda} = 40000$. En supposant une finesse de 30 ce qui est raisonnable nous voyons que le pouvoir de résolution atteint $\mathcal{R} = 1200000$. Un tel appareil permet en théorie de résoudre $d\lambda = 410^{-4}\text{nm}$ ce qui est évidemment remarquable.

En pratique un tel niveau de résolution est cependant difficile à atteindre et le pouvoir de résolution est limité par la qualité de la lame (rugosité et parallélisme).

On conçoit que si l'on interpose un trou au centre de la figure d'interférences d'un FP, il soit possible de ne laisser passer que l'ordre au centre. Si celui-ci est un entier, un anneau brillant est transmis dans le trou avec une résolution en longueur d'onde fantastique.

4.4.6 Cavité laser

Principe

L'interféromètre de Perot-Faby est une cavité optique résonante. Ce type de cavité a trouvé à la découverte de l'effet Laser une utilité toute naturelle pour permettre l'entretien des oscillations lumineuses engendrées dans la cavité. Pour simplifier un laser est constitué de deux miroirs séparés d'une distance d ; l'un des deux miroirs est parfaitement réfléchissant et l'autre est légèrement transparent pour laisser s'échapper le rayonnement lumineux (voir 4.25). A l'intérieur de la cavité formée par les deux miroirs se trouve un gaz sous faible pression. Le gaz est excité par une décharge électrique. Par exemple dans un laser He-Ne, le gaz est constitué de 90% d'He et de 10% de Ne sous une pression totale de 1mm de Hg. La tension entre les deux électrodes est de l'ordre de

1000V ce qui permet d'amener par collision les électrons des atomes dans des niveaux excités.

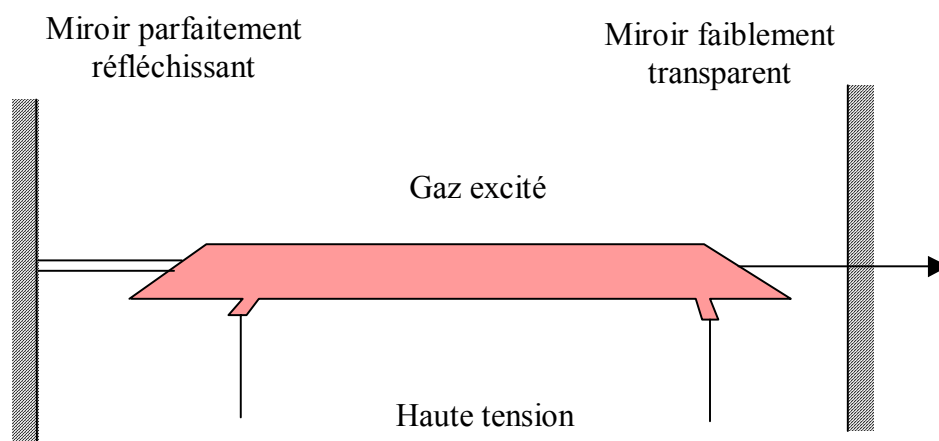


FIG. 4.25 – Schéma de principe d'un laser He-Ne. On distingue les deux miroirs et le tube à décharge limité par deux fenêtres à l'incidence de Brewster.

Dans le cas de ce laser, il y a deux types d'atomes. On peut supposer que les atomes A (He) sont dans un état excité et qu'il peuvent transférer leur énergie par collision aux atomes B (Ne) pour les amener dans un état excité. On dit alors que l'on a une collision résonante. La probabilité d'observer ce phénomène est régie par les règles de la mécanique quantique et l'on montre qu'elle est d'autant plus grande que la différence des niveaux d'énergie est faible. C'est pourquoi on utilise ce type de mélange car les niveaux S de l'He sont très proches des s et p du Ne. La transition du niveau 3S à 3p du Ne produit une raie rouge intense de longueur d'onde 632.8nm.

Einstein a montré en 1917 que si un atome est déjà dans un état excité le photon incident ne peut être absorbé mais qu'il provoque la désexcitation de l'atome avec émission d'un photon de même énergie qui a les propriétés suivantes

- le train d'onde associé au photon induit est en phase avec celui du photon incident
- il est émis dans le même sens et avec la même polarisation.

Ceci constitue le phénomène d'**émission induite** ou **émission stimulée** représentée sur la figure 4.26.

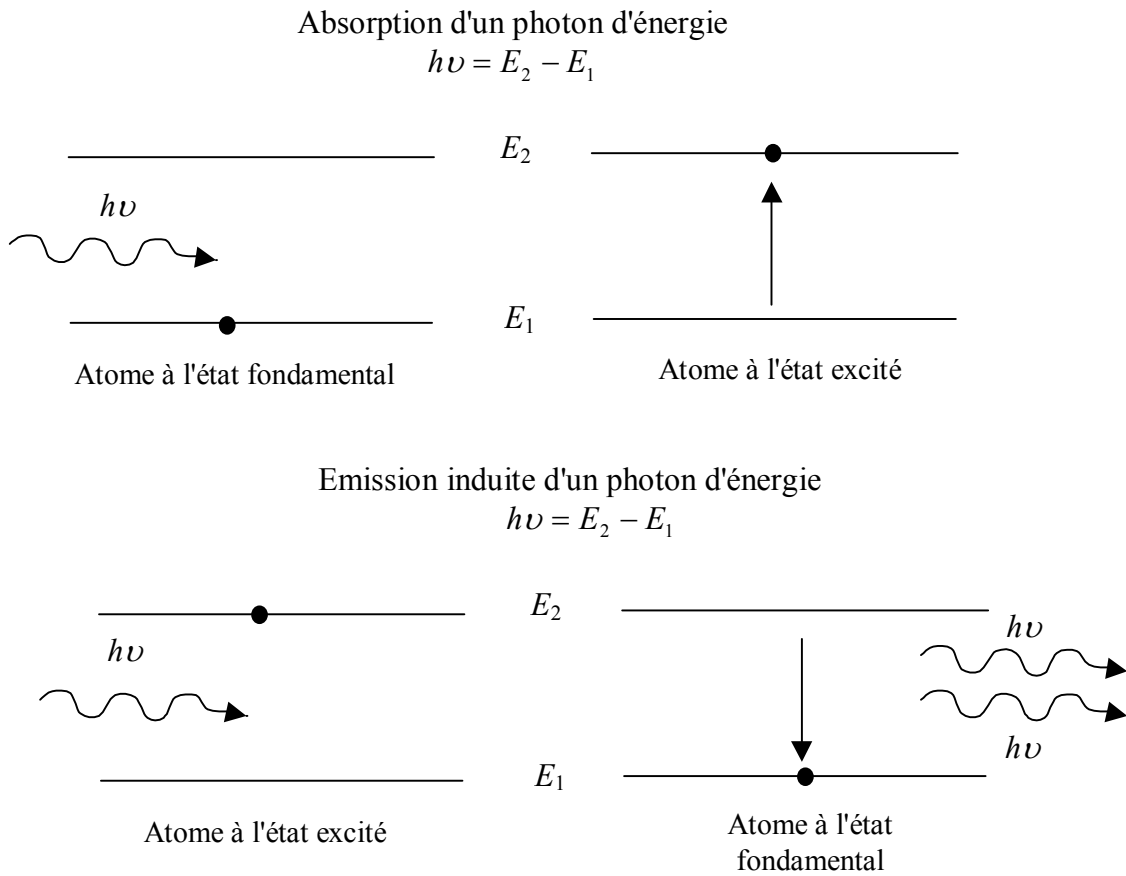


FIG. 4.26 –

Le phénomène d'émission induite est très rare dans des sources classiques qui fonctionnent sur le principe de l'émission radiative spontanée. Dans les lasers on s'arrange pour amener une grande partie des atomes dans un état excité. Un photon spontané émis dans un tel milieu produit une véritable cascade de photons induits ayant tous la même phase et la même direction de propagation que le photon incident.

Pour fonctionner correctement un laser doit donc être constitué de trois éléments :

- un milieu actif dans lequel on réalise l'inversion de population, c.a.d. l'excitation d'une grande partie des atomes
- une cavité résonnante (PF) qui favorise l'émission induite pour peu que les ondes soient en phase à chaque réflexion.
- une source d'énergie qui permet l'inversion de population et qui évite les pertes.

Durée de vie

Le rayonnement émis se propage dans la cavité et est réfléchi par les miroirs. Si l'on appelle $\tau_{AR} = 2d/c$ le temps mis par un rayon pour effectuer un aller-retour dans la cavité, on conçoit que l'intensité puisse augmenter par sauts de τ_{AR} si les miroirs sont

assez réfléchissants. Si l'on appelle R_1 et R_2 les coefficients de réflexion en intensité sur chaque des deux miroirs de la cavité et si l'on coupe de manière très rapide le faisceau, on constate que le rayonnement persiste dans la cavité. On a en effet :

$$I(t + \tau_{AR}) = R_1 R_2 I(t) \quad (4.107)$$

ce qui conduit à

$$I(t + \tau_{AR}) - I(t) = -(1 - R_1 R_2) I(t) \quad (4.108)$$

Il s'ensuit que l'intensité décroît dans la cavité comme

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau} \quad (4.109)$$

avec

$$\tau = \frac{\tau_{AR}}{1 - R_1 R_2} \quad (4.110)$$

Pour que la durée de vie soit longue il faut donc avoir des miroirs bien réfléchissants. Supposons que l'on considère une cavité de 30cm et des miroirs tels que $R_1 R_2 = 0.95$, on a alors $\tau_{AR} = 2ns$ et $\tau = 40ns$.

Modes propres d'une cavité laser

Les modes propres de la cavité laser sont obtenus en considérant que le champ électrique doit s'annuler sur les miroirs du PF. Si la longueur d'onde d'émission est notée λ il faut que la distance d entre les deux miroirs vérifie

$$d = p \frac{\lambda}{2} \quad (4.111)$$

pour que la cavité puisse rentrer en résonance. Si cette condition est vérifiée les ondes se réfléchissent en phase sur chaque miroir. Les modes possibles ν_p doivent donc satisfaire la relation

$$d = p \frac{c}{2\nu_p} \implies \nu_p = \frac{pc}{2d} \quad (4.112)$$

Nous avons vu précédemment que la différence de fréquence entre 2 modes constitue l'ISL de la cavité. La largeur d'un mode dépend de la finesse et est donnée par $\Delta\nu_p = ISL/F$.

A cause de l'agitation thermique les niveaux électroniques fluctuent et la fréquence d'émission n'est pas une distribution de Dirac mais une gaussienne centrée sur une fréquence ν_0 et de largeur spectrale $\Delta\nu_0$. Cette largeur est très supérieure à celle d'un mode de la cavité.

A titre d'exemple nous considérons les modes d'une diode laser He-Ne. Cette diode laser émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_0 = 600nm$ avec une largeur spectrale $\Delta\lambda_0 = 2nm$ (pleine largeur à mi-hauteur). En fréquence ces données correspondent à $\nu_0 = 500THz$ et $\Delta\nu_0 = 1.5THz$ comme le montre la figure 4.27. Si le laser est formé de miroirs distants de 0.35mm, l'ISL est égal à $c/2L = 0.4286THz$. En supposant que les

modes ne peuvent être accrochés que si leur intensité est supérieure à $I_0/2$ on voit que l'on dispose dans la cavité de $N=1.5/0.43 \simeq 3$ modes. Ces trois modes correspondent à $p=1166, 1167$ (500.05THz) et 1168.

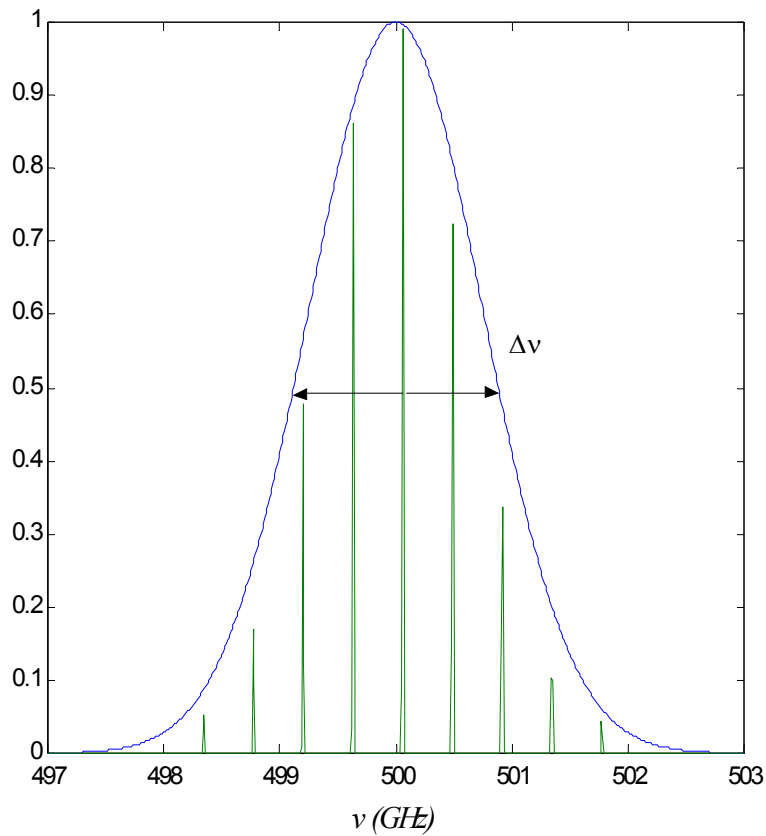


FIG. 4.27 – Représentation des modes permis dans une cavité de type diode laser de 0.35mm pour une largeur de raie de 2pm

Chapitre 5

Diffraction de la lumière. Principe d'Huygens-Fresnel

5.1 Mise en évidence expérimentale

Considérons une source laser (laser He-Ne $\lambda = 632.8\text{nm}$) et interposons entre ce laser et un écran placé à grande distance de la source, une fente de largeur variable a , sur le trajet du faisceau comme l'indique la figure 5.1.

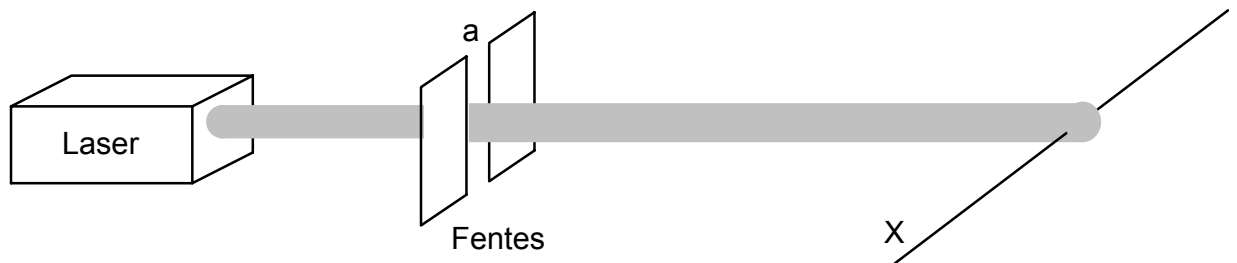


FIG. 5.1 – *Dispositif expérimental pour observer le phénomène de diffraction de la lumière.*

Lorsque la largeur de la fente est grande par rapport au diamètre du faisceau, le cheminement de la lumière n'est pas altéré et on observe sur l'écran l'impact ponctuel du faisceau. En fermant progressivement les fentes on observe que l'éclairage sur l'écran commence à s'étaler dans la direction parallèle à celle de la fermeture des fentes et que la lumière **s'éparpille** dans des directions autres que celle du faisceau direct. L'éparpillement de la lumière sur l'écran est caractéristique d'un phénomène appelé **diffraction** de la lumière. Le phénomène est bien visible lorsque la dimension a de l'ouverture est proche de la longueur d'onde λ de la lumière utilisée ($a < 100\lambda$). La figure de diffraction observée sur l'écran est caractérisée par une tache centrale très intense deux fois plus large que les taches latérales beaucoup plus faibles comme le montre la figure 5.2.

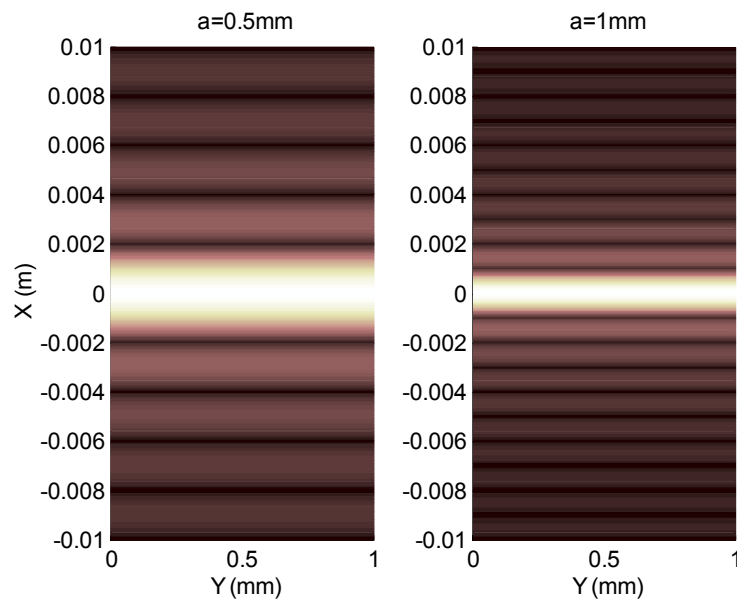


FIG. 5.2 – Figures de diffraction de la lumière laser par deux fentes de largeur $a_1 = 0.5\text{mm}$ et $a_2 = 1\text{mm}$. Plus l'ouverture de la fente diminue plus la figure de diffraction est étalée. En particulier il importe de remarquer que le lobe central est deux fois plus large que les lobes latéraux et qu'il est très intense par rapport à ceux-ci. L'absence de lumière en certains endroits de la figure confirme la nature ondulatoire de la lumière.

Lorsque la largeur de la fente diminue l'éparpillement de la lumière incidente s'amplifie. Une diminution de moitié de la largeur de la fente centrale entraîne un doublement de la largeur des lobes de diffraction ce qui montre que l'étalement de la figure de diffraction est inversement proportionnel à l'ouverture a de la fente.

Définition :

On appelle diffraction toute déviation des rayons lumineux de leur trajectoire ne pouvant ni s'expliquer par un phénomène de réflexion ou de réfraction.

Le phénomène de diffraction peut aussi être observé lorsque le cheminement de la lumière est altéré par un bord d'écran.

5.2 Principe d'Huygens-Fresnel

5.2.1 Enoncé

Le principe d'Huygens-Fresnel jette les bases de l'interprétation des phénomènes de diffraction. Il est une bonne illustration du cheminement de la pensée scientifique puisqu'il fait appel à des idées proposées à plus d'un siècle d'intervalle par Huygens et Fresnel. Il permet d'interpréter de façon relativement simple la diffraction.

– **Contribution d'Huygens (1678) :**

La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par la lumière se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques

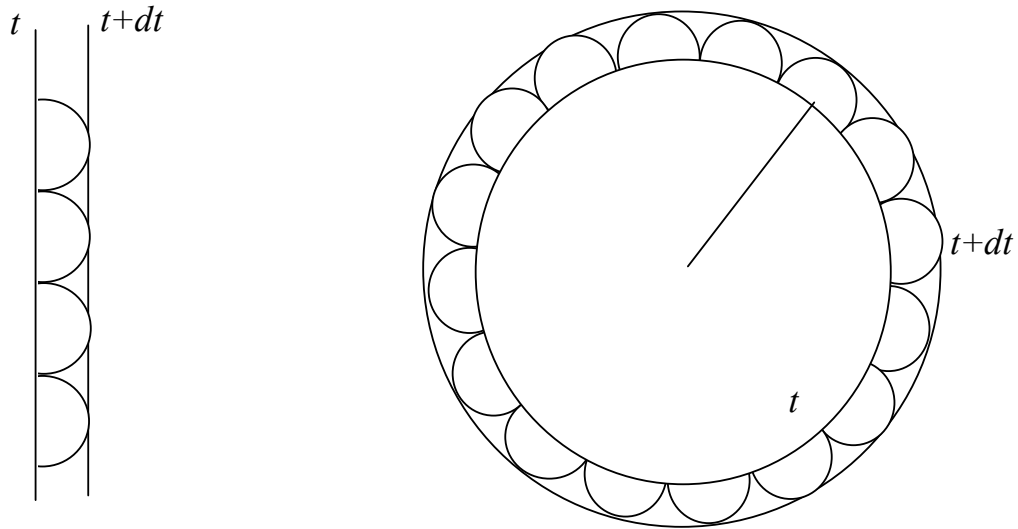


FIG. 5.3 – Evolution des surfaces d'ondes dans un milieu isotrope pour des ondes plane et sphériques. La connaissance d'une surface à l'instant t permet de déduire toutes les autres surfaces à des instants ultérieurs.

dont l'amplitude est proportionnelle à la surface de la source secondaire.

La surface d'onde à l'instant $t + dt$ se déduit de la surface d'onde à t en considérant à l'instant $t + dt$ l'enveloppe des ondelettes d'Huygens qui se sont propagées pendant l'intervalle de temps dt .

Cette représentation de la propagation d'une onde est intuitivement liée à la propagation des ondes à la surface d'un liquide. Ce type de construction permet à Huygens d'expliquer simplement le phénomène de réfraction de la lumière. On imagine facilement en utilisant la construction d'Huygens qu'une surface d'onde ne peut pas se propager sans déformation si elle rencontre un obstacle comme le montre la figure 5.4.

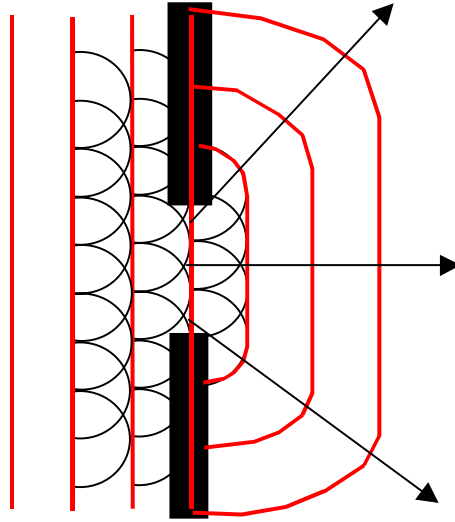


FIG. 5.4 – Illustration à partir de la construction d'Huygens de la modification des surfaces d'onde au passage par une ouverture.

