

ÉLECTROMAGNÉTISME AVANCÉ

PHQ526

par

David SÉNÉCHAL

Ph.D., Professeur Titulaire

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$



UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté des sciences

Département de physique

30 mai 2018

Table des matières

1	Équations de Maxwell	7
A	Charge électrique	7
1.A.1	Forces et unités	7
1.A.2	Quantification de la charge électrique	9
1.A.3	Distributions de charge et de courant	10
B	Forces électrique et magnétique	12
C	Champs électrique et magnétique	14
D	Lois de Gauss et d'Ampère	17
E	L'induction électromagnétique	19
F	Les équations de Maxwell	21
2	Potentiels et énergie électromagnétiques	25
A	Les potentiels électromagnétiques	25
B	Particule chargée dans un champ électromagnétique	27
C	Théorème de Poynting	29
D	Potentiels retardés	30
2.D.1	Équation d'onde pour les potentiels	31
2.D.2	Fonction de Green pour l'équation de Helmholtz	32
2.D.3	Ondes électromagnétiques	34
E	Électrostatique des conducteurs	35
2.E.1	Loi d'Ohm	35
2.E.2	Distribution des charges dans un conducteur	36
2.E.3	Capacité	36
3	Dipôles électriques et magnétiques	41
A	Moment dipolaire électrique	42
B	Développement multipolaire	43
C	Moment quadripolaire électrique	44
D	Énergie d'une distribution de charge dans un potentiel externe	46
E	Moment dipolaire magnétique	47
F	Moment dipolaire magnétique et moment cinétique	50
G	Force et couple sur un moment dipolaire magnétique	51
4	Champs macroscopiques	57
A	Champs D , P , H et M	57
B	Conditions de continuité	60
C	Potentiel scalaire magnétique	61
4.C.1	Exemple : sphère avec aimantation uniforme.	62
D	Énergie électromagnétique	63

5 Ondes planes dans le vide et les diélectriques	67
A Ondes planes et représentation complexe	67
B Polarisation	70
C Densité et flux d'énergie d'une onde monochromatique	73
D Décomposition spectrale	74
E Lumière partiellement polarisée et paramètres de Stokes	77
6 Théorie de la constante diélectrique	83
A Polarisabilité	83
B Modèle de Drude	87
C Équation de Clausius-Mossoti	89
D Fréquence de plasma	90
E Plasma en champ magnétique : magnétosphère	93
F Dispersion dans les conducteurs	96
G Propagation dans un conducteur	99
7 Réflexion et réfraction	105
A Incidence normale	106
B Incidence oblique	108
C Angle de Brewster	111
D Coefficients de réflexion et transmission	112
E Réflexion totale interne	113
F Réflexion et réfraction sur les conducteurs	114
8 Propagation dans un diélectrique anisotrope	119
A Tenseur diélectrique et systèmes cristallins	119
B Surface des indices	122
C Vecteur radial et surface des rayons	125
D Polarisations	129
9 Guides d'ondes et cavités	135
A Équation de Helmholtz	136
B Réduction aux composantes longitudinales	137
C Modes TEM	139
D Modes TE et TM dans un guide conducteur creux	143
E Guide d'onde rectangulaire	144
F Guides d'ondes à section circulaire	148
9.F.1 Guide d'onde creux à section circulaire	148
9.F.2 Distribution du courant dans un fil conducteur	150
9.F.3 Fibre optique à saut d'indice	152
G Pertes d'énergie dans les guides d'onde à parois conductrices	157
H Cavités électromagnétiques	158
I Facteur de qualité	161
10 Rayonnement d'ondes électromagnétiques	167
A Rayonnement par une source monochromatique	167
B Rayonnement multipolaire	170
10.B.1 Rayonnement dipolaire électrique	170

10.B.2 Rayonnement dipolaire magnétique	172
10.B.3 Rayonnement quadripolaire électrique	173
C Antennes	175
10.C.1 Antenne linéaire	175
10.C.2 Résistance de rayonnement	178
10.C.3 Antennes réceptrices	178
10.C.4 Réseaux d'antennes	179
11 Diffraction	187
A Diffraction scalaire	188
11.A.1 Diffraction vectorielle	191
B Approximation de Fraunhofer	194
C Diffraction par une ouverture circulaire	196
D Principe de Babinet	199
E Formule de Stratton-Chu	200
12 Diffusion de la lumière	205
A Diffusion par un électron	206
B Théorie générale de la diffusion	211
C Facteur de forme	213
D Fluctuations de densité	214
13 Rayonnement par des charges ponctuelles	221
A Champs produits par une charge en mouvement	221
B Charge en mouvement uniforme	225
C Rayonnement non relativiste	226
D Cas où la vitesse est parallèle à l'accélération	227
E Cas d'une orbite circulaire	229
F Rayonnement synchrotron	231
14 Formulation relativiste	235
A Quadri-vecteurs en relativité restreinte	236
14.A.