– **Contribution de Fresnel (1818)**

L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. Les vibrations lumineuses interfèrent pour former la lumière résultante au point P considéré.

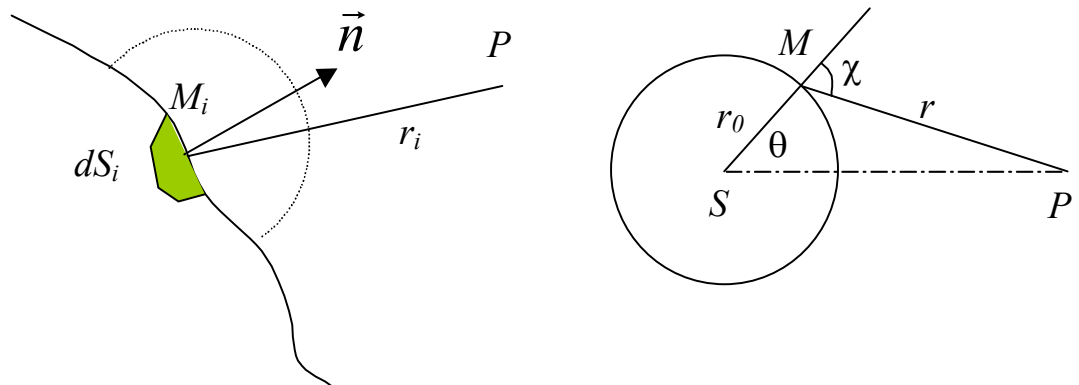


FIG. 5.5 – Représentation utilisée par Fresnel pour expliquer comment calculer le champ au point d'observation P .

5.2.2 Formalisation mathématique

Mathématiquement si l'on considère un point M_i d'une surface d'onde appartenant à une source secondaire, la contribution de Fresnel aboutit à ce que le champ $E(P)$ au

point d'observation P soit donné par :

$$E(P, t) = e^{-i\omega t} \sum_i E(M_i) Q_i(\chi) \frac{e^{ik_i r_i}}{r_i} dS_i \quad (5.1)$$

Le terme en $1/r_i$ signifie que l'on considère la propagation d'ondelettes sphériques, le terme exponentiel est un terme de déphasage entre le point source M_i de la surface diffractante et le point P , le terme Q appelé **facteur d'obliquité ou d'inclinaison** est lié à l'angle χ entre la direction de propagation de l'onde incidente et la direction de l'onde diffractée et dS_i est la surface élémentaire qui diffracte au point source M_i . Le facteur d'obliquité est maximal en $\chi = 0$ et décroît rapidement avec χ pour s'annuler en $\chi = \pi/2$. Il est possible de démontrer que ce facteur est lié à une constante multiplicative près au cosinus de l'angle χ . Le champ total au point P résulte de la superposition de tous les champs provenant des sources élémentaires.

La répartition lumineuse étant continue dans la surface S , la somme discrète de l'équation 5.1 est remplacée par une intégrale double sur l'étendue de la surface qui diffracte et cette expression se transforme en :

$$E(P, t) = e^{-i\omega t} \iint_S E(M) Q(\chi) \frac{e^{ikr}}{r} d^2 S \quad (5.2)$$

L'intégrale que nous venons d'obtenir s'appelle l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff. Elle constitue l'essence mathématique de tous les phénomènes de diffraction et plus généralement de diffraction et interférence.

Si l'on considère que l'angle χ est toujours très petit ce qui constitue l'approximation des rayons paraxiaux (faiblement inclinés sur l'axe optique du système) alors

$$E(P, t) = K e^{-i\omega t} \iint_S E(M) \frac{e^{ikr}}{r} d^2 S \quad (5.3)$$

Il peut être judicieux de remarquer que le terme de phase $\frac{K e^{ikr}}{r}$ fait intervenir le passage du point M au point P d'observation et peut être écrit sous la forme d'une fonction de transfert $h(M \rightarrow P)$ de M en P

$$h(M \rightarrow P) = K \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.4)$$

Il s'ensuit que l'intégrale de Fresnel Kirchhoff devient

$$E(P, t) = e^{-i\omega t} \iint_S E(M) h(M \rightarrow P) d^2 S \quad (5.5)$$

Si l'on se base sur une source S lumineuse ponctuelle (partie droite de la figure 5.5) le champ en M est donné par

$$E(M, t) = A e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \quad (5.6)$$

ce qui conduit à

$$E(P, t) = A e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \iint_S Q(\chi) \frac{e^{ikr}}{r} d^2 S \quad (5.7)$$

L'intégrale ci-dessus n'est pas simple à calculer et ce fût le mérite de A. Fresnel d'avoir proposé une méthode de calcul basée sur la division de la figure en zones dites **zones de Fresnel**.

5.2.3 Zones de Fresnel

Fresnel a utilisé une astuce de calcul pour calculer l'intégrale. Pour cela il a divisé la surface d'onde où se trouve le point M en une série de zones Z_p . Chaque zone est obtenue en traçant les cercles de centre P et de rayons $b, b + \lambda/2, b + 2\lambda/2, b + 3\lambda/2, \dots, b + p\lambda/2$ où $b=PC$. Il remarque alors que les rayons lumineux issus de deux zones consécutives sont en opposition de phase puisque leur trajet optique diffère de $\lambda/2$. Il s'ensuit que deux zones consécutives s'annihilent entre elles. De ce fait si l'on part de la première zone et que l'on somme toutes les contributions des autres zones celles-ci se détruisent deux à deux et il ne reste schématiquement que la contribution de la première zone.

Pour faire le calcul de la contribution d'une zone quelconque on suppose que la longueur d'onde est suffisamment petite par rapport à b et r_0 pour que le facteur d'obliquité soit constant dans chaque zone ; il est alors noté Q_p .

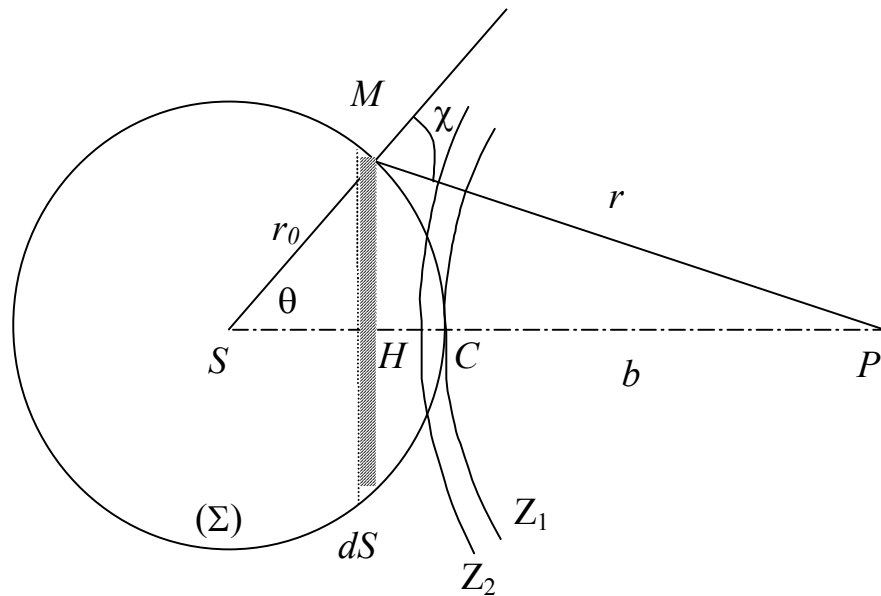


FIG. 5.6 –

Fresnel a ensuite calculé la contribution de chaque zone Z_p au point P et il a ensuite sommé toutes les contributions pour trouver le résultat final. Pour une position quelconque de M sur la sphère (Σ) on a

$$dS = 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta \quad (5.8)$$

L'identité d'Alkachi appliquée dans le triangle SPM conduit à

$$r^2 = r_0^2 + (b + r_0)^2 - 2r_0(b + r_0) \cos \theta \quad (5.9)$$

ce qui entraîne

$$2rdr = 2r_0(b + r_0) \sin \theta d\theta \implies \sin \theta d\theta = \frac{rdr}{r_0(b + r_0)} \quad (5.10)$$

Il s'ensuit que

$$dS = \frac{2\pi r_0 r dr}{b + r_0} \quad (5.11)$$

La contribution élémentaire de la zone Z_p au champ en P est donc

$$dE_p(P, t) = Ae^{-i\omega t} e^{ikr_0} Q_p e^{ikr} \frac{2\pi dr}{b + r_0} \quad (5.12)$$

ce qui conduit à

$$E_p(P, t) = \frac{2\pi}{b + r_0} Ae^{-i\omega t} e^{ikr_0} Q_p \int_{b+(p-1)\lambda/2}^{b+p\lambda/2} e^{ikr} dr \quad (5.13)$$

Après intégration il vient

$$E_p(P, t) = 2i\lambda Ae^{-i\omega t} \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} Q_p (-1)^p \quad (5.14)$$

Le champ total au point P est obtenu en sommant contribution de toutes les zones de Fresnel ce qui conduit à

$$E(P, t) = \sum_{p=1}^N E_p(P, t) = 2i\lambda Ae^{-i\omega t} \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \sum_{p=1}^N Q_p (-1)^p \quad (5.15)$$

Pour déterminer le champ en P il convient ensuite d'évaluer la valeur de la suite. Fresnel a montré que cette suite peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^N Q_p (-1)^p = -\frac{1}{2} (Q_1 \pm Q_N) \quad (5.16)$$

Or si l'on considère la sphère la dernière zone correspond à $\chi = \pi/2$ ce qui entraîne $Q_N = 0$. Il s'ensuit que le champ en P est égal au champ créé par la première zone de Fresnel et vaut

$$E(P, t) = -i\lambda Q_1 Ae^{-i\omega t} \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \quad (5.17)$$

Si l'on considère un rayon allant directement de S en P le champ est aussi égal à

$$E(P, t) = Ae^{-i\omega t} \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \quad (5.18)$$

ce qui montre que

$$Q_1 = \frac{i}{\lambda} \quad (5.19)$$

Remarques :

En principe il convient de traiter le problème vectoriellement à cause de la polarisation de la lumière d'une part et d'autre part à cause du caractère vectoriel du champ (les champs qui se superposent en P ne sont pas colinéaires). La théorie de Fresnel reste cependant une théorie scalaire non rigoureuse mathématiquement. Le calcul rigoureux de la diffraction par une ouverture est extrêmement compliqué et ne sera pas abordé dans ce cours. Pour des quantités scalaires, il faut pour cela utiliser la théorie de Kirchhoff¹ qui permet de montrer que le facteur d'obliquité est égal à

$$Q(\chi) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \chi) \quad (5.20)$$

5.3 Diffraction d'une onde plane par un diaphragme plan.

5.3.1 Présentation générale.

Nous considérons la diffraction d'une onde plane progressive arrivant sur un diaphragme plan dont le centre est localisé en un point O . La direction de propagation de l'onde incidente est selon Oz et le diaphragme est dans le plan Oxy . L'observation est faite sur un écran placé à une distance D de O .

L'onde incidente qui arrive sur le diaphragme est une onde plane polarisée rectilignement. Tous les points du diaphragme sont donc en phase et vont se comporter comme des sources secondaires synchrones. En vertu du principe de Huygens-Fresnel, les sources secondaires vont émettre des ondes sphériques qui vont venir se superposer au point P .

En tout point M du diaphragme, l'onde incidente plane est représentée en prenant arbitrairement l'origine des phases sur le diaphragme par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (5.21)$$

Après la traversée du diaphragme cette onde devient sphérique et se propage donc dans tout le demi-espace en aval du diaphragme comme le montre la figure 5.8. Il n'y a plus une seule direction de propagation mais une infinité de directions. Le champ électrique dans chaque direction de propagation est transverse ce qui entraîne qu'à chaque direction de propagation il y ait une direction de polarisation de la lumière. Formulé de cette façon nous voyons que le problème du calcul du champ en un point P de l'espace va être délicat à effectuer. C'est pour cette raison que nous allons proposer quelques approximations que nous allons maintenant justifier.

¹Voir pour plus de détails

Principles of Optics par M. Born and E. Wolf, 4^{ème} édition Chapitre 8, p. 375, PERGAMON

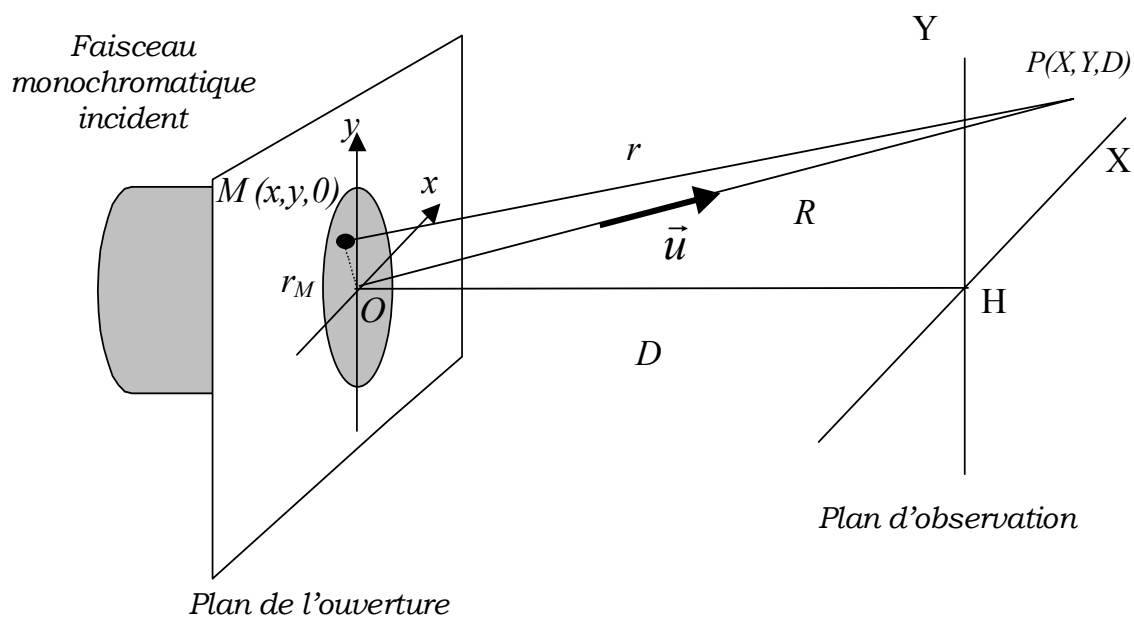


FIG. 5.7 – Représentation schématique des conditions expérimentales de diffraction par un diaphragme plan.

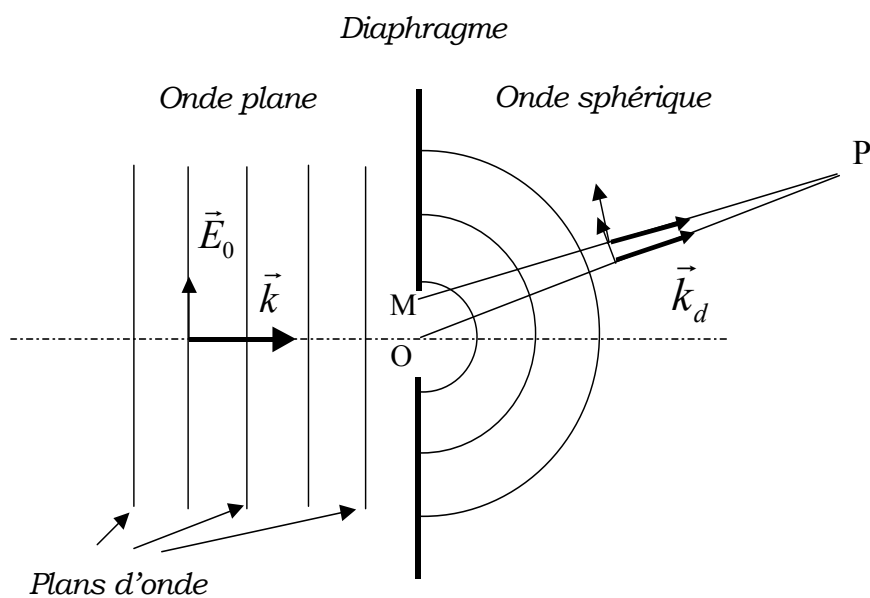


FIG. 5.8 – Transformation d'une onde plane monochromatique en une onde sphérique au passage par un point O du diaphragme. Chaque point du diaphragme crée son propre système d'ondes sphériques. Toutes ces ondes interfèrent entre elles pour produire la figure de diffraction.

5.3.2 Approximations

Le calcul du champ en P se simplifie grandement si l'on place l'écran à une distance suffisamment grande du diaphragme. Par suffisamment grand on entend que la distance D doit être très grande devant l'ouverture a du diaphragme. Dans ce cas, les ondes sphériques issues du diaphragme vont arriver sur l'écran sous une incidence assez faible ce qui va nous permettre de considérer que toutes les ondes arrivant en P auront à peu près la même direction de propagation donc également à peu près la même polarisation (voir figure 5.8). Cette approximation consiste à dire que l'onde sphérique loin de la source est très proche d'une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_d . Ce vecteur d'onde de diffusion \vec{k}_d a sensiblement pour toutes les ondes qui arrivent en P la même direction que le vecteur \vec{OP} qui relie l'origine O du diaphragme au point d'observation P sur l'écran. Cela revient implicitement à considérer que les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe, ce que l'on appelle l'approximation des rayons paraxiaux, et se propagent presque parallèlement entre eux.

Les approximations suivantes

- ondes scalaires
- rayons paraxiaux
- vecteur de diffusion \vec{k}_d unique

sont donc considérées comme valides pour calculer le champ créé en P . L'intégrale de Fresnel-Kirchhoff devient donc

$$E(P, t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{\lambda} \iint_S E(M) \frac{e^{ik_d MP}}{MP} d^2S = \frac{ie^{-i\omega t}}{\lambda} \iint_S E(M) \frac{e^{i2\pi f \frac{MP}{c}}}{MP} d^2S \quad (5.22)$$

On notera que le facteur d'obliquité Q est égal à i/λ et qu'il n'existe plus qu'un seul vecteur d'onde dans le terme de phase.

L'introduction de la fonction de transfert conduit également à

$$E(P, t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{\lambda} \iint_S E(M) h(M \rightarrow P) d^2S \quad (5.23)$$

En utilisant la fonction de transparence du diaphragme (ou de la pupille) définie par :

$$t(M) = t(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \notin \text{ouverture} \\ 1 & \text{si } M \in \text{ouverture} \end{cases} \quad (5.24)$$

on peut étendre l'intégration à tout l'espace et généraliser le calcul sous la forme

$$E(P, t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{\lambda} \iint_{\text{espace}} t(M) E(M) h(M \rightarrow P) d^2S \quad (5.25)$$

Pour calculer l'état vibratoire en P , il importe de calculer la distance MP . Le point source M de coordonnées (x, y) est distant de R_M de O . Le point P de l'écran de coordonnées (X, Y) est distant de R de O . Le vecteur MP est donc donné par :

$$\vec{MP} = \vec{MO} + \vec{OP} = \vec{MO} + \vec{OH} + \vec{HP} \quad (5.26)$$

avec

$$\overrightarrow{MO} = -(x\vec{i} + y\vec{j}) \quad (5.27)$$

$$\overrightarrow{OP} = X\vec{i} + Y\vec{j} + D\vec{k} \quad (5.28)$$

Il s'ensuit que

$$MP = r = D \left(1 + \left(\frac{X-x}{D} \right)^2 + \left(\frac{Y-y}{D} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5.29)$$

L'expression générale est donc obtenue en reportant la valeur de MP dans l'équation donnant l'amplitude diffractée. Il importe de remarquer que le calcul de l'intégrale dans ces conditions est difficile à faire voir impossible sans faire d'approximations sur la fonction de transfert $h(M \rightarrow P)$.

5.3.3 Intégrale de Fresnel.

Dans un premier temps pour permettre le calcul de l'intégrale nous faisons l'hypothèse que la distance D est très supérieure aux distances OM et HP . Comme la racine carré est approximée au premier ordre nous pouvons qualifier cette approximation **d'approximation parabolique**. Il s'ensuit que la distance MP s'écrit alors :

$$MP = r \simeq D + \frac{(X-x)^2}{2D} + \frac{(Y-y)^2}{2D} \quad (5.30)$$

soit

$$MP = r \simeq D + \frac{X^2 + Y^2}{2D} + \frac{x^2 + y^2}{2D} - \frac{xX + yY}{D} \quad (5.31)$$

La fonction de transfert devient donc

$$h(M \rightarrow P) = \frac{e^{ik_d \left(D + \frac{X^2 + Y^2}{2D} + \frac{x^2 + y^2}{2D} - \frac{xX + yY}{D} \right)}}{D} \quad (5.32)$$

soit

$$h(M \rightarrow P) = \frac{e^{ik_d D}}{D} e^{ik_d \frac{X^2 + Y^2}{2D}} e^{ik_d \frac{x^2 + y^2}{2D}} e^{-ik_d \frac{xX + yY}{D}} \quad (5.33)$$

Le report de l'expression de MP dans l'équation donnant l'amplitude au point P conduit à :

$$E(P, t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{\lambda D} e^{ik_d D} e^{ik_d \frac{X^2 + Y^2}{2D}} \iint_{\text{espace}} t(M) E(M) e^{ik_d \frac{x^2 + y^2}{2D}} e^{-ik_d \frac{xX + yY}{D}} d^2 S \quad (5.34)$$

On voit bien que l'intégrale précédente appelée intégrale de Fresnel est difficile à calculer si le terme de phase $k_d \frac{x^2 + y^2}{2D} = 2\pi \frac{x^2 + y^2}{2\lambda D}$ n'est pas négligeable c'est à dire si la

condition $\lambda D \gg x^2 + y^2$ n'est pas vérifiée. En considérant un point M de l'ouverture à 0.5mm de l'origine on voit que cette condition pour une longueur d'onde $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ conduit à

$$D \gg \frac{2510^{-8}}{0.510^{-6}} = 0.5\text{m} \quad (5.35)$$

Dans l'hypothèse où la condition 5.35 n'est pas vérifiée on dit que l'on observe de la **diffraction à distance finie** ou **diffraction de Fresnel**. Si au contraire cette condition est vérifiée il est possible de simplifier considérablement l'intégrale de Fresnel.

5.3.4 La diffraction à distance infinie : diffraction de Fraunhofer.

L'approximation de Fraunhofer consiste à se placer à distance infinie du diaphragme. Dans ce cas, la première exponentielle sous l'intégrale tend vers 1 et l'expression de l'amplitude au point P devient beaucoup plus simple.

$$E(P, t) = \frac{ie^{ik_d D}}{\lambda D} e^{ik_d \frac{x^2+y^2}{2D}} e^{-i\omega t} \iint_{\text{espace}} t(M) E(M) e^{-ik_d \frac{xX+yY}{D}} d^2 S \quad (5.36)$$

On notera à l'issue de ce calcul le signe de la phase l'onde (le même que celui de l'exponentielle temporelle comme si l'onde considérée était régressive) ainsi que la phase additionnelle liée à i . D'autre part si l'on considère l'équation aux dimensions nous voyons que

- les exponentielles sont sans dimensions
- l'intégrale est homogène à une surface
- le produit λD homogène à une surface assure la cohérence des dimensions

L'expression ci-dessus est simplifiable si l'on tient compte du fait que l'écran est supposé fixe et que l'onde incidente est plane. En effet on a alors :

$$E(P, t) = \frac{ie^{ik_d D}}{\lambda D} e^{ik_d \frac{x^2+y^2}{2D}} A e^{-i\omega t} \iint_{\text{espace}} t(M) e^{-ik_d \frac{xX+yY}{D}} d^2 S \quad (5.37)$$

et le préfacteur qui se situe devant l'intégrale peut être considéré comme constant puisque les exponentielles complexes disparaîtront dans le calcul de l'intensité diffractée lorsqu'il sera multiplié par son conjugué. On obtient donc pour une distance D et une longueur d'onde fixes l'expression suivante :

$$E(P, t) = K e^{-i\omega t} \iint_{\text{espace}} t(M) e^{-ik_d \frac{xX+yY}{D}} d^2 S \quad (5.38)$$

Le calcul de l'amplitude diffractée passe donc par l'évaluation de l'intégrale ci-dessus pour différents types de surface diffractante.

En introduisant les fréquences spatiales u et v définies par :

$$u = \frac{X}{\lambda D} \quad v = \frac{Y}{\lambda D} \quad (5.39)$$

qui s'expriment en m^{-1} et sont bien homogènes à des fréquences, il vient :

$$E(P) = KAe^{-i\omega t} \iint_{\text{espace}} t(M)e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (5.40)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme :

$$E(u, v) = KAe^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y)e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (5.41)$$

ce qui conduit au théorème suivant :

” A distance infinie l’amplitude diffractée par une pupille dans le plan d’observation est à une constante K près la transformée de Fourier bidimensionnelle de la transparence pupillaire”.

Remarques :

Si nous faisons apparaître le vecteur unitaire dans la direction moyenne d’observation pour un point d’observation P peu éloigné du centre de l’écran

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OP}}{OP} \simeq \frac{X\vec{i} + Y\vec{j} + D\vec{k}}{D} \quad (5.42)$$

il est facile de voir que

$$\frac{xX + yY}{D} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} \quad (5.43)$$

Cette quantité représente la différence de marche entre les ondes provenant du centre O de la pupille et celles issues d’un point M quelconque dans l’ouverture.

$$\delta(P) = OP - MP = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} \quad (5.44)$$

Il s’ensuit que l’argument de l’exponentielle peut s’écrire

$$k_d \frac{xX + yY}{D} = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM} \quad (5.45)$$

ce qui correspond à la différence de phase $\phi(P)$:

$$\Phi(P) = \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda} = k_d\delta(P) = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM} \quad (5.46)$$

5.4 Etude de divers systèmes expérimentaux.

5.4.1 La réalisation de l’onde plane.

Pour bien aborder le problème de la diffraction d’un point de vue expérimental, il importe avant tout de pouvoir fabriquer une onde plane incidente qui arrivera sur l’ouverture.

La réalisation expérimentale de l’onde plane est possible au moyen des deux systèmes suivants :

- un laser (en assez bonne approximation)
- une source ponctuelle placée au foyer d’une lentille convergente

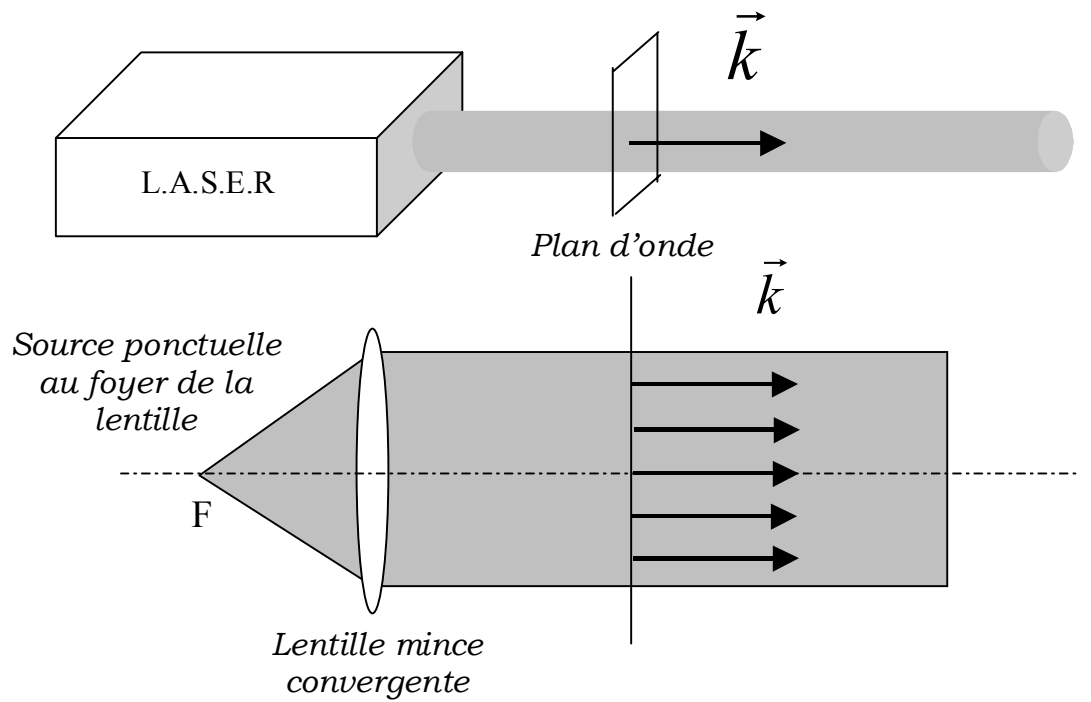


FIG. 5.9 – La réalisation pratique de l'onde plane ; l'onde émise par le LASER n'est pas rigoureusement plane mais s'y apparente fortement.

Dans ces deux cas, il importe de noter que dans l'onde plane obtenue il y a une infinité de trains d'onde de durée de vie finie et que la lumière que peut percevoir un détecteur est en fait la superposition d'une énorme quantité de trains d'ondes qui n'ont pas tous le même état de polarisation.

5.4.2 Diffraction par une fente rectiligne de largeur finie a .

Nous considérons dans cet exemple le calcul de la figure de diffraction d'une onde plane par une fente de largeur finie a . L'onde incidente est supposée être une onde plane progressive ce qui impose que tous les points lumineux arrivant sur la fente y arrivent en phase car ils sont tous contenus dans le même plan d'onde.

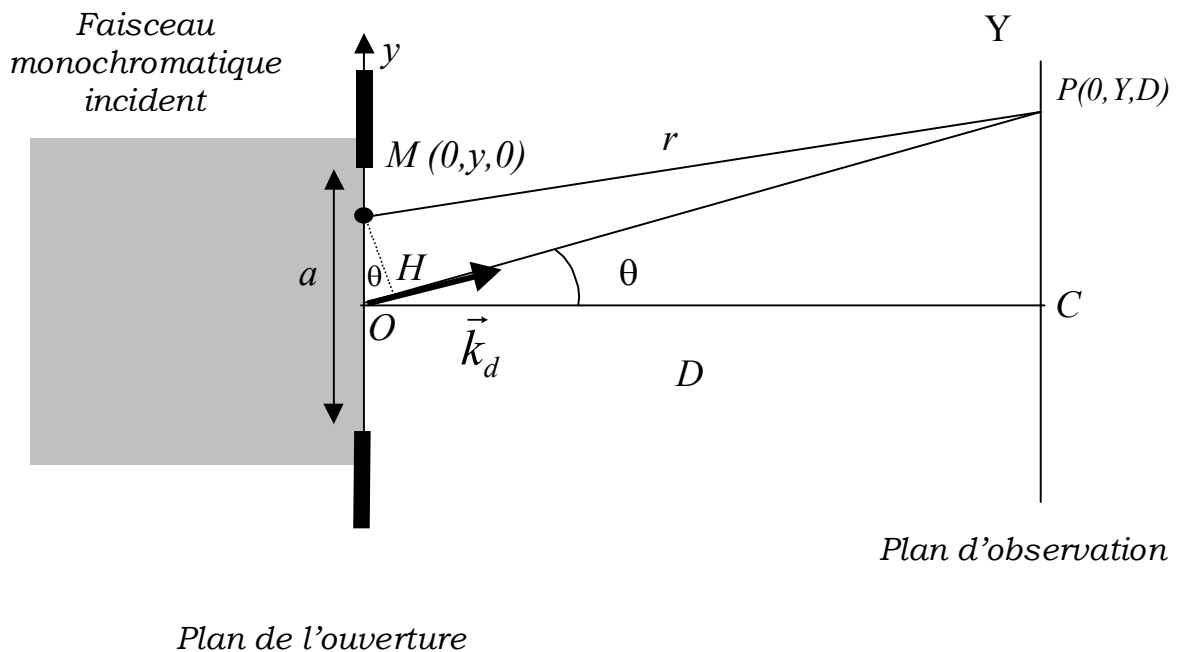


FIG. 5.10 –

A la traversée de la fente, la présence des bords de la fente conduisent au phénomène de diffraction c'est à dire que l'onde plane progressive perd son caractère d'onde plane pour se transformer en onde sphérique. Un point P de l'écran d'observation recevra une infinité de rayons lumineux provenant de tous les points du diaphragme. Ces points émettent des ondes sphériques synchrones. Comme la distance qui sépare deux points distincts du diaphragme au point P n'est pas la même les ondes issues de ces deux points vont arriver en P avec un certain déphasage. Nous avons vu que le déphasage en P entre l'onde issue du point O et cette même onde issue du point M est donné par :

$$\Phi(P) = \vec{k}_d \cdot \overrightarrow{OM} \quad (5.47)$$

L'expression de la diffraction à distance infinie conduit à :

$$\begin{aligned}
 E(u, v) &= KAe^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \\
 E(u) &= KAe^{-i\omega t} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} t(y) e^{-2i\pi vy} dx dy = KAe^{-i\omega t} d \int_{-\infty}^{\infty} t(y) e^{-2i\pi(vy)} dy
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

En effet nous supposons que le trajet du faisceau ne soit pas altéré dans la direction x parallèle aux arêtes de la fente et que le diamètre du faisceau soit l . Il n'y a donc pas de diffraction dans la direction x et le terme de phase disparaît *ipso facto*. La transparence de la pupille est nulle en tout point de la fente se situant en dehors de l'intervalle $[-a/2, a/2]$ et vaut 1 dans cet intervalle. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 E(v) &= KAe^{-i\omega t} l \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\pi vy} dy = KAe^{-i\omega t} l \left[\frac{e^{-2i\pi vx}}{-2i\pi v} \right]_{-a/2}^{a/2} \\
 E(v) &= -KAe^{-i\omega t} la \left(\frac{e^{-i\pi va}}{2i\pi va} - \frac{e^{i\pi va}}{2i\pi va} \right) = AK e^{-i\omega t} la \sin c(\pi va)
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Si l'on revient à la variable de position Y sur l'écran qui s'écrit à partir de v :

$$v = \frac{Y}{\lambda D} \tag{5.50}$$

nous obtenons l'amplitude diffractée en P suivante :

$$E(Y) = KAe^{-i\omega t} la \sin c\left(\frac{\pi Y a}{\lambda D}\right) \tag{5.51}$$

L'intensité diffractée en P est donc égale à :

$$I(Y) = I_0 K^2 (la)^2 \sin^2 c\left(\frac{\pi Y a}{\lambda D}\right) \tag{5.52}$$

La figure 5.11 représente l'intensité diffractée par la fente dans le plan de l'écran.

On retrouve bien le fait que l'intensité observée sur l'écran est constituée d'un lobe principal deux fois plus large que les lobes latéraux et que l'intensité des lobes latéraux est beaucoup plus faible que celle du lobe principal.

Il importe de remarquer que la figure de diffraction est d'autant plus étalée que la largeur de la fente est petite. L'étalement de la figure de diffraction est inversement proportionnel à l'ouverture de la fente.

D'autre part l'intensité au centre de la figure est proportionnelle à $K^2 (la)^2 = \left(\frac{la}{\lambda R}\right)^2$ ce qui montre que l'intensité au centre décroît comme le carré de la distance de la fente à l'écran et croît comme le carré de la surface de l'ouverture. Une figure de diffraction sera donc d'autant plus lumineuse que l'ouverture de la fente sera grande.

5.4.3 Diffraction d'une onde plane par une fente rectangulaire.

Nous supposons maintenant que la pupille est une fente rectangulaire qui occulte le faisceau incident dans les deux directions x et y . Si un point du faisceau est à l'intérieur de la fente rectangulaire de dimension ab , ce point devient une source secondaire et il y a diffraction. La fente est transparente dans la fenêtre ce qui impose que :

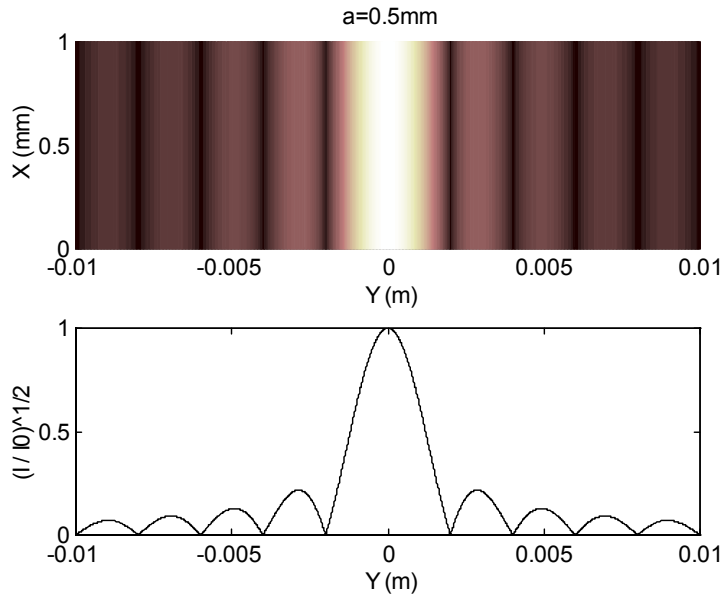


FIG. 5.11 – Figure de diffraction par une fente infinie de largeur $a=0.5\text{mm}$. La distance de la fente à l'écran est $D=2\text{m}$; la longueur d'onde $\lambda = 0.5\mu\text{m}$

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in F \\ 0 & \text{si } M \notin F \end{cases} \quad (5.53)$$

Il est facile de voir que l'on peut séparer les variables x et y ce qui conduit à

$$t(x, y) = t(x)t(y) \quad (5.54)$$

avec

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in I = [-a/2, a/2] \\ 0 & \text{si } M \notin I \end{cases} \quad (5.55)$$

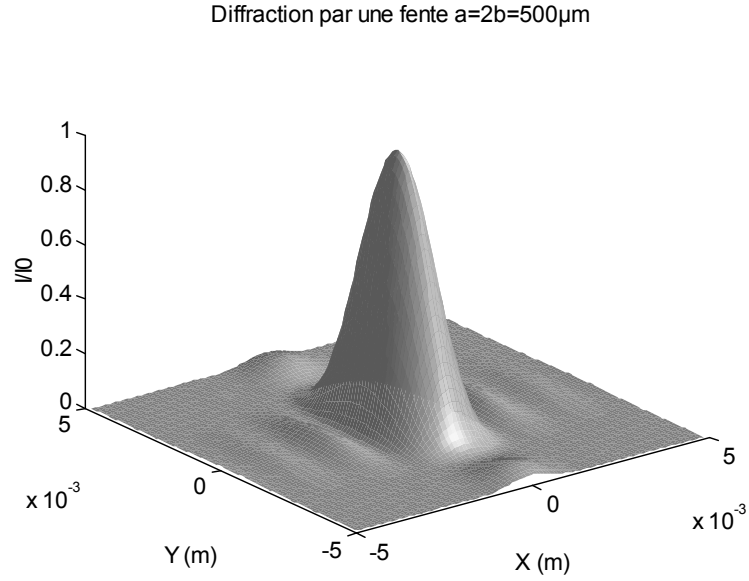
et

$$t(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in I' = [-b/2, b/2] \\ 0 & \text{si } M \notin I' \end{cases} \quad (5.56)$$

L'amplitude diffractée en P est donnée par :

$$\begin{aligned} E(u, v) &= KA \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x)t(y)e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= KA \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \end{aligned} \quad (5.57)$$

Les variables x et y sont indépendantes ce qui permet d'effectuer séparément le calcul des deux intégrales d'où :

FIG. 5.12 – Figure de diffraction d'une fente rectangulaire de dimension ab .

$$E(u, v) = KA \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\pi ux} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-2i\pi vy} dy \quad (5.58)$$

Après un calcul similaire à celui effectué dans le paragraphe précédent nous obtenons :

$$E(X, Y) = KAab \sin c\left(\frac{\pi Xa}{\lambda D}\right) \sin c\left(\frac{\pi Yb}{\lambda D}\right) \quad (5.59)$$

ce qui conduit à l'intensité diffractée suivante :

$$I(X, Y) = A^2 a^2 b^2 K^2 \sin^2\left(\frac{\pi Xa}{\lambda D}\right) \sin^2\left(\frac{\pi Yb}{\lambda D}\right) \quad (5.60)$$

qui est l'analogue à deux dimensions de la figure précédente. La figure 5.12 montre ce qui se produit pour une fente de $500 \times 250 \mu\text{m}^2$ éclairée par une onde de longueur d'onde $0.5 \mu\text{m}$ sur un écran placé à 1.5m de la fente.

5.4.4 Diffraction par une pupille circulaire

Le calcul de la diffraction par une pupille circulaire est basé sur le même principe que celui d'une pupille rectangulaire. Toutefois il importe d'utiliser la symétrie de la pupille pour parfaire le calcul. En partant de la relation générale

$$E(u, v) = KA \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (5.61)$$

nous introduisons les coordonnées cylindriques r, α pour décrire la position du point M de sorte que

$$x = r \cos \alpha \quad (5.62)$$

$$y = r \sin \alpha \quad (5.63)$$

Nous avons donc

$$E(u, v) = KA \int_0^\rho \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi(ur \cos \alpha + vr \sin \alpha)} r dr d\alpha \quad (5.64)$$

La figure de diffraction ayant la symétrie cylindrique de la pupille nous ne considérons le calcul que dans la direction Y ce qui conduit à

$$E(0, v) = KA \int_0^\rho \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi vr \sin \alpha} r dr d\alpha \quad (5.65)$$

Nous utilisons ensuite la définition de la fonction de Bessel d'ordre 0 donnée par

$$J_0(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iq \sin \theta} d\theta \quad (5.66)$$

ce qui nous amène à

$$E(0, v) = 2\pi KA \int_0^\rho J_0(2\pi vr) r dr \quad (5.67)$$

L'intégrale de la fonction de Bessel d'ordre zéro s'obtient ensuite en utilisant la propriété suivante de cette fonction

$$qJ_1(q) = \int_0^q J_0(u) u du \quad (5.68)$$

soit en posant $u = 2\pi rv$

$$\int_0^\rho J_0(2\pi vr) r dr = \frac{1}{4\pi^2 v^2} \int_0^{2\pi \rho v} J_0(u) u du = \frac{2\pi \rho v J_1(2\pi \rho v)}{4\pi^2 v^2} = \rho^2 \frac{J_1(2\pi \rho v)}{2\pi \rho v} \quad (5.69)$$

Il s'ensuit que

$$E(0, v) = KA 2\pi \rho^2 \frac{J_1(2\pi \rho v)}{2\pi \rho v} \text{ avec } v = \frac{X}{\lambda D} \quad (5.70)$$

L'intensité qui est observée sur l'écran distant de D de la pupille circulaire s'écrit donc

$$I(v) = \left[KA2\pi\rho^2 \frac{J_1(2\pi\rho v)}{2\pi\rho v} \right]^2 \quad (5.71)$$

Les fonctions de Bessel sont tabulées² et le premier zéro de la fonction $J_1(s)$ est localisé en $s = 3.83171$. Il s'ensuit que l'intensité s'annule en X_z

$$\frac{2\pi\rho X_z}{\lambda D} = 3.83171 \implies X_z = \frac{0.61\lambda D}{\rho} = \frac{1.22\lambda D}{2\rho} \quad (5.72)$$

La figure ?? illustre le comportement de la fonction de Bessel au carré. On constate que la figure de diffraction est représentée par un lobe principal très intense et des lobes secondaires très très faibles. Le premier lobe secondaire culmine à 1.75% de l'intensité du lobe principal. Les autres lobes ne sont pas visibles sur un dessin présenté en échelle linéaire. La lumière diffractée par un trou circulaire est donc presque intégralement concentrée dans le lobe principal délimité par un anneau sombre de diamètre angulaire

$$\theta \simeq \frac{X_z}{D} = \frac{1.22\lambda}{2\rho} \quad (5.73)$$

La symétrie de révolution de la pupille se retrouve dans la figure de diffraction qui présente l'allure d'un disque central entouré d'anneaux concentriques d'intensité de plus en plus faible. Le disque central pèse pour 84% de l'intensité totale et son rayon est donné par l'équation 5.72. Ce disque s'appelle le **disque d'Airy**. Il est important d'en connaître les caractéristiques car de nombreux instruments d'optiques sont formés de pupilles circulaires (lunette astronomique, microscopes...). Dans tous ces instruments la diffraction est un facteur limitant la résolution. La figure 5.13 montre l'allure de la figure de diffraction d'une pupille circulaire.

²Voir par exemple Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions, page 398.

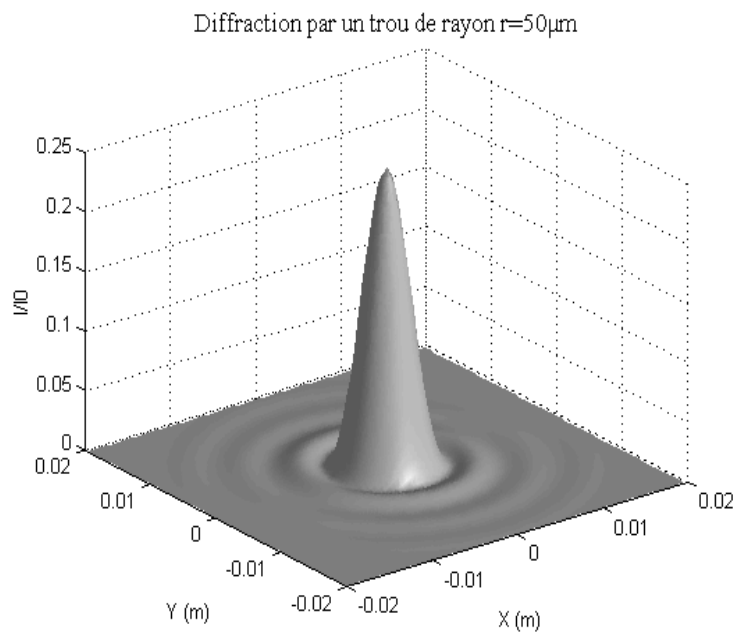


FIG. 5.13 – Diffraction par une ouverture circulaire de rayon $50\mu\text{m}$ placée à 1m de l'écran d'observation et éclairée par un rayonnement monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0.5\mu\text{m}$

5.5 Théorème de Babinet

Ce théorème décrit ce que l'on peut attendre des figures de diffraction de deux pupilles complémentaires. Des ouvertures sont dites complémentaires si la partie ouverte (resp. fermée) de l'une des ouvertures épouse parfaitement la partie fermée (resp. ouverte) de l'autre ouverture. Ainsi un cheveu d'épaisseur e est la pupille complémentaire d'une fente de même ouverture e . Un disque de rayon R est l'ouverture complémentaire d'une pupille circulaire de même rayon (voir figure 5.14).

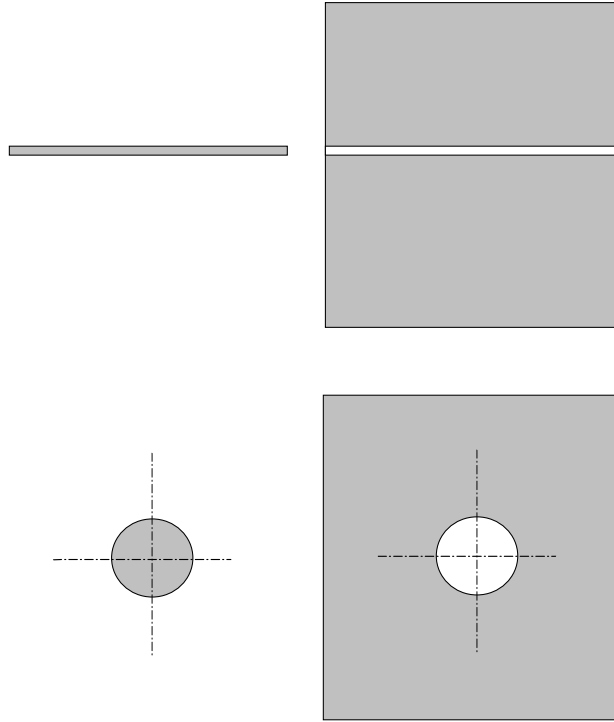


FIG. 5.14 – Représentation de deux ouvertures complémentaires.

Nous venons de calculer l'amplitude diffractée par une fente simple d'épaisseur a selon l'axe des y . Nous avons trouvé

$$E(Y) = K A e^{-i\omega t} l a \sin c\left(\frac{\pi Y a}{\lambda D}\right) \quad (5.74)$$

avec l largeur du faisceau incident.

Nous allons procéder au calcul de l'amplitude diffractée par un cheveu de même épaisseur. Nous supposons qu'il est parfaitement opaque et qu'il est éclairé par une onde plane de section carrée d'arête finie l . Il s'ensuit que

$$E(u, v) = K A e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x, y) t(y) e^{-2i\pi u x} dx dy \quad (5.75)$$

ou $T_0(x, y) = T_0(x)T_0(y)$ définit la fonction délimitant le faisceau incident. Cette fonction est nulle si on ne se trouve pas dans le faisceau et est égale à 1 dans le cas contraire. La fonction $t(y)$ définit la fonction de transparence du cheveu. Elle vaut 0 sur le cheveu et 1 dans le cas contraire. Il s'ensuit que

$$E(v) = K A e^{-i\omega t} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} t(y) e^{-2i\pi v y} dx dy = K A e^{-i\omega t} l \left(\int_{-l/2}^{-a/2} e^{-2i\pi v y} dy + \int_{a/2}^{l/2} e^{-2i\pi v y} dy \right) \quad (5.76)$$

On obtient donc

$$E(v) = KAe^{-i\omega t}l \left(\left[\frac{e^{-2i\pi v y}}{-2i\pi v} \right]_{-l/2}^{-a/2} + \left[\frac{e^{-2i\pi v y}}{-2i\pi v} \right]_{a/2}^{l/2} \right) \quad (5.77)$$

soit

$$E(v) = KAe^{-i\omega t}l \left(\left[\frac{e^{i\pi v a} - e^{-i\pi v a}}{-2i\pi v} \right] + \left[\frac{e^{-i\pi v l} - e^{i\pi v l}}{-2i\pi v} \right] \right) \quad (5.78)$$

$$E(v) = KAe^{-i\omega t}l (-a \sin c\pi v a + l \sin c\pi v l) \quad (5.79)$$

Le champ est donc la somme de deux termes. Le premier terme est l'opposé de celui créé par la fente et le second est lié à la contribution du faisceau direct. Le faisceau étant bien plus large que le cheveu ce terme est concentré en $v = 0$. Si l'on omet cette partie là de la figure de diffraction nous pouvons conclure que :

” la figure de diffraction créée par deux ouvertures complémentaires est identique sauf au centre de la figure”

ce qui constitue le théorème de Babinet.

Chapitre 6

DIFFRACTION ET INTERFERENCES

6.1 Rappels sur les interférences.

Deux ondes lumineuses arrivant en un point P de l'espace peuvent interférer en ce point si il existe au cours du temps une relation de phase constante entre ces deux ondes. Quand cela est vérifié l'intensité mesurée au point d'interférence n'est pas égale à la somme des intensités lumineuses de chacune des ondes qui arrivent en P mais au module au carré de la somme des amplitudes des deux ondes.

Si l'amplitude instantanée de chaque onde est donnée par :

$$\begin{aligned} E_1(P) &= E_{01} e^{i(\omega t - \phi_1)} \\ E_2(P) &= E_{02} e^{i(\omega t - \phi_2)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

L'intensité de chaque onde prise séparément est alors donnée par :

$$\begin{aligned} I_1 &= E_{01}^2 \\ I_2 &= E_{02}^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

et l'intensité résultant de la superposition de ces ondes en P est donnée par :

$$I(P, t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi(P, t)) \quad (6.3)$$

Par la suite, nous ne considérerons que des ondes de même état de polarisation et se superposant sous un angle faible ce qui revient à utiliser des ondes scalaires. De plus nous ferons l'hypothèse que les ondes ont la même amplitude. Dans ce cas, l'intensité résultant en P à l'instant t donné est :

$$I(P, t) = 2I_0(1 + \cos(\phi(P, t))) \quad (6.4)$$

Il importe de remarquer alors que si l'on considère un observateur regardant l'intensité lumineuse en P , celui-ci n'est capable de percevoir l'intensité lumineuse que sur un temps de quelques secondes voir au mieux de quelques dixièmes de secondes. Or nous avons vu que le temps d'émission d'un train d'onde est de l'ordre de quelques

nanosecondes. Ainsi notre observateur ne perçoit-il que la moyenne temporelle des intensités provenant de milliards de trains d'onde. La moyenne temporelle de l'intensité est donnée par :

$$I_m = \langle I(P, t) \rangle = 2I_0(1 + \langle \cos(\phi(P, t)) \rangle) \quad (6.5)$$

ce qui montre que le terme de phase qui est la source de l'observation des interférences ne persistera que si la différence de phase entre les deux ondes est constante dans le temps. Dans ce cas, l'intensité résultante en P est donnée par :

$$I_m = \langle I(P, t) \rangle = 2I_0(1 + \cos(\phi(P))) = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi(P)}{2} \quad (6.6)$$

L'expression écrite ci-dessus ne prend pas en compte l'origine même de la superposition des ondes à savoir la diffraction.

La figure d'interférence qui résulte de la superposition des ondes diffractées par les fentes d'Young peut être calculée à partir du formalisme général de la diffraction. Nous allons montrer dans le calcul qui suit comment il est possible d'analyser la contribution des interférences et de la diffraction dans l'expérience d'Young.

6.2 Intensité diffractée par les fentes d'Young.

6.2.1 Utilisation de la transparence

En prenant l'origine des phases sur le plan d'onde arrivant sur les fentes d'Young, on peut écrire que les champs électriques en S_1 et S_2 sont :

$$E(S_1) = E(S_2) = E_0 e^{-i\omega t} \quad (6.7)$$

Les deux champs ont exactement la même phase et la même amplitude puisque :

- ils proviennent du même plan d'onde
- ils sont issus de fentes de même ouverture

L'amplitude du champ résultant en P est donnée par la transformée de Fourier de la transparence des fentes d'Young multipliée par l'amplitude du champ incident soit :

$$E(P) = lK E_0 e^{-i\omega t} T.F.(t(x)) = lK E_0 e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-iux} dx \quad (6.8)$$

En introduisant la fréquence spatiale $u = X/\lambda D$ dans le calcul de l'intensité, il vient :

$$E(X) = lK e^{i\omega t} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-i\frac{Xx}{\lambda D}} dx \quad (6.9)$$

La transparence des fentes d'Young est nulle partout sauf à la position des ouvertures ou elle vaut 1.

Comme le montre la figure Nous avons ainsi :

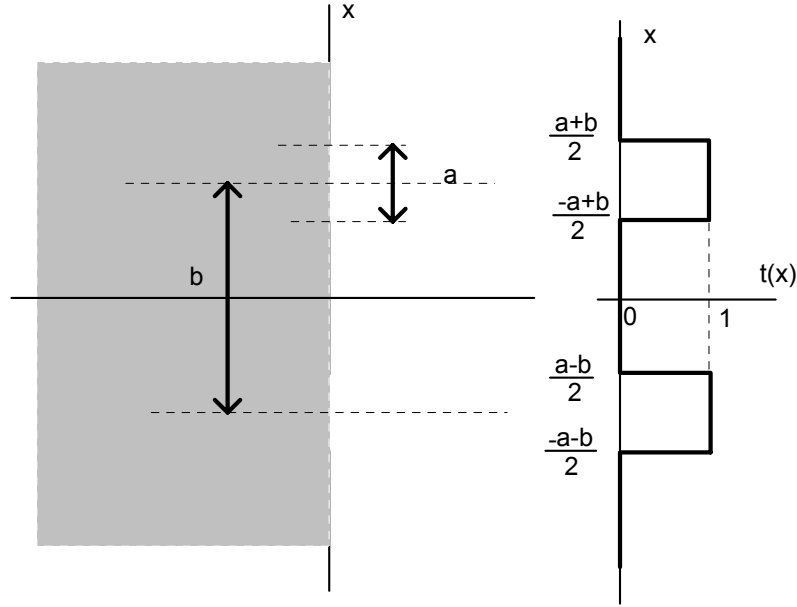


FIG. 6.1 – Représentation de la fonction de transparence des deux fentes d'Young.

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I = \left[\frac{b}{2} - \frac{a}{2}, \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right] \cup \left[-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases} \quad (6.10)$$

Il en résulte que le champ en P est égal à :

$$E(X) = E_0 \int_{(b/2-a/2)}^{(b/2+a/2)} e^{-i\frac{Xx}{\lambda D}} dx + E_0 \int_{(-b/2-a/2)}^{(-b/2+a/2)} e^{-i\frac{Xx}{\lambda D}} dx \quad (6.11)$$

L'intégration des exponentielles est immédiate et conduit à :

$$E(X) = lK E_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi X(b+a)}{\lambda D}} - e^{-\frac{i\pi X(b-a)}{\lambda D}}}{\frac{-2i\pi X}{\lambda D}} + \frac{e^{\frac{i\pi X(b-a)}{\lambda D}} - e^{\frac{i\pi X(b+a)}{\lambda D}}}{\frac{-2i\pi X}{\lambda D}} \right) \quad (6.12)$$

soit

$$E(X) = lK E_0 e^{-i\omega t} \left(e^{-\frac{i\pi X b}{\lambda D}} \frac{e^{-\frac{i\pi X a}{\lambda D}} - e^{\frac{i\pi X a}{\lambda D}}}{\frac{-2i\pi X}{\lambda D}} + e^{\frac{i\pi X b}{\lambda D}} \frac{e^{-\frac{i\pi X a}{\lambda D}} - e^{\frac{i\pi X a}{\lambda D}}}{\frac{-2i\pi X}{\lambda D}} \right) \quad (6.13)$$

ce qui conduit à :

$$E(X) = lK E_0 e^{-i\omega t} \left(e^{-\frac{i\pi X b}{\lambda D}} + e^{\frac{i\pi X b}{\lambda D}} \right) \frac{e^{-\frac{i\pi X a}{\lambda D}} - e^{\frac{i\pi X a}{\lambda D}}}{\frac{-2i\pi X}{\lambda D}} = 2a E_0 \cos \frac{\pi X b}{\lambda D} \sin c \frac{\pi a X}{\lambda D} \quad (6.14)$$

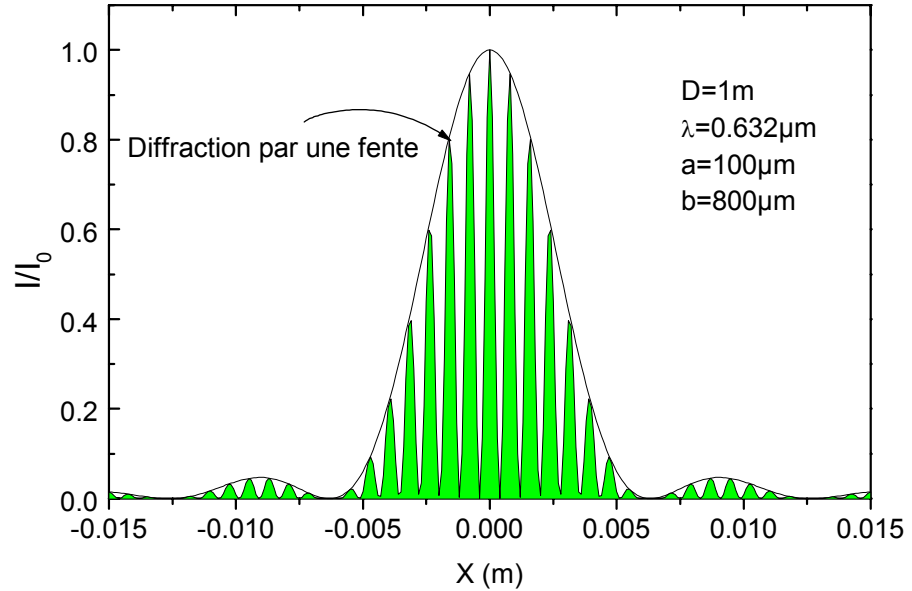


FIG. 6.2 – Figure d'interférence d'une bifente d'Young.

L'intensité diffractée en P est donc égale à :

$$I(X) = 4a^2 l^2 E_0^2 K^2 \cos^2 \frac{\pi X b}{\lambda D} \sin^2 c^2 \frac{\pi a X}{\lambda D} \quad (6.15)$$

ce qui peut aussi se mettre sous la forme

$$I(X) = 2a^2 l^2 E_0^2 K^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi X b}{\lambda D} \right) \sin^2 c^2 \frac{\pi a X}{\lambda D} \quad (6.16)$$

On retrouve dans cette expression un terme d'interférence représenté par le cosinus au carré qui résulte de la superposition des ondes issues des sources synchrones S_1 et S_2 distantes de b , et un terme de diffraction par une fente de largeur a représenté par le sinus cardinal au carré.

La figure ci-dessous est un exemple de la figure de diffraction obtenue pour des fentes d'Young distantes de 0.8mm d'ouverture 0.1mm éclairées à l'aide d'un Laser He-Ne à un mètre de distance.

La fonction d'interférence évolue entre 0 et 1 et s'annule à chaque fois que :

$$X(k) = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda D}{b} \quad (6.17)$$

ce qui conduit à un interfrange i donné par :

$$i = X(k+1) - X(k) = \frac{\lambda D}{b} \quad (6.18)$$

La fonction de diffraction par une fente de largeur a caractérisée par le sinus cardinal est par contre une fonction décroissante de X qui s'annule à chaque fois que :

$$X(p) = p \frac{\lambda D}{a} \quad (6.19)$$

On voit ainsi que la figure d'interférences qui, si l'on ne tenait pas compte de la diffraction s'étendrait à l'infini, est sérieusement limitée par la diffraction. En effet nous savons déjà que l'intensité maximale du premier lobe latéral de diffraction ne représente que 4.7% de l'intensité maximale du premier ; il s'ensuit que la figure d'interférences est de moins en moins visible au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'écran (figure 6.2).

6.2.2 Cas particulier de fentes très fines

Nous supposons maintenant que les fentes sont extrêmement fines $a \ll b$. Dans ce cas il est clair que le lobe principal de diffraction sera très étendu et que le phénomène d'interférences sera assez visibles sur une large étendue de l'écran. On notera quand même que réduire l'ouverture des fentes a pour effet de réduire l'intensité lumineuse sur l'écran puisque l'intensité au centre est proportionnelle à a^2 . Si a est suffisamment petit, la diffraction peut être négligée et on ne voit plus que la figure d'interférences

Nous nous plaçons donc dans cette hypothèse et nous examinons successivement ce qui va se produire si l'on incline les rayons lumineux sur l'axe principal et s'il l'on utilise une source polychromatique.

Rayons inclinés sur l'axe principal.

Si l'inclinaison est nulle nous avons

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi Xb}{\lambda D} \right) \quad (6.20)$$

L'argument du cosinus n'est rien d'autre que la différence de phase entre les ondes issues des sources S_1 et S_2 . Si maintenant on incline les rayons incidents d'un angle α par rapport à l'axe principal passant par le centre des fentes nous sommes tenus d'introduire un déphasage supplémentaire qui tient compte du fait que l'onde qui arrive en S_1 n'est pas en phase avec celle qui arrive en S_2 mais présente un déphasage égal à

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha \quad (6.21)$$

Nous notons que ce déphasage est constant pour autant que l'angle α le soit. Il en résulte que l'intensité en un point P de l'écran devient égale à

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \left\{ \frac{2\pi Xb}{\lambda D} + \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha \right\} \right) \quad (6.22)$$

Si l'on suppose que l'onde plane inclinée est obtenue en positionnant une source ponctuelle au foyer d'une lentille convergente de focale f , nous avons alors

$$\sin \alpha \approx \frac{\xi}{f} \quad (6.23)$$

et il s'ensuit que

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} b \left\{ \frac{X}{D} + \frac{\xi}{f} \right\} \right) \quad (6.24)$$

La figure d'interférences est donc décalée du centre de l'écran de $-\frac{\xi D}{f}$.

6.3 Diffraction par un réseau.

Nous déterminons maintenant l'intensité diffractée par un réseau de N traits éclairés de façon cohérente. Chaque trait du réseau est séparé de son voisin de la période b du réseau. Il suffit pour faire le calcul complet de repartir de l'équation fondamentale de la diffraction à l'infini qui s'écrit pour des fentes rectilignes infinies :

$$E(P) = A \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-2i\pi ux} dx \quad (6.25)$$

Il importe donc d'exprimer la fonction de transparence du réseau. La transparence totale peut être considérée comme étant la somme des fonctions de transparence de chaque fentes prises individuellement soit :

$$T(x) = \sum_{p=0}^{N-1} t(x - pb) \quad (6.26)$$

L'amplitude diffractée est la transformée de Fourier de la transparence des fentes soit :

$$E(P) = A e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{N-1} t(x - pb) e^{-2i\pi ux} dx \quad (6.27)$$

D'après la propriété de linéarité de l'intégrale, l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales ce qui conduit à :

$$E(P) = A e^{i\omega t} \sum_{p=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} t(x - pb) e^{-2i\pi ux} dx \quad (6.28)$$

On utilise ensuite le changement de variable suivant :

$$r = x - pb \Rightarrow \begin{aligned} dr &= dx \\ x &= r + pb \end{aligned} \quad (6.29)$$

ce qui conduit à :

$$E(P) = A e^{i\omega t} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-2i\pi upb} \int_{-\infty}^{\infty} t(r) e^{-2i\pi ur} dr \quad (6.30)$$

Comme la fonction $t(r)$ n'est non nulle que si r est compris entre $-a/2$ et $a/2$ il s'ensuit que

$$E(P) = A e^{i\omega t} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-2i\pi u p b} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\pi u r} dr \quad (6.31)$$

On voit alors apparaître le produit de la fonction d'interférences par la fonction de diffraction par une fente soit :

$$E(P) = A a e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-2iN\pi u b}}{1 - e^{-2i\pi u b}} \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \quad (6.32)$$

L'intensité diffractée a pour formulation :

$$I(P) = A^2 a^2 \frac{\sin^2 N\pi u b}{\sin^2 \pi u b} \frac{\sin^2 \pi u a}{(\pi u a)^2} \quad (6.33)$$

avec :

$$u = \frac{\sin \theta_d - \sin \theta_0}{\lambda} \quad (6.34)$$

Chapitre 7

COHERENCE TEMPORELLE

7.1 Description mathématique des ondes lumineuses

7.1.1 Représentation temporelle.

Lorsqu'une source lumineuse émet une onde lumineuse, elle émet une vibration transverse électromagnétique dont la forme mathématique est en général très compliquée. De ce fait dans la plupart des cas on ne sait pas écrire exactement l'expression du champ électrique associé à l'onde lumineuse et on le modélise par des signaux simples qui cherchent à s'approcher de la réalité. En particulier on évite en général de traiter les ondes lumineuses sous forme de vecteurs et on fait l'approximation des ondes scalaires.

Le signal le plus simple et le plus utilisé à cause de sa simplicité est la cosinusoïde éternelle dont le champ électrique est matérialisé par un signal du type

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (7.1)$$

Ce type de signal présuppose que la phase φ et l'amplitude de l'onde A sont des constantes. Un tel signal se propage éternellement sans atténuation et est caractérisé par une fréquence f_0 particulière. Il correspond à l'image que l'on peut se faire d'une onde plane lumineuse monochromatique de fréquence f_0 ou de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c/f_0$ d'extension temporelle infinie. Un tel signal est une pure vue de l'esprit et correspond à un signal lumineux parfaitement cohérent dans le temps et dans l'espace. Nous le qualifierons de **signal lumineux idéalement cohérent**.

D'une façon beaucoup plus générale, le signal lumineux issu d'une source dépendra à la fois du temps et du point M où le signal est mesuré. Il sera généralement bien plus compliqué que le signal lumineux idéal. Très peu de sources émettent en effet des signaux purement monochromatiques sous forme d'onde plane. En première approximation les signaux peuvent être représentés par une superposition de signaux monochromatiques présentant une phase et une amplitude dépendant de la fréquence. Les sources usuelles sont donc généralement incohérentes dans le temps (signal non monochromatique) et dans l'espace (source étendue). Nous allons nous limiter dans ce chapitre aux aspects temporel et fréquentiel des signaux lumineux c'est à dire aborder la notion de **cohérence temporelle** des sources.

Afin de connaître la nature du signal lumineux émis par une source nous allons voir qu'il convient de déterminer **la densité spectrale** $D(f)$ du signal c'est à dire la

répartition en fréquence de l'intensité lumineuse émise par une source. Pour ce faire on peut analyser la lumière issue de la source au moyen d'un réseau ou d'un prisme dont la fonction sera de décomposer la lumière incidente. Cette technique est difficile à appliquer de façon absolue et on utilise alors la méthode de spectroscopie interférentielle qui permet d'obtenir directement la densité spectrale d'énergie $D(f)$ contenue dans le signal lumineux. La connaissance de cette fonction permet ensuite de remonter à la nature du signal lumineux émis par la source. Pour comprendre cette démarche il nous faut introduire tout d'abord quelques notions d'analyse des signaux. En effet toute la difficulté de conceptualisation des signaux lumineux repose sur le fait que l'on ne peut pas accéder directement à l'expression du signal $s(t)$ ou même à sa transformée de Fourier $S(f)$ dont nous donnons la définition dans le paragraphe suivant.

7.1.2 Représentation fréquentielle

Définitions

Comme dans de nombreux domaines de la physique (acoustique, traitement du signal...) il est très courant de considérer un signal par sa représentation fréquentielle. Pour cela on fait subir au signal $s(t)$ une transformée de Fourier qui fait apparaître les fréquences caractéristiques qu'il contient. On admet alors que si un signal $s(t)$ dépendant de la variable t satisfait les conditions de Dirichlet :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ soit s absolument intégrable
- s continue par morceaux

alors $s(t)$ admet une **transformée de Fourier** définie par :

$$T.F. [s(t)] = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (7.2)$$

et l'on admet que la transformation inverse existe et est définie par :

$$T.F^{-1} [S(f)] = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (7.3)$$

La transformée de Fourier d'un signal temporel peut aussi s'exprimer en fonction de la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$$T.F. [s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} d\omega \quad (7.4)$$

ce qui conduit à l'opération inverse suivante

$$T.F^{-1} [S(\omega)] = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (7.5)$$

Ainsi que nous l'avons déjà souligné, il se trouve que le signal lumineux $s(t)$ n'est pas directement accessible à l'expérience et il en va de même pour $S(f)$. Les récepteurs lumineux mesurent la moyenne du module au carré de $s(t)$ et sont aussi sensibles au module au carré de la transformée de Fourier appelée **densité spectrale**.

Densité spectrale

La densité spectrale d'un signal lumineux est obtenue en considérant le module au carré de la transformée de Fourier. Dans le cas d'un signal lumineux, la densité spectrale est aussi appelée la **brillance du signal** et est définie par

$$D(f) = S(f)S^*(f) \quad (7.6)$$

Cette fonction représente la répartition de l'intensité lumineuse en fonction de la fréquence de l'onde (ou de sa longueur d'onde). Un signal idéalement cohérent a une densité spectrale définie par une distribution de Dirac centrée sur la fréquence $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ du signal lumineux. Le doublet du sodium présente une densité spectrale composée de deux distributions de Dirac centrées sur chacune des fréquences f_1 et f_2 qui composent le doublet.

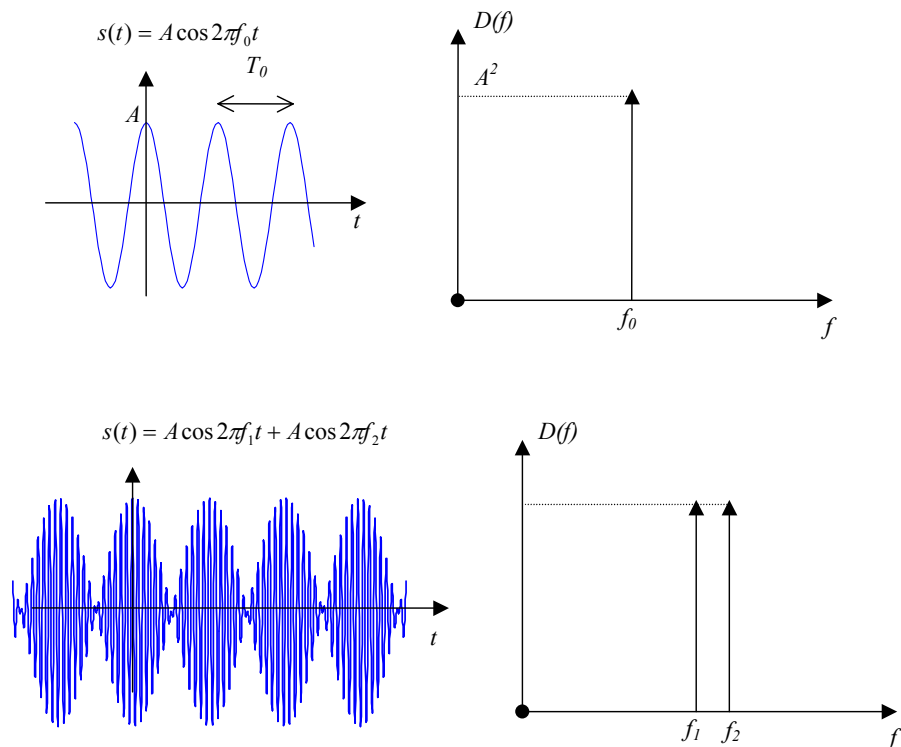


FIG. 7.1 – Représentation temporelle et densités spectrales de la cosinusoïde éternelle et du doublet

On utilise également la densité spectrale normalisée $P(f)$ définie par

$$P(f) = \frac{D(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f)df}$$

pour représenter la probabilité de trouver une intensité comprise entre f et $f + df$ dans le spectre.

Les opticiens ont souvent recourt à l'utilisation du nombre d'onde

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} \quad (7.7)$$

pour matérialiser la fréquence de l'onde et la brillance peut aussi s'exprimer en fonction de ce nombre par

$$D(\sigma) = S(\sigma)S^*(\sigma) \quad (7.8)$$

Théorème de Parseval

Ce théorème permet de coupler l'énergie d'un signal dans les domaines temporels et fréquentiels. Pour un signal d'énergie finie nous avons

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{2\pi jft}df \right] s^*(t)dt$$

soit encore

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)e^{2\pi jft}dt \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi jft}dt \right]^* df$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} D(f)df$$

ce qui constitue le théorème de Parseval qui démontre que l'énergie totale contenue dans un signal peut s'exprimer indifféremment dans l'espace temporel ou fréquentiel.

Pour un signal périodique de puissance moyenne finie le théorème de Parseval s'écrit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} D(f)df$$

Il s'ensuit que l'intensité mesurée par le détecteur définie par

$$I_m = \mathcal{E} = \langle |s(t)|^2 \rangle \quad (7.9)$$

est aussi déterminée par l'intégrale de la densité spectrale sur toutes les fréquences qui composent le spectre de la lumière. Cela signifie en particulier que l'oeil qui observe une source de lumière polychromatique perçoit l'intégrale de la densité spectrale. C'est pour cela que la lumière du soleil nous paraît blanche.

7.1.3 Fonction de corrélation

Soient deux signaux $s(t)$ et $r(t)$ d'énergie finie; on appelle fonction de corrélation entre ces deux signaux, la fonction de τ définie par :

$$C_{sr}(\tau) = s(t) \otimes r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)r^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau)r^*(t)dt \quad (7.10)$$

Cette fonction s'appelle aussi fonction d'intercorrélation entre les signaux $s(t)$ et $r(t)$. Physiquement la fonction de corrélation est obtenue en décalant l'un des signaux, en multipliant le signal décalé par l'autre signal et puis en intégrant le produit obtenu.

Si le signal $s(t) = r(t)$ quel que soit t alors on obtient la **fonction d'autocorrélation** du signal soit :

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt = s(t) \otimes s(t) \quad (7.11)$$

Dans le cas particulier où τ est nul, la fonction d'autocorrélation du signal donne :

$$C_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt \quad (7.12)$$

qui n'est rien d'autre que l'énergie contenue dans le signal. On peut démontrer que la fonction d'autocorrélation vérifie :

$$C_{ss}(\tau) < C_{ss}(0) \quad (7.13)$$

Si les signaux ne sont pas à énergie finie mais à puissance moyenne finie, on définit la fonction de corrélation sur un intervalle T par :

$$C_{sr}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\theta)r^*(\theta - \tau)d\theta = \langle s(t)r^*(t - \tau) \rangle \quad (7.14)$$

De même pour des signaux périodiques (comme c'est le cas d'une sinusoïde éternelle), on définit la fonction de corrélation par :

$$C_{sr}(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\theta)r^*(\theta - \tau)d\theta \quad (7.15)$$

Nous remarquons que l'approche en terme de fonction de corrélation permet de préciser que l'intensité mesurée par un détecteur pour un signal lumineux unique $s(t)$ n'est rien d'autre que

$$I_m = \frac{1}{T_r} \int_t^{t+T_r} s(\theta) s^*(\theta) d\theta = C_{ss}(0) = \langle s(t) s^*(t) \rangle \quad (7.16)$$

ce qui représente la puissance moyenne reçue par le détecteur sur son temps d'intégration T_r . De plus si le signal $s(t)$ est superposé à lui-même avec un décalage temporel τ nous mesurons alors

$$C_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_r} \int_t^{t+T_r} s(\theta) s^*(\theta - \tau) d\theta \quad (7.17)$$

7.1.4 Degré de cohérence

On définit le **degré de cohérence** (d'intercorrélation) de deux signaux par la fonction $\gamma(\tau)$ telle que

$$\gamma(\tau) = \frac{C_{sr}(\tau)}{\sqrt{C_{ss}(0)C_{rr}(0)}} \quad (7.18)$$

Pour un signal unique on parle de degré d'autocorrélation défini par

$$\gamma(\tau) = \frac{C_{ss}(\tau)}{C_{ss}(0)} \quad (7.19)$$

Nous avons vu en 7.13 que $C_{ss}(0)$ est toujours supérieure ou égale à la fonction $C_{ss}(\tau)$. On peut donc en déduire que le degré de cohérence est donc un nombre dont le module est compris entre 0 et 1. Le degré de cohérence peut être une quantité complexe. Son module définit ce que l'on appelle la **fonction de contraste ou de visibilité** notée V .

$$V = |\gamma(\tau)|$$

Si cette fonction est toujours nulle pour $\tau \neq 0$ cela signifie que la lumière est totalement incohérente. Dans le cas contraire si $|\gamma(\tau)| = 1$, la lumière peut être qualifiée d'idéalement cohérente.

Les fonctions dont le contraste est constamment égal à 1 sont la fonction constante dans le temps vérifiant $\gamma(\tau) = 1$, et la fonction idéalement cohérente dont la fonction d'autocorrélation est un phaseur $\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau}$. Ce dernier cas est évidemment plus intéressant en optique que le cas précédent qui n'a pas de signification physique en terme de champ électrique associé à une onde dans le visible.

7.1.5 Théorème de Wiener-Khintchine

Ce théorème est particulièrement important pour tous les processus de diffusion ou de diffraction. Il définit la valeur de la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation ou d'autocorrélation de deux signaux :

$$T.F. [C_{sr}(\tau)] = T.F. [s(\tau) * r^*(-\tau)] \quad (7.20)$$

qui par application du théorème de Plancherel sur le produit de convolution conduit à

$$T.F. [C_{sr}(\tau)] = T.F. [s(\tau)] . T.F. [r^*(-\tau)]$$

Il faut donc évaluer le dernier terme de cette expression :

$$\begin{aligned} T.F. [r^*(-\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r^*(-\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r^*(t) e^{2\pi j f t} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-2\pi j f t} dt \right]^* = R^*(f) \end{aligned}$$

soit

$$T.F. [C_{sr}(\tau)] = S(f) . R^*(f) \quad (7.21)$$

Ceci constitue le théorème de Wiener - Khintchine et montre que dans le cas où les deux signaux sont identiques alors :

$$T.F. [C_{rr}(\tau)] = R(f) . R^*(f) = |R(f)|^2 = D(f) \quad (7.22)$$

Nous pouvons constater que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal r fait apparaître le module au carré du spectre de r . Pour cette raison on dit qu'il s'agit de la **densité spectrale d'énergie** du signal r .

Théorème de Wiener-Khintchine

” La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal est égale à sa densité spectrale en énergie. ”

Appliqué à un signal lumineux on voit que sa brillance est obtenue en calculant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal. Il s'ensuit que

$$D(f) = S(f) S^*(f) = T.F. (C_{ss}(\tau)) \quad (7.23)$$

Le corollaire de ce résultat est obtenu en faisant la transformée de Fourier inverse de la brillance ce qui conduit à

$$T.F.^{-1} [D(f)] = \int D(f) e^{2\pi j f \tau} df = C_{ss}(\tau) \quad (7.24)$$

et impose que

$$\int D(f) df = C_{ss}(0) = I_0 \quad (7.25)$$

Une bonne connaissance des fonctions de corrélation de quelques signaux usuels permet alors de remonter à l'expression mathématique de $s(t)$.

En utilisant le théorème de Parseval nous voyons aussi immédiatement que

$$P(f) = \frac{D(f)}{E} = T.F.(\gamma(\tau)) \quad (7.26)$$

Quelle que soit la source le degré de cohérence est obtenu par transformée de Fourier inverse de la densité spectrale normalisée

$$\gamma(\tau) = \int P(f)e^{2i\pi f\tau} df = \frac{\int D(f)e^{2i\pi f\tau} df}{\int D(f)df}$$

7.1.6 Résumé

Nous venons de montrer qu'un signal lumineux peut être décrit de façon mathématique par un ensemble de fonctions liées entre elles. Le tableau ci-dessous résume leur propriétés.

Fonctions du temps	$s(t), C_{ss}(\tau), I = C_{ss}(0) = \langle s(t)s^*(t) \rangle$
Fonctions de la fréquence	$S(f) = T.F.[s(t)], D(f) = S(f)S^*(f)$
Relations temps-fréquence	$D(f) = T.F.(C_{ss}(\tau)), \int D(f)df = C_{ss}(0) = I_0$
Fonctions normalisées	$\gamma(\tau) = \frac{C_{ss}(\tau)}{C_{ss}(0)}, P(f) = \frac{D(f)}{E} = T.F.(\gamma(\tau))$

7.2 Application aux signaux lumineux

7.2.1 Signal idéalement cohérent

Le signal lumineux idéalement cohérent est par définition l'onde plane sinusoïdale monochromatique. Une telle onde se propage avec un vecteur d'onde unique de propagation et n'est pas limitée dans le temps. Elle est décrite par la relation

$$\forall t, s(t) = A \cos 2\pi f_0 t = \operatorname{Re} \left[A e^{i2\pi f_0 t} \right] \quad (7.27)$$

La transformée de Fourier de ce signal conduit à une distribution de Dirac et s'écrit

$$S(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (7.28)$$

Il est clair que le signal sinusoïdal idéalement cohérent n'est pas un signal à énergie finie. En effet comme il est de durée illimitée l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt$$

ne converge pas.

La fonction de corrélation de ce signal s'obtient donc en intégrant sur une période le produit des signaux décalés ce qui conduit à

$$C_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\theta)s^*(\theta - \tau)d\theta = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

Nous constatons donc que la fonction d'autocorrélation de ce signal est une fonction sinusoïdale de τ . Il s'ensuit que si le signal est idéalement cohérent il est possible de le

corrélérer dans le temps périodiquement avec lui-même. Nous verrons que cette propriété est l'essence même du phénomène d'interférence lumineuse. En effet dans une expérience d'interférence, on superpose un signal lumineux à un autre signal décalé dans le temps. Si les signaux qui se superposent sont des signaux idéalement cohérents nous voyons que quel que soit τ il sera possible de corrélérer ces signaux et que la fonction de corrélation passera par des maxima et minima d'intensité selon la valeur de τ .

Si nous considérons maintenant la fonction de corrélation au temps $\tau = 0$, nous avons

$$C_{ss}(0) = \frac{A^2}{2} = I_m$$

Nous voyons d'autre part que le théorème de Wiener est bien vérifié puisque la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal est bien égale au module au carré de la transformée de Fourier du signal. En effet nous avons

$$T.F. [C_{ss}(\tau)] = \frac{A^2}{2} T.F. [\cos 2\pi f_0 \tau] = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Nous remarquerons que si le signal sinusoïdal est décrit par une exponentielle complexe alors

$$\begin{aligned} s(t) &= A e^{i2\pi f_0 t} \\ S(f) &= A \delta(f - f_0) \\ D(f) &= A^2 \delta(f - f_0) \implies P(f) = \delta(f - f_0) \\ C_{ss}(\tau) &= A^2 e^{i2\pi f_0 \tau} = T.F.^{-1} [D(f)] \\ C_{ss}(0) &= A^2 = \int D(f) df \implies \gamma(\tau) = e^{-2i\pi f_0 \tau} \end{aligned}$$

7.2.2 Train d'onde sinusoïdal

Il s'agit d'un signal sinusoïdal d'extension finie dans le temps. Compte tenu de l'existence de ce signal pendant un temps fini, on parle de train d'onde dont les caractéristiques importantes sont sa durée τ_c et la période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ du signal sinusoïdal à partir duquel il est construit. L'expression mathématique du train d'onde est obtenue en faisant le produit d'un signal idéalement cohérent par un porte de largeur finie τ_c ce qui aboutit à

$$s(t) = A \cos 2\pi f_0 t \cdot \Pi_{\tau_c}(t - \tau_c/2) \quad (7.29)$$

L'allure du train d'onde est représentée sur la figure

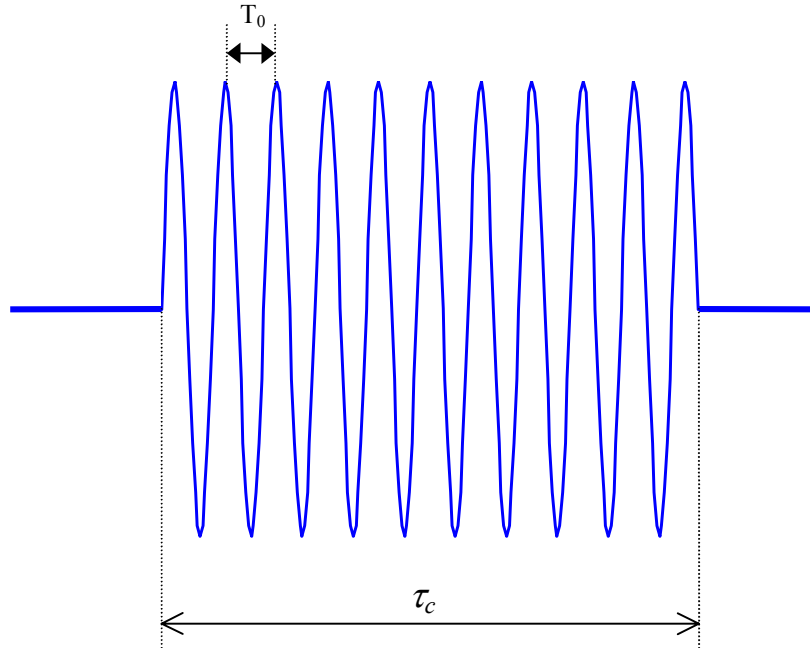


FIG. 7.2 – Représentation d’un train d’onde sinusoïdal d’extension finie dans le temps

L’utilisation d’un train d’onde est justifiée par le fait que les atomes n’émettent de la lumière de façon cohérente que pendant un temps fini. Nous rappelons que le mécanisme d’émission radiative repose sur l’excitation de niveaux électroniques d’un atome. L’atome se désexcite en émettant pendant un temps fini un train d’onde lumineux présentant une fréquence propre f_0 .

La largeur de la porte définit ce qu’on appelle le temps de cohérence τ_c du signal ce que nous allons justifier au moyen des calculs qui vont suivre.

La transformée de Fourier de ce signal nous indique immédiatement que la troncature temporelle du signal idéalement cohérent a d’importantes répercussions sur le spectre du signal. Il est facile de vérifier en utilisant le théorème de Plancherel (sur la transformée de Fourier d’un produit) que

$$S(f) = \left(\frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right) * \tau_c \operatorname{sinc}(\pi \tau_c f) e^{-i\pi f \tau_c} \quad (7.30)$$

En remarquant que la distribution de Dirac est le neutre de la convolution, il vient

$$S(f) = \tau_c \frac{A}{2} e^{-i\pi f \tau_c} [\operatorname{sinc} \pi \tau_c (f - f_0) + \operatorname{sinc} \pi \tau_c (f + f_0)] \quad (7.31)$$

La conséquence immédiate d’un tel résultat est que le spectre d’un train d’onde sinusoïdal n’est pas décrit par une fréquence unique mais par la fonction sinus cardinal qui décroît rapidement quand on s’éloigne de la fréquence propre du signal. Le premier zéro de cette fonction est localisé en

$$f - f_0 = \pm \frac{1}{\tau_c} \quad (7.32)$$

ce qui montre que l'étendue spectrale de $S(f)$ est inversement proportionnelle à la durée τ_c du train d'onde¹. Il s'ensuit que si le train d'onde est de durée infinie le spectre devient un pic de Dirac et l'on retrouve alors le résultat précédent. Dans le cas contraire, le spectre est d'autant plus étendu que le temps de cohérence du train d'onde est court. Un train d'onde sinusoïdal centré sur la fréquence f_0 n'est donc pas monochromatique.

La densité spectrale du train d'onde s'écrit

$$D(f) = S(f)S^*(f) = \tau_c^2 \frac{A^2}{4} [\sin^2 \pi \tau_c (f - f_0) + \sin^2 \pi \tau_c (f + f_0)]$$

car on admet que le produit croisé est quasi nul pour autant que τ_c ne soit pas trop petit.

Nous pouvons également accéder à la fonction d'autocorrélation du signal qui s'écrit compte tenu du fait que le signal est à énergie finie

$$\begin{aligned} C_{ss}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\tau_c} s(t)s^*(t-\tau)dt && \text{si } \tau < \tau_c \\ C_{ss}(\tau) &= 0 && \text{si } |\tau| > \tau_c \end{aligned}$$

Nous voyons sur la figure que la fonction de corrélation est non nulle si le signal $s(t)$ se recouvre avec le signal $s(t-\tau)$.

¹On utilise ici le fait que la fonction sinus cardinal décroît rapidement avec la fréquence et que seul le premier lobe de cette fonction est important dans la représentation fréquentielle.

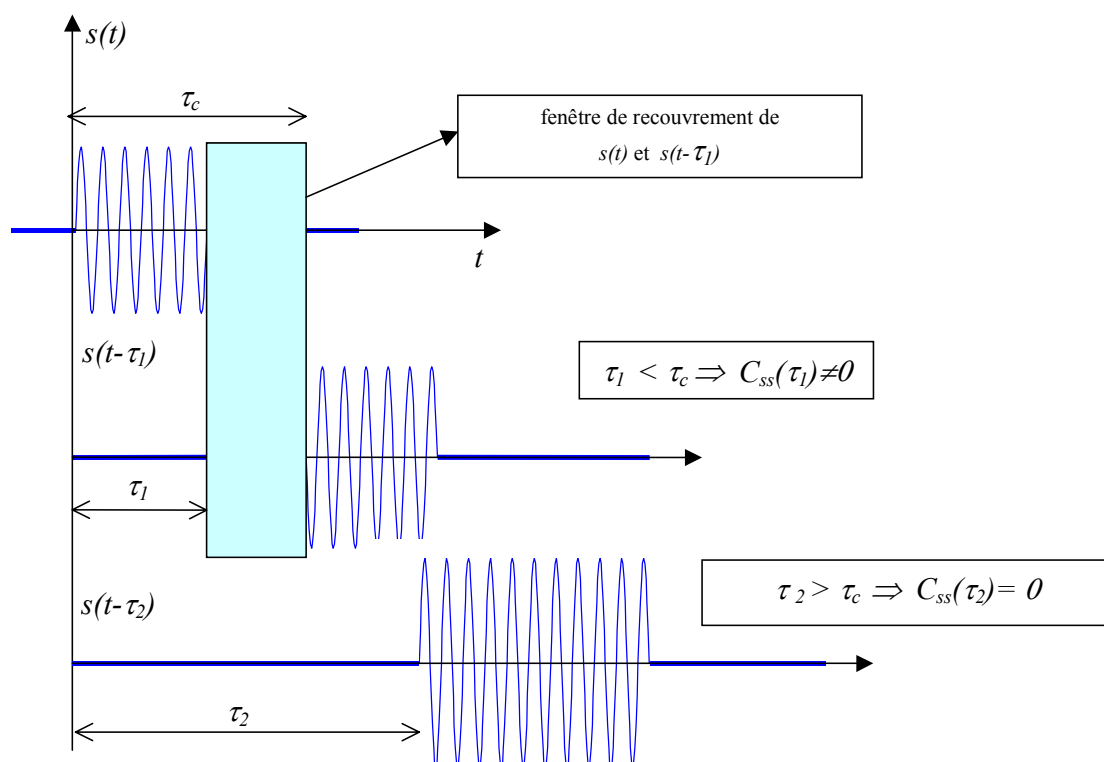


FIG. 7.3 – Représentation d'un train d'onde sinusoïdal qui se propage dans le temps avec les conséquences que l'on peut attendre sur la fonction d'autocorrélation.

Ce résultat montre de façon éclatante que la fonction de corrélation ne peut prendre une valeur non nulle que si le décalage temporel que l'on fait subir aux signaux qui se superposent est inférieur à la durée du train d'onde. Pour cette raison la durée du train d'onde représente également le temps de cohérence du signal lumineux. On lui associe une longueur de cohérence qualifiée de **longueur de cohérence temporelle** dont la valeur est donnée par la distance parcourue par l'onde pendant la durée de ce train d'onde soit

$$L_c = c\tau_c \quad (7.33)$$

L'utilisation de la relation 7.32 montre que la longueur de cohérence est aussi donnée par

$$L_c = \frac{c}{|\Delta f|} \quad (7.34)$$

et comme

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{df}{f}$$

il s'ensuit que

$$L_c = \frac{c\lambda}{f\Delta\lambda} \implies L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Nous voyons donc au travers de cette expression que la longueur de cohérence temporelle est donc directement liée à la dispersion en longueur d'onde du spectre de la source lumineuse.

En particulier nous retiendrons qu'une onde rigoureusement monochromatique correspond à un train d'onde de durée infinie. Toute réduction de la durée de vie du train d'onde se traduit par un élargissement du spectre $D(f)$ et par une longueur de cohérence temporelle finie.

Nous constatons que la fonction de corrélation de trains d'onde de durée finie comporte une fonction oscillante dont l'enveloppe décroît linéairement en fonction de τ .

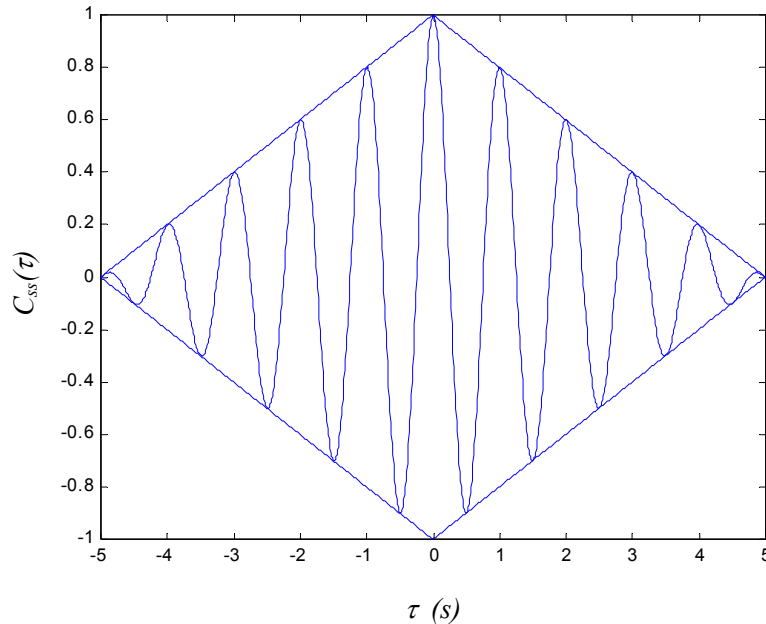


FIG. 7.4 – Fonction d'autocorrélation d'un train d'onde sinusoïdal.

Cette décroissance linéaire résulte de l'utilisation d'une fonction porte pour limiter l'expansion temporelle du signal. En particulier cela signifie que si l'on est capable d'accéder à la représentation graphique de $C_{ss}(\tau)$ et que l'on observe dans cette représentation une décroissance linéaire d'une fonction oscillante on pourra alors affirmer que le signal émis par la source est un train d'onde sinusoïdal. Nous verrons par la suite que la mesure de la fonction d'autocorrélation de conduit pas nécessairement à une fonction oscillante dont l'enveloppe décroît linéairement. Le train d'onde sinusoïdal n'est donc pas la seule façon de se représenter un signal lumineux quasi-monochromatique.

De façon analogue à ce que nous avons fait pour le signal idéalement cohérent on peut décrire le train d'onde par une exponentielle complexe ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
s(t) &= Ae^{i2\pi f_0 t} \Pi_{\tau_c}(t - \tau_c/2) \\
S(f) &= A\delta(f - f_0) * \tau_c \operatorname{sinc}(\pi\tau_c f) e^{-i\pi f\tau_c} \\
D(f) &= A^2\tau_c^2 \operatorname{sinc}^2[\pi\tau_c(f - f_0)] \\
C_{ss}(\tau) &= A^2 e^{-2i\pi f_0 \tau} \tau_c \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right| = T.F.^{-1}[D(f)] \\
C_{ss}(0) &= A^2\tau_c = \int D(f)df \implies \gamma(\tau) = e^{-2i\pi f_0 \tau} \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right|
\end{aligned}$$

7.2.3 Train d'onde sinusoïdal amorti

L'émission de trains d'onde sinusoïdaux non amortis est rarement observée et cette description d'une onde lumineuse est peu réaliste. Elle est utilisée car les calculs décrivant les propriétés de l'onde sont faciles à effectuer. Nous allons donc considérer que les trains d'onde sont amortis. La raison principale est liée aux collisions que subissent les atomes émetteurs au sein du gaz contenu dans les lampes à vapeur. En fait, si l'on considère un atome qui émet une radiation monochromatique pendant un temps fini, on doit s'attendre à ce que le train d'onde s'amortisse naturellement compte tenu de l'amortissement naturel de l'oscillateur qui émet la radiation. Cet amortissement est cependant très faible pendant le temps d'émission. Si maintenant on admet que cet atome est au sein d'un gaz, il adviendra inévitablement des collisions entre l'atome qui émet une radiation et les atomes qui l'entourent. Au moment de la collision le processus d'émission est alors interrompu. La durée du train d'onde est donc limitée par le temps qui s'écoule entre deux collisions. Si l'on considère une assemblée d'atomes émettant de la même manière (même amplitude et même fréquence) on peut montrer que le degré de cohérence au lieu de décroître linéairement décroît de façon exponentielle à cause des collisions et est donné par

$$\gamma(\tau) = e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-\left|\frac{\tau}{\tau_c}\right|}$$

7.3 Application aux interférences

7.3.1 Expression de l'intensité

On suppose que la lumière étudiée est quasi-monochromatique, de fréquence centrale f_0 et de largeur Δf . La densité spectrale s'écrit

$$D(f) = d(f - f_0) = d(f) * \delta(f - f_0) \quad (7.35)$$

avec $d(f)$ une fonction décrivant la façon dont le spectre est centré sur f_0 .

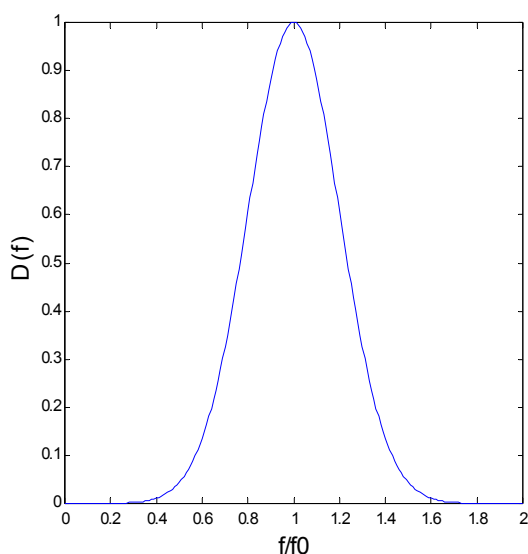


FIG. 7.5 – Densité spectrale d’une source lumineuse. Dans cet exemple nous avons pris une densité spectrale gaussienne centrée sur $f = f_0$.

Nous supposons que l’onde issue de cette source lumineuse peut être divisée en amplitude ou en front d’onde de façon à faire interférer les signaux lumineux $s(t)$ et $s(t-\tau)$ qui résultent de cette division. On pourra considérer par exemple le montage des fentes d’Young : $s(t)$ et $s(t-\tau)$ sont les signaux arrivant au point P d’observation issus respectivement de la fente supérieure et inférieure.

La fonction de corrélation de l’amplitude complexe de ces deux signaux s’écrit alors

$$C_{ss}(\tau) = T.F.^{-1} [D(f)] = T.F.^{-1}(d(f))e^{-2i\pi f_0\tau} = \widetilde{d}(\tau)e^{-2i\pi f_0\tau} \quad (7.36)$$

Posons

$$\widetilde{d}(\tau) = \left| \widetilde{d}(\tau) \right| e^{-i\Phi(\tau)} \quad (7.37)$$

L’intensité moyenne produite par l’interférence de deux signaux lumineux $s(t)$ et $s(t-\tau)$ se superposant avec un décalage τ , s’écrit alors

$$I_m(\tau) = \langle s(t)s^*(t) \rangle + \langle s(t-\tau)s^*(t-\tau) \rangle + \langle s(t)s^*(t-\tau) \rangle + \langle s^*(t)s(t-\tau) \rangle \quad (7.38)$$

Nous supposons que le signal lumineux $s(t)$ est stationnaire ce qui impose

$$\langle s(t)s^*(t) \rangle = C_{ss}(0) = \langle s(t-\tau)s^*(t-\tau) \rangle = I_0 \quad (7.39)$$

D’autre part nous avons

$$\langle s(t)s^*(t-\tau) \rangle = C_{ss}(\tau) \quad (7.40)$$

Il s'ensuit que

$$I_m(\tau) = 2I_0 + 2\operatorname{Re}[C_{ss}(\tau)] \quad (7.41)$$

$$I_m(\tau) = 2I_0(1 + 2\operatorname{Re}[\gamma_{ss}(\tau)]) \quad (7.42)$$

soit

$$I_m(\tau) = 2I_0 + 2\left|\tilde{d}(\tau)\right| \cos((2\pi f_0\tau + \Phi(\tau))) = 2I_0[1 + |\gamma(\tau)| \cos(2\pi f_0\tau + \Phi(\tau))] \quad (7.43)$$

7.3.2 Contraste des franges

Examinons les différents termes de cette expression :

- $\cos(2\pi f_0\tau + \Phi(\tau))$ est l'expression d'un système de franges à la fréquence f_0 , le terme $\Phi(\tau)$ désigne un décalage d'origine des franges lié à la dissymétrie du profil de densité spectrale. En effet une fonction symétrique à une transformée de Fourier réelle. Pour un signal gaussien centré sur $f = f_0$ la phase $\Phi(\tau) = 0$.
- $|\gamma(\tau)|$ est un terme de contraste qui dépend de la forme du profil de densité spectrale $D(f)$. Ce terme s'appelle la visibilité des franges d'interférences.

Dans le cas où l'onde est quasi-monochromatique, la largeur du profil de raie est petite devant la fréquence moyenne :

$$\Delta f \ll f_0 \quad (7.44)$$

Le contraste des franges $|\gamma(\tau)|$ est proportionnel au module de la transformée de Fourier du profil de raie, $\gamma(\tau)$. En vertu des propriétés de la transformée de Fourier la largeur $\Delta\tau$ de cette fonction doit vérifier

$$\Delta\tau = \frac{1}{\Delta f} \gg \frac{1}{f_0} \quad (7.45)$$

Dans le cas d'une onde quasi-monochromatique, le contraste est donc une fonction lentement variable devant la période des franges.

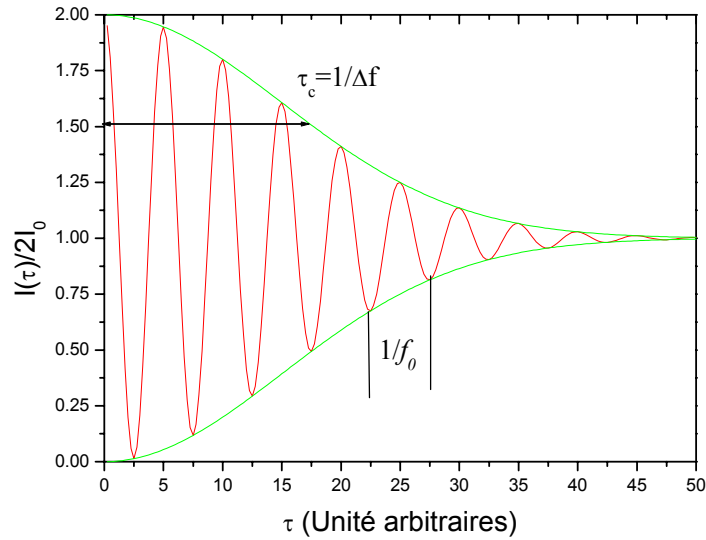


FIG. 7.6 –

7.3.3 Temps et longueur de cohérence

On appelle temps de cohérence la quantité

$$\tau_c = \Delta\tau = \frac{1}{\Delta f} \quad (7.46)$$

C'est une mesure de la largeur de la fonction contraste. Si le retard entre les deux fronts d'onde qui se superposent est grand devant τ_c alors et les

franges disparaissent. Les deux fronts d'onde ne produisent plus d'interférence : ils sont devenus mutuellement incohérents. L'onde perd sa capacité à interférer avec elle-même retardée d'un temps supérieur au temps de cohérence.

On appelle longueur de cohérence la quantité

$$L_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta f} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (7.47)$$

C'est la distance que parcourt l'onde à la vitesse de lumière pendant le temps τ_c . C'est une mesure de la distance maximum entre deux fronts d'onde cohérents. La longueur de cohérence est un paramètre commode pour évaluer par exemple la différence de marche maximale entre les deux bras d'un interféromètre de Michelson : cette différence de marche ne devra pas excéder la longueur de cohérence.

7.3.4 Nombre de franges dans le champ d'interférences

La distance de marche qui sépare deux franges consécutives est égale à la longueur d'onde. Si la différence de marche entre deux ondes excède la longueur de cohérence

alors les franges ne sont plus visibles. On en déduit que le nombre de franges visibles est le rapport entre la longueur de cohérence sur la longueur d'onde :

$$N = \frac{L_c}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \quad (7.48)$$

On peut ainsi constater que plus la largeur spectrale est fine et plus le champ d'interférence sera grand. Réciproquement une source lumineuse dont le spectre sera largement étendu ne peut pas produire de figure d'interférence contenant un grand nombre de franges.

Quelques ordres de grandeur :

	λ_0 [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]	τ_c [s]	L_c [m]	N
Laser He-Ne	632.8	10^{-3}	10^{-9}	0.3	50000
Raie rouge de l'hydrogène	656.2	0.1	10^{-11}	0.004	6500
Lumière du Soleil	500	400	210^{-15}	400	1
Lumière blanche + filtre étroit	500	20	310^{-14}	20	25

Nous reportons dans le tableau ci-après quelques caractéristiques de sources utilisées en T.P.

	df	τ (s)	$L_c = c\tau$
Raie D du sodium	10GHz	10^{-10}	3cm
Laser He-Ne multimode	1.5GHz	6.710^{-10}	20cm
Raie verte du Hg	1GHz	10^{-9}	30cm
Raie jaune du Kr	400MHz	2.510^{-9}	75cm
Laser monomode	1MHz	10^{-6}	300m
Laser He-Ne monomode stabilisé	100kHz	10^{-5}	3km

On peut remarquer que toutes ces quantités sont des propriétés intrinsèques de l'onde et ne dépendent pas de l'interféromètre utilisé. Remarquons aussi qu'il est impossible d'obtenir des interférences avec la lumière blanche du Soleil (1 frange visible seulement), mais que la traversée d'un filtre permet d'augmenter le temps de cohérence en réduisant la largeur de bande.

7.4 Grandeurs mesurables

7.4.1 Intensité lumineuse.

L'analyse mathématique que nous avons entreprise n'est utile que si l'on peut faire le lien entre les quantités décrites et celles qui sont réellement mesurables. Nous avons déjà souligné à plusieurs reprises que les signaux $s(t)$ et $S(f)$ ne sont pas mesurables en optique. En effet les récepteurs optiques sont dits **quadratiques** et on ne peut donc accéder qu'à la moyenne énergétique du signal sur le temps de réponse du détecteur. En particulier au cours d'une expérience, cette moyenne est effectuée généralement par l'oeil de l'observateur (temps d'intégration 1/10ème de seconde) où par le récepteur optique utilisé pour mesurer l'intensité (photodiode, phototransistor...). Nous pouvons donc mesurer la quantité

$$I_m(t) = \frac{1}{T_r} \int_t^{t+T_r} s(\theta)s^*(\theta)d\theta = C_{ss}(0) \quad (7.49)$$

Si la source est stationnaire cette mesure ne dépend pas de l'origine des temps et nous avons alors

$$I_m = \frac{1}{T_r} \int_0^{T_r} s(\theta)s^*(\theta)d\theta = C_{ss}(0) \quad (7.50)$$

D'un point de vue pratique cette mesure s'effectue en plaçant directement la source lumineuse en face du détecteur.

7.4.2 Densité spectrale ou spectre lumineux.

La densité spectrale $D(f)$ représente la répartition de l'intensité de la source en fonction de la fréquence. C'est une quantité directement accessible à l'expérience puisque sa mesure est obtenue en utilisant un spectroscopie à prisme ou à réseau. Pour cela il suffit de disposer d'une fente lumineuse source au foyer d'une lentille convergente. L'onde plane issue de la lentille est dispersée par le réseau et est refocalisée au foyer d'une lentille convergente. Le spectre est observé sur un écran ou à travers une lunette de visée. Le spectre que l'on obtient par cette technique n'est pas le spectre vrai de la source mais représente la convolution du spectre vrai par la fonction de résolution du spectroscopie. Le spectre d'une source lumineuse est une signature de la source et sa connaissance permet de remonter par le calcul à la transformée de Fourier inverse à la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ du signal lumineux. Nous verrons cependant que la fonction $C_{ss}(\tau)$ est accessible de façon beaucoup plus fine par une autre méthode. Nous présentons quelques exemples de spectres en précisant leur domaine de validité.

a- onde plane monochromatique idéalement cohérente

Le densité spectrale est composée d'un pic de Dirac localisé à la fréquence de la radiation utilisée

$$D(f) = A^2\delta(f - f_0) \quad (7.51)$$

Ce type de spectre est idéal et ne peut jamais être mesuré. C'est la représentation limite du spectre issu d'un laser monomode.

b- doublet idéalement cohérent

C'est la superposition de deux ondes monochromatiques idéalement cohérentes. Le spectre est composé de deux distributions de Dirac centrées sur les fréquences d'émission des deux ondes. Ces deux fréquences sont supposées en général très proches l'une de l'autre

$$D(f) = A^2\delta(f - f_1) + B^2\delta(f - f_2) \quad (7.52)$$

Ce type de spectre est idéal et ne peut jamais être mesuré. C'est la représentation limite du spectre d'une lampe à vapeur de sodium qui contient un doublet à 589nm et 589.6nm.

c-train d'onde sinusoïdal idéal

Le spectre est étendu à cause de la durée finie du train d'onde. Nous avons vu qu'il est défini par

$$D(f) = A^2 \tau_0^2 \sin^2 [\pi \tau_c (f - f_0)] \quad (7.53)$$

Ce spectre se rapproche plus de la réalité pour décrire des sources monochromatiques. Toutefois le train d'onde est souvent amorti et la forme du spectre dévie en général de la fonction sinus carré cardinal. Ce type de spectre est utile pour modéliser simplement des signaux lumineux d'extension temporelle finie.

7.4.3 Coefficient de cohérence

Ce coefficient peut être directement mesuré en utilisant une expérience d'interférences et plus particulièrement l'interféromètre de Michelson. Elle consiste à utiliser l'interféromètre de Michelson monté en lame mince parallèle en mesurant l'intensité au centre en fonction de l'épaisseur e de la lame mince. Pour cela nous rappelons que dans ce type d'appareil lorsque les deux miroirs sont perpendiculaires entre eux l'intensité que l'on mesure au foyer de la lentille de projection est donnée par

$$I_m(\tau) = \langle |s(t) + s(t - \tau)|^2 \rangle$$

En effet le signal incident se divise en amplitudes égales en passant par la séparatrice. Les deux ondes ainsi séparées ont exactement les mêmes caractéristiques à la sortie de la séparatrice qui a pour effet de cloner l'onde incidente. Les deux clones cheminent vers les deux miroirs M_1 et M_2 et se recombinent après un aller-retour sur leurs trajets respectifs. Si les deux miroirs sont à égale distance de la séparatrice les deux ondes clonées parcourent la même distance avant de se recombinaison. Par contre si les deux miroirs ne sont pas à égale distance mais présentent un écart e , l'une des deux ondes va parcourir une distance égale au double de cet écart et arrivera au point de recombinaison avec un décalage temporel $\tau = 2e/c$ par rapport à l'autre onde. L'interféromètre de Michelson agit comme un diviseur, déphaseur et sommateur d'onde lumineuse. Le récepteur lumineux joue le rôle de corrélateur car il est sensible à $C_{ss}(\tau)$. Un interféromètre de Michelson est donc un corrélateur d'ondes lumineuses et il permet d'accéder à la fonction $C_{ss}(\tau)$. Nous avons en effet vu que

$$I_m(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} [C_{ss}(\tau)] = 2I_0 (1 + \operatorname{Re} [\gamma(\tau)]) \quad (7.54)$$

Pour une onde plane monochromatique incidente idéale $\gamma(\tau) = e^{i\omega_0\tau}$. L'intensité mesurée est donc

$$I_m(\tau) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi f_0\tau)) \quad (7.55)$$

et la fonction de contraste est donc maximale puisque $|\gamma(\tau)| = 1$. Dans ce cas très simple l'intensité oscille alternativement entre un maximum d'intensité $4I_0$ et un minimum nul selon la valeur de l'écart entre les deux miroirs.

Pour le train d'onde sinusoïdal, nous avons $\gamma(\tau) = e^{i\omega_0\tau} \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right|$ si $\tau < \tau_c$. Il s'ensuit que l'intensité mesurée s'écrit

$$I_m(\tau) = 2I_0 \left(1 + \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right| \cos(2\pi f_0 \tau) \right) \quad (7.56)$$

Le facteur de contraste $|\gamma(\tau)| = \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right|$ ce qui montre qu'il diminue avec $\tau = \frac{2e}{c}$. Les franges sont initialement bien contrastées puis de moins en moins visibles au fur et à mesure que l'on déplace le chariot. Quand la valeur de τ atteint la valeur $\tau_c = L/c$ la visibilité des franges s'annule et l'intensité devient alors uniforme pour toute augmentation ultérieure de e : les deux trains d'onde ne peuvent plus interférer.

Si l'on suppose maintenant que le Michelson n'est pas éclairé par une onde monochromatique mais par une distribution d'ondes de différentes fréquences on peut voir que dans l'expression générale

$$I_m(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re}[C_{ss}(\tau)] \quad (7.57)$$

les deux parties de la somme s'indentifient à

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty D(f) df \\ \operatorname{Re}[C_{ss}(\tau)] &= \int_0^\infty D(f) \cos(2\pi f \tau) df \end{aligned} \quad (7.58)$$

L'intensité mesurée est donc

$$I_m(\tau) = 2 \int_0^\infty D(f) (1 + \cos(2\pi f \tau)) df \quad (7.59)$$

Le coefficient de cohérence peut donc être obtenu en effectuant l'opération suivante

$$\gamma(\tau) = \frac{I_m(\tau) - 2I_0}{2I_0}$$

Il est remarquable de noter que l'interféromètre de Michelson est l'instrument le plus approprié à cette mesure du coefficient de cohérence. En effet on peut imaginer que dans toute expérience d'interférence il est possible d'accéder à cette quantité puisque l'on superpose des signaux décalés dans le temps. Ce serait méconnaître les limitations expérimentales des dispositifs utilisant la division du front d'onde que de croire qu'il peuvent permettre la mesure de $\gamma(\tau)$. En effet ces dispositifs sont d'une part très sensibles à la cohérence spatiale de la source (voir chapitre suivant) et à la diffraction par de petites ouvertures qui masquent le contraste des franges d'interférence. D'autre part le décalage temporel que l'on peut raisonnablement mesurer dans ce type d'expérience reste toujours très faible. A titre d'exemple on peut considérer l'expérience des trous d'Young. Dans une expérience de ce type les franges d'interférences sont rarement mesurables au delà de l'ordre 100 à cause du phénomène de diffraction. Le champ est donc de l'ordre de $100\lambda D/a$ et les ondes qui interfèrent à l'ordre 100 subissent une différence de chemin optique de $100\lambda \simeq 50\mu m$. Pour de nombreuses sources lumineuses la longueur de cohérence temporelle est nettement supérieure (de l'ordre de 30cm pour un laser He-Ne) et la cohérence temporelle n'est donc pas réellement mesurable car son effet n'est pas visible.

Dans une expérience de division d'amplitude utilisant l'interféromètre de Michelson, la cohérence spatiale de la source ne joue pas vraiment et le déplacement du chariot porteur de l'un des miroirs peut se faire sur une large course. Avec cet instrument on peut donc mesurer l'intensité sur une grande plage de valeurs de τ ce qui permet d'accéder à la cohérence temporelle de la source.

Chapitre 8

Holographie

8.1 Objet de phase

Si une onde monochromatique tombe en incidence normale sur un objet de transparence $t(x, y)$ le champ élémentaire en un point M à la sortie de l'objet vaut

$$dE(M, t) = At(x, y)e^{i\omega t} dx dy \quad (8.1)$$

Si cet objet est d'épaisseur constante e et d'indice de réfraction n constant, l'onde incidente subit un déphasage identique en tous points de l'objet et le champ en sortie vaut

$$dE(M, t) = Ae^{i(\omega t - k_0 n e)} dx dy \quad (8.2)$$

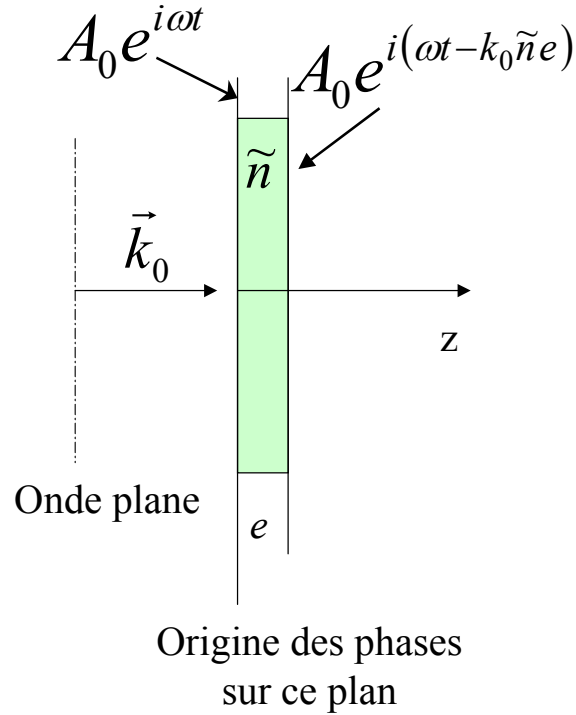


FIG. 8.1 – Représentation d’une onde plane arrivant en incidence normale sur une lame d’épaisseur e d’indice \tilde{n} . En sortie l’onde est déphasée de $2\pi ne/\lambda_0$ et atténuée de $e^{-k_0 \kappa e}$.

Le champ est déphasé par rapport à l’entrée et si l’on tient compte de l’absorption dans la lame due à la partie complexe de l’indice $n = \tilde{n} - i\kappa$, il est atténué et vaut

$$dE(M, t) = A e^{-k_0 \kappa e} e^{i(\omega t - k_0 \tilde{n} e)} dx dy \quad (8.3)$$

avec

$$t(x, y) = e^{-k_0 \kappa e} e^{i k_0 \tilde{n} e} \quad (8.4)$$

La fonction $t(x, y)$ est indépendante des coordonnées (x, y) du point et on considèrera que cet objet n’affecte que l’amplitude du champ, la phase prenant en sortie une valeur constante.

Si l’on suppose maintenant que l’épaisseur et/ou l’indice de cette lame varie avec la position du point M , on voit de suite que la phase de l’onde en sortie de la lame sera dépendante des coordonnées du point M . On pourra écrire que

$$t(x, y) = |t(x, y)| e^{i\phi(x, y)} \quad (8.5)$$

Si l’on suppose l’absorption négligeable, l’objet devient un objet de phase et

$$t(x, y) = t e^{i\phi(x, y)} \text{ avec } t \text{ constant} \quad (8.6)$$

La phase de l'onde à la sortie de la lame à la position z d'un plan perpendiculaire à l'onde incidente contient toute l'information sur le relief de la lame. En absence d'absorption cette phase s'écrit

$$\phi(x, y, z) = \frac{2\pi (ne(x, y) + (z - e(x, y)))}{\lambda_0} = \frac{2\pi(n - 1)e(x, y) + 2\pi z}{\lambda_0} \quad (8.7)$$

Toute expérience qui permettrait de mesurer la phase de l'onde très précisément en sortie de lame permettrait de récupérer le profil d'épaisseur de cette lame.

Il est facile de comprendre que le raisonnement que nous venons de tenir pour un objet éclairé en transmission reste valide si celui est éclairé en réflexion. Il suffit pour cela de remplacer le coefficient de transmission $t(x, y)$ par un coefficient de réflexion $r(x, y)$.

8.2 Plaque photographique

Une plaque photographique est un système qui permet d'enregistrer des images. Elle n'est plus guère utilisée compte tenu des évolutions technologiques des systèmes photographiques. Elle est constituée d'un support translucide (verre) sur lequel est déposée une couche photosensible qui est impressionnée par le rayonnement lumineux qu'elle reçoit. Plus un objet est lumineux et plus il impressionne la plaque en la noircissant (réaction chimique utilisant des sels d'argent qui se transforment en argent métallique noir). Le noircissement (donc son facteur de transmission t) de la plaque dépend du temps d'exposition τ et de l'intensité I de l'objet lumineux.

$$N = t = I\tau \quad (8.8)$$

Evidemment si l'on expose trop longtemps une plaque photographique avec de la lumière celle-ci devient toute noire; on dit qu'elle est saturée. A l'inverse un temps d'exposition trop court produit une image peu contrastée qui est qualifiée de sous-exposée. Il existe un régime intermédiaire pour lequel l'intensité mesurée sur la plaque variera linéairement avec le temps d'exposition et l'intensité lumineuse. C'est dans ce régime qu'il faut se situer pour enregistrer correctement la lumière issue de l'objet.

En envoyant de la lumière réfléchie par un objet sur une plaque photographique on peut réaliser une image de cet objet.

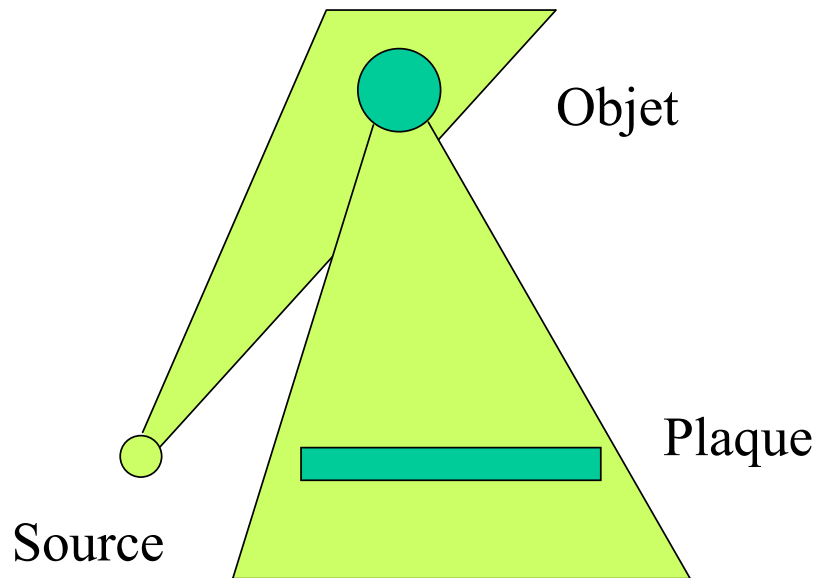


FIG. 8.2 – Illustration de l'impression d'une plaque photographique par réflexion d'une onde lumineuse sur un objet réfléchissant.

Au cours de l'impression, la plaque photographique enregistre l'intensité de l'onde réfléchiée par l'objet et l'information sur la phase de l'onde est perdue. En effet la plaque photographique est un récepteur quadratique qui mesure le module au carré du champ. Comme c'est la phase de l'onde qui traduit le temps que met l'onde pour aller du point de réflexion à la plaque, il n'y a aucune information sur le relief de l'objet. De plus pour observer une image de l'objet réfléchissant il est nécessaire d'utiliser une lentille et d'imposer à l'objet d'être dans le plan conjugué de la plaque par rapport à la lentille. L'objet de l'holographie est pouvoir restituer la phase au cours de l'enregistrement et en conséquence de permettre un enregistrement qui contient une information sur le relief de l'objet.

8.3 Principe de l'holographie

8.3.1 Montage expérimental

C'est le physicien britannique D. Gabor qui a eu le premier l'idée de faire un enregistrement en gardant une information sur la phase. Son intention était d'améliorer la résolution des microscopes électroniques. Il inventa le terme hologramme qui utilise le préfixe grec *holos* signifiant *dans sa totalité*. Il proposa vers 1940 une technique d'enregistrement sur plaque photographique permettant de conserver l'information à la fois sur l'amplitude et la phase de l'onde. Pour ce faire il imagina d'utiliser l'interférence entre une onde de référence et l'onde diffusée par l'objet réfléchissant selon le principe de la figure 8.3

FIG. 8.3 – *Principe de fonctionnement d'un hologramme en réflexion. L'onde issue d'un laser est séparée en deux composantes sur la séparatrice. Une partie de l'onde illumine directement la plaque photographique alors que l'autre partie est d'abord diffusée par un objet avant d'atteindre la plaque. C'est l'interférence entre ces deux ondes qui engendre l'hologramme.*

8.3.2 Principe mathématique

La plaque photographique qui reçoit l'onde issue du faisceau de référence et celle diffusée par l'objet est placée dans le plan xOy . On admet que l'onde de référence est plane et que sa phase ϕ_{ref} dans le plan de la plaque est nulle. L'onde réfléchi par l'objet arrivant sur la plaque s'écrit

$$o(x, y) = O(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} \quad (8.9)$$

Elle se superpose à l'onde de référence sur la plaque et l'amplitude totale en un point de la plaque est donnée par

$$A(x, y, z) = a_{ref} + O(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} \quad (8.10)$$

Il est clair que l'on peut écrire cette relation à la seule condition que les ondes de référence et réfléchies soient cohérentes entre elles ce qui impose une longueur de cohérence temporelle suffisamment grande pour réaliser l'enregistrement. L'absence de sources lumineuses très cohérentes a posé d'énormes problèmes à Gabor pour enregistrer des hologrammes de bonne qualité. Aujourd'hui les sources laser qui ont de grandes

longueurs de cohérence temporelle sont utilisées pour réaliser les enregistrements holographiques.

Il s'ensuit que l'intensité au point M de la plaque s'écrit

$$I(x, y) = \langle A(x, y)A^*(x, y) \rangle = \left\langle a_r^2 + |O(x, y, z)|^2 + a_r O(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} + a_r O^*(x, y, z)e^{-i\phi(x, y, z)} \right\rangle \quad (8.11)$$

Le noircissement de la plaque (qui est aussi sa transmission optique) est défini par

$$N(x, y) = N_0 + \beta_1 \tau I(x, y) + \beta_2 \tau I^2(x, y) + \dots \quad (8.13)$$

Si la plaque est enregistrée dans son régime linéaire (pas de saturation ni de sous exposition) pendant un temps d'exposition τ alors

$$N(x, y) = N_0 + \beta_1 \tau I(x, y) \quad (8.14)$$

soit

$$N(x, y) = N_0 + \beta_1 \tau \left(\left\langle a_r^2 + |O(x, y, z)|^2 \right\rangle \right) + \beta_1 \tau \left\langle a_r^* O(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} + a_r O^*(x, y, z)e^{-i\phi(x, y, z)} \right\rangle \quad (8.15)$$

Le noircissement contient donc trois termes :

- un terme constant N_0
- un terme $\beta_1 \tau \left(\left\langle a_r^2 + |O(x, y, z)|^2 \right\rangle \right)$ qui est lié à la somme des intensités de chaque onde
- un terme holographique $h(x, y)$ caractéristique de l'onde diffusée par l'objet réfléchissant qui contient l'information sur sa phase

Le terme holographique s'écrit

$$h(x, y) = \beta_1 \tau \left\langle a_r^* O(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} + a_r O^*(x, y, z)e^{-i\phi(x, y, z)} \right\rangle \quad (8.16)$$

Sa présence dans l'intensité montre indubitablement que l'on enregistre sur la plaque photographique des franges d'interférences qui contiennent l'information sur la différence de phase entre l'onde de référence et l'onde diffusée.

8.3.3 Reconstruction optique de l'hologramme

On éclaire l'hologramme au moyen d'une onde de référence a_r identique à celle utilisée pour enregistrer l'hologramme.

L'onde transmise par l'hologramme est donc d'amplitude

$$A_t = N(x, y)a_r \quad (8.17)$$

Elle contient tous les termes relatifs à la transmission de la plaque.

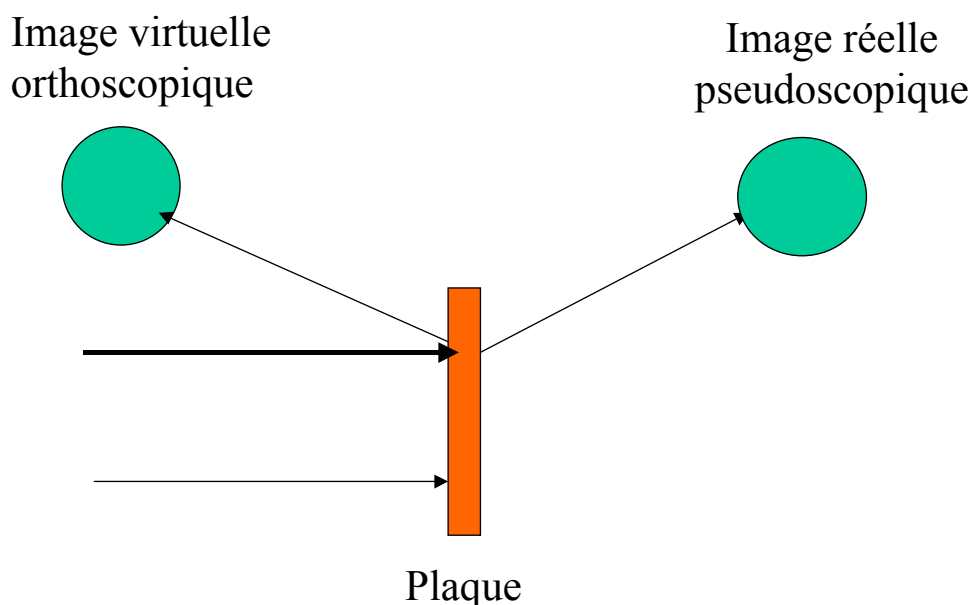


FIG. 8.4 – Reconstruction de l'image par éclairage de la plaque par l'onde de référence. On récupère deux images qui sont conjuguées l'une de l'autre.

On distingue dans cette somme les termes suivants

$$A_t = A_0 + A_1 + A_O(x, y) + A_p(x, y) + A_c(x, y) \quad (8.18)$$

avec

- $A_0 = a_r N_0$
- $A_1 = c_1 a_r |a_r^2|$
- $A_0(x, y) = c_1 a_r \langle |O(x, y, t)|^2 \rangle$
- $A_p(x, y) = c_1 a_r \langle a_r^* O(x, y, z) e^{i\phi(x, y, z)} \rangle$ reconstruction primaire
- $A_c(x, y) = c_1 a_r \langle a_r O^*(x, y, z) e^{-i\phi(x, y, z)} \rangle$ reconstruction conjuguée

8.4 Double diffraction

8.4.1 Montage expérimental

Si l'on envoie une onde plane sur un objet diffractant (objet d'amplitude ou de phase) on récupère dans le plan focal de la lentille d'observation la figure de diffraction de cet objet. Le plan où cette figure est observée est appelé plan de Fourier. Par le biais d'une seconde lentille convergente dont on place le plan focal objet dans le plan de Fourier on forme sur un écran une image de l'objet diffractant : ceci constitue l'expérience de double diffraction.

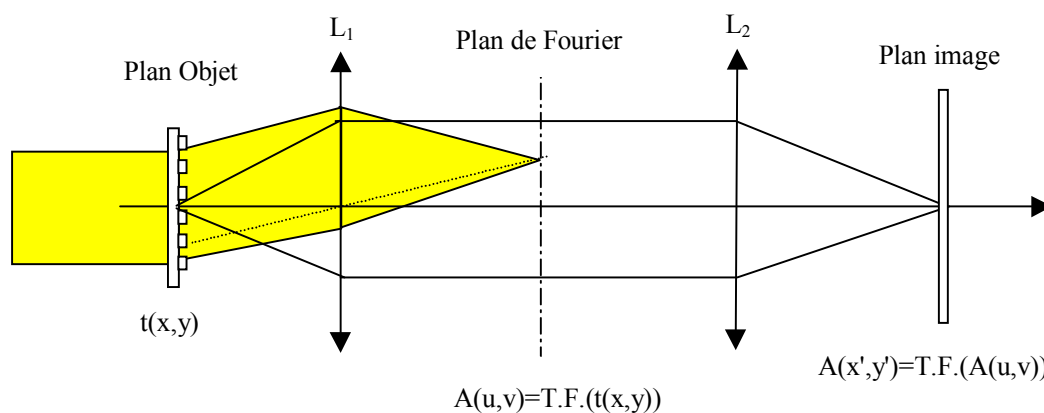


FIG. 8.5 – Relation de conjugaison entre le plan objet et le plan image et localisation du plan de Fourier

Il est intéressant de considérer ce que l'on peut observer dans le plan image. Si l'on place un objet lumineux dans le plan objet on sait en utilisant les lois de l'optique géométrique que l'image formée par ce système optique est celle de l'objet lumineux renversée et modifiée du facteur de grandissement du système.

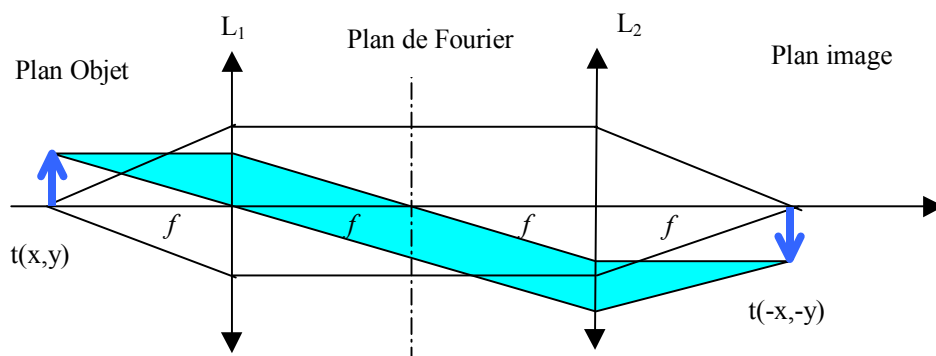


FIG. 8.6 –

Si l'on utilise le montage $4f$ dans lequel l'objet est dans le plan focal de L_1 et L_2 est à $2f$ de L_1 , l'image se forme à la distance f de L_2 et est de grandissement -1 . On obtient donc dans ce type de montage

$$t(x', y') = -Ct(x, y) \quad (8.19)$$

sous réserve que rien n'altère le cheminement des rayons dans le plan de Fourier.

8.4.2 Étude théorique

Si maintenant on se place du point de vue de la diffraction, la lentille L_1 donne dans le plan de Fourier de coordonnées (X, Y) une image qui est la transformée de Fourier de la fonction de transparence de l'objet soit

$$\tilde{t}\left(\frac{X}{\lambda f}, \frac{Y}{\lambda f}\right) = KT.F.(t(x, y)) = K \iint t(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{Xx}{\lambda f} + \frac{Yy}{\lambda f}\right)} dx dy \quad (8.20)$$

Cet image peut être considérée comme un objet diffractant dont récupère la figure de diffraction dans le plan focal de la lentille L_2 . On obtient donc dans le plan focal une image d'amplitude

$$\tilde{\tilde{t}}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = KT.F.(\tilde{t}\left(\frac{X}{\lambda f}, \frac{Y}{\lambda f}\right)) \quad (8.21)$$

soit

$$\tilde{\tilde{t}}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = K^2 \iint \tilde{t}\left(\frac{X}{\lambda f}, \frac{Y}{\lambda f}\right) e^{-2i\pi\left(\frac{Xx'}{\lambda f} + \frac{Yy'}{\lambda f}\right)} dX dY \quad (8.22)$$

Or dans l'expression de la transformée de Fourier de $t(x, y)$ on peut changer la variable muette d'intégration x en $-x$ sans changer l'intégrale. On a donc

$$\tilde{\tilde{t}}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = K^2 \iint \iint t(-x, -y) e^{2i\pi\left(\frac{Xx}{\lambda f} + \frac{Yy}{\lambda f}\right)} e^{-2i\pi\left(\frac{Xx'}{\lambda f} + \frac{Yy'}{\lambda f}\right)} dX dY \quad (8.23)$$

ce qui mène à

$$\tilde{\tilde{t}}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = K^2 \iint \iint t(-x, -y) e^{-2i\pi\left(\frac{X(x'-x)}{\lambda f} + \frac{Y(y'-y)}{\lambda f}\right)} dX dY dx dy \quad (8.24)$$

Posons

$$\tilde{p}\left(\frac{(x'-x)}{\lambda f}, \frac{(y'-y)}{\lambda f}\right) = \iint e^{-2i\pi\left(\frac{X(x'-x)}{\lambda f} + \frac{Y(y'-y)}{\lambda f}\right)} dX dY \quad (8.25)$$

soit en changeant X en $U = X/\lambda f$ et Y en $V = Y/\lambda f$

$$\tilde{p}(x' - x, y' - y) = \lambda^2 f^2 \iint e^{-2i\pi(U(x'-x) + V(y'-y))} dU dV \quad (8.26)$$

On obtient alors

$$\tilde{\tilde{t}}(x', y') = K^2 \iint t(-x, -y) \tilde{p}(x' - x, y' - y) dx dy \quad (8.27)$$

Si l'on se rappelle que

$$t(-x) * p(x) = \int t(-x) p(x' - x) dx \quad (8.28)$$

On voit que l'image formée est donnée par

$$\tilde{t}(x', y') = K^2 t(-x, -y) * \tilde{p}(x, y) \quad (8.29)$$

L'image est donc le produit de convolution de la fonction de transparence de l'objet renversé par la réponse impulsionnelle de ce qui se passe dans le plan de Fourier en l'absence de la figure de diffraction dans ce plan. Dans le cas particulier où il n'y a rien dans le plan de Fourier on a

$$\tilde{p}(x', y') = \lambda^2 f^2 \iint e^{-2i\pi(Ux'+Vy')} dU dV = \lambda^2 f^2 \delta(x') \delta(y') \quad (8.30)$$

Il devient clair que l'on mesure alors

$$\tilde{t}(x', y') = K^2 \lambda^2 f^2 t(-x', -y') \quad (8.31)$$

soit à une constante près la transparence de l'objet renversé.

8.4.3 Expérience d'Abbe

L'expérience d'Abbe (1873) consiste à modifier la figure de diffraction dans le plan de Fourier. Cette modification en langage moderne est appelée filtrage. Comme elle consiste à occulter certaines parties du spectre de Fourier de fréquences spatiales u, v , cette opération est connue sous le nom de filtrage des fréquences spatiales.

L'une des expériences très spectaculaire de filtrage consiste à détrimer un réseau carré en filtrant les fréquences de Fourier dans une direction du spectre ainsi que l'explique la figure 8.7.

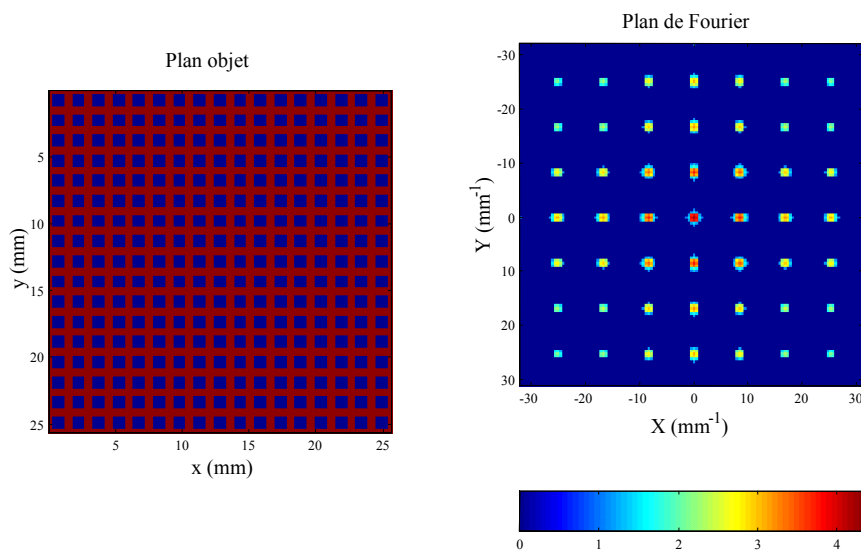


FIG. 8.7 – Réseau de diffraction carré contenu dans le plan objet et sa transformée de Fourier observable dans le plan de Fourier

La mise en place d'une fente coupant toutes les fréquences spatiales dans la direction X conduit à ne conserver que les fréquences spatiales selon Y (voir figure).

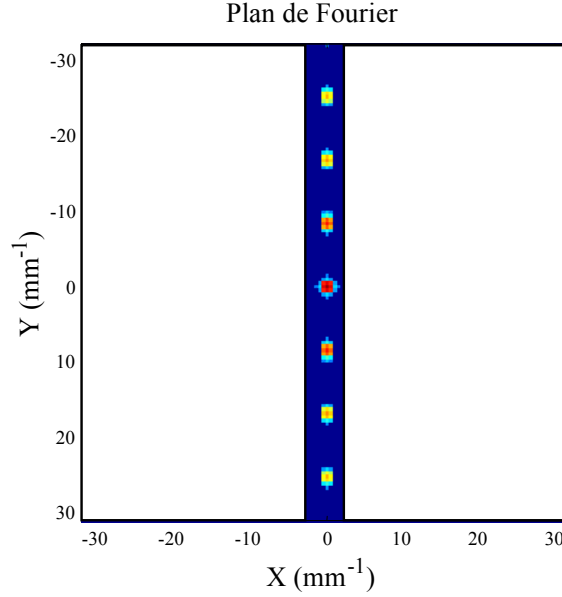


FIG. 8.8 – Filtrage dans le plan de Fourier au moyen d'une fente qui coupe toutes les fréquences spatiales sauf celles contenues dans la direction Y en $X=0$

Si l'on réalise la transformée de Fourier de l'image représentée figure 8.8 on voit bien alors que l'on ne récupèrera dans le plan image que des lignes périodiques selon y' .

On peut expliquer mathématiquement ce phénomène en explicitant la fonction p

$$\tilde{p}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = \iint \text{rect}_a(X) e^{-2i\pi\left(\frac{Xx'}{\lambda f} + \frac{Yy'}{\lambda f}\right)} dX dY \quad (8.32)$$

soit

$$\tilde{p}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = \int e^{-2i\pi\frac{Yy'}{\lambda f}} dY \int \text{rect}_a(X) e^{-2i\pi\frac{Xx'}{\lambda f}} dX \quad (8.33)$$

Par changement de variable on aboutit à

$$\tilde{p}(x', y') = \lambda^2 f^2 \int e^{-2i\pi V y'} dV \int \text{rect}_{\frac{a}{\lambda f}}(U) e^{-2i\pi U x'} dX \quad (8.34)$$

ce qui entraîne

$$\tilde{p}(x', y') = a\lambda f \delta(y') \sin c \frac{\pi x' a}{\lambda f} \quad (8.35)$$

Il s'ensuit que l'image formée dans le plan image n'est pas altérée selon Oy' en raison de la présence de la distribution de Dirac dans cette direction mais est sérieusement

modifiée selon Oy. Si l'onde éclairant l'objet est plane d'amplitude A_0 , l'amplitude de l'onde dans le plan image est donnée par

$$A(x', y') = A_0 \tilde{t}(x', y') = A_0 a \lambda f K^2 t(-x, -y) * \sin c \frac{\pi x a}{\lambda f} \quad (8.36)$$

8.4.4 Strioscopie

Cela consiste à placer dans l'espace objet un objet de phase. Un objet qui modifie la phase de l'onde incidente uniformément est une lame mince de verre d'épaisseur e et d'indice n . Si la phase à l'entrée de la lame est nulle (onde plane avec origine des phases sur le plan d'entrée), alors la phase en sortie de la lame sera $\phi(x, y) = 2\pi n e / \lambda$ et sera constante si l'épaisseur de la lame l'est. Si on ne place rien dans l'espace de Fourier on observe une intensité constante dans le plan image. En effet l'onde plane qui arrive en incidence normale sur l'objet en ressort avec une amplitude

$$A(x, y) = A_0 t(x, y) = A_0 e^{-i\phi(x, y)} \quad (8.37)$$

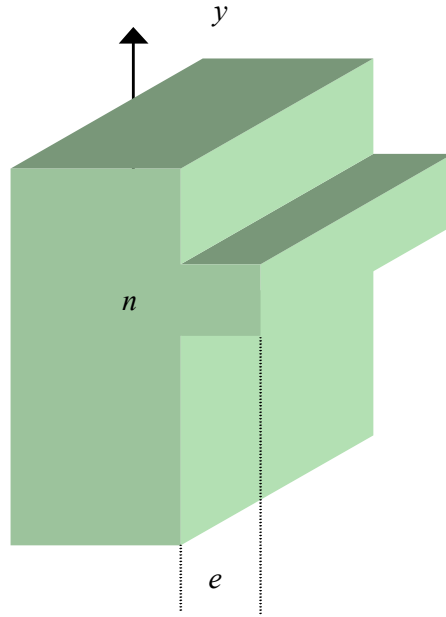
L'amplitude mesurée dans le plan image en absence de masque dans le plan de Fourier est donc

$$A(x', y') = \tilde{t}(x', y') A_0 = A_0 \lambda^2 f^2 K^2 t(-x, -y) = A_0 \lambda^2 f^2 K^2 e^{-i\phi(-x, -y)} \quad (8.38)$$

et l'intensité qui en résulte est bien constante et vaut

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \quad (8.39)$$

Supposons maintenant que l'on place une lame d'épaisseur variable dans le plan objet (voir figure ??).



Objet de phase constitué d'une lame d'épaisseur variable. Dans la partie enflée de la lame le chemin optique diffère de celui dans l'air de $(n-1)e$. Il s'ensuit que la phase en sortie de lame n'est pas constante.

En sortie de lame la phase n'est plus uniforme. Elle vaut

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_1 = \frac{2\pi n(a+e)}{\lambda} & \text{si } y \in \text{rect}_b(y - y_0) \\ \phi_2 = \frac{2\pi(na+e)}{\lambda} = \phi_1 + \frac{2\pi(1-n)e}{\lambda} & \text{autrement} \end{cases} \quad (8.40)$$

L'onde en sortie de lame vaut donc

$$A(x, y) = A_0 t(x, y) = A_0 e^{-i\phi_1} \text{rect}_b(y - y_0) + A_0 e^{-i\phi_2} [1 - \text{rect}_b(y - y_0)] \quad (8.41)$$

soit

$$A(x, y) = A_0 \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y - y_0) + A_0 e^{-i\phi_2} \quad (8.42)$$

On voit ainsi que

Il s'ensuit que l'intensité mesurée sur l'écran du plan image devient

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \left| \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y_0 - y') + e^{-i\phi_2} \right|^2 \quad (8.43)$$

Le produit de deux portes étant une porte il vient

$$\begin{aligned} I(x', y') = & (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \left(1 + \left[\left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) e^{i\phi_2} + \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2} \right) e^{-i\phi_2} \right] \text{rect}_b(y_0 - y') + \right. \\ & \left. \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2} \right) \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y_0 - y') \right) \end{aligned} \quad (8.44)$$

soit

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + 2 [\cos(\phi_1 - \phi_2) - 1] \text{rect}_b(y_0 - y') + (e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2}) (e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) \text{rect}_b(y_0 - y')) \quad (8.45)$$

où encore

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + 2 [\cos(\phi_1 - \phi_2) - 1] \text{rect}_b(y_0 - y) + 2 [1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)] \text{rect}_b(y_0 - y)) \quad (8.46)$$

ce qui conduit à

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \quad (8.47)$$

La petite variation de phase ne produit donc aucun effet sur l'écran qui est éclairé de façon uniforme.

Si par contre on place dans le plan de Fourier un petit écran qui coupe les fréquences spatiales voisines de $v=0$ il en est tout autrement. En effet on mesure dans le plan de Fourier la *T.F.* de $A(x, y)$ donnée par 8.42. Cette T.F. contient deux termes

$$\tilde{A}(u, v) = \tilde{A}_1(u, v) + \tilde{A}_2(u, v) \quad (8.48)$$

avec

$$\tilde{A}_1(u, v) = T.F. \left[A_0 (e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) \text{rect}_b(y - y_0) \right] \quad (8.49)$$

$$\tilde{A}_2(u, v) = T.F. \left[A_0 e^{-i\phi_2} \right] \quad (8.50)$$

Le deuxième terme ne contient que des fréquences spatiales proches de $u=0$ et $v=0$ qui seront filtrées (éliminées) par le masque alors que le premier fait apparaître des fréquences très élevées pour peu que b soit assez petit. Ces fréquences ne seront pas altérées par le filtre et il s'ensuit que nous mesurerons dans le plan image

$$I(x', y') = \left| T.F.(\tilde{A}_1(u, v)) \right|^2 = 2 (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 [1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)] \text{rect}_b(y_0 - y) \quad (8.51)$$

soit encore

$$I(x', y') = 2 (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \left[1 - \cos \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} \right] \text{rect}_b(y_0 - y) \quad (8.52)$$

Si l'on admet que le changement de phase est faible alors

$$\cos \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} \right)^2 \quad (8.53)$$

et l'intensité devient

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \left(\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} \right)^2 \text{rect}_b(y_0 - y') \quad (8.54)$$

On observe sur l'écran une intensité très faiblement contrastée de même étendue que le défaut de phase. Le faible contraste est dû au terme $\left(\frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} \right)^2 \ll 1$ dont la valeur est extrêmement petite.

8.4.5 Contraste de phase

Le contraste de phase a été inventé par le physicien Zernike ce qui lui valut le prix Nobel en 1953. En effet nous venons de voir que si le montage strioscopique permet de fait d'observer des objets de phase, il n'en reste pas moins très peu lumineux. En contraste de phase, le masque qui se trouve dans dans le plan de Fourier est remplacé par une lame de phase qui change en ce lieu la phase de $\pi/2$. Nous rappelons que l'amplitude en sortie de l'objet de phase est donnée par

$$A(x, y) = A_0 \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y - y_0) + A_0 e^{-i\phi_2} \quad (8.55)$$

ce qui conduit à

$$A(u, v) = T.F. \left[A_0 \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y - y_0) \right] + T.F. \left[A_0 e^{-i\phi_2} \right] \quad (8.56)$$

Après la lame de phase on a

$$A(u, v) = T.F. \left[A_0 \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y - y_0) \right] + e^{i\pi/2} \delta(u) \delta(v) T.F. \left[A_0 e^{-i\phi_2} \right] \quad (8.57)$$

ce qui montre que le second terme qui est constant et qui n'apparaît qu'au centre du plan de Fourier devient déphasé. Ce déphasage dans le plan de Fourier est équivalent à déphaser l'onde $A_0 e^{-i\phi_2}$ de $\pi/2$ (en effet $e^{i\pi/2}$ est une constante). On a alors

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + \dots) \quad (8.58)$$

$$\left[\left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) e^{i(\phi_2 + \pi/2)} + \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2} \right) e^{-i(\phi_2 + \pi/2)} \right] \text{rect}_b(y_0 - y') \quad (8.59)$$

$$+ \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2} \right) \left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) \text{rect}_b(y_0 - y') \quad (8.60)$$

soit

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + \dots) \quad (8.61)$$

$$\left[\left(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2} \right) e^{i(\phi_2 + \pi/2)} + \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2} \right) e^{-i(\phi_2 + \pi/2)} \right] \text{rect}_b(y_0 - y') \quad (8.62)$$

$$+ 2(1 - \cos(\phi_2 - \phi_1)) \text{rect}_b(y_0 - y') \quad (8.63)$$

Il s'ensuit que

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + 2 \cos(\phi_2 - \phi_1 - \pi/2) \text{rect}_b(y_0 - y')) + \quad (8.64)$$

$$2(1 - \cos(\phi_2 - \phi_1) \text{rect}_b(y_0 - y')) \quad (8.65)$$

Si l'on analyse l'ensemble de ces trois termes on voit que le dernier est négligeable par rapport aux précédents ce qui permet d'écrire que

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + 2 \cos(\phi_2 - \phi_1 - \pi/2) \text{rect}_b(y_0 - y')) \quad (8.66)$$

soit

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 (1 + 2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \text{rect}_b(y_0 - y')) \quad (8.67)$$

ou encore

$$I(x', y') = (A_0 \lambda^2 f^2 K^2)^2 \left(1 + \frac{4\pi(n-1)e}{\lambda} \text{rect}_b(y_0 - y')\right) \quad (8.68)$$

Le plan image est éclairé uniformément sauf à l'endroit de l'objet de phase où une surintensité apparaît. Par rapport au montage strioscopique on a un montage plus lumineux.

La méthode de contraste de phase est très appréciée des biologistes qui observent des objets transparents dont l'indice diffère de peu du milieu liquide dans lequel ils sont immergés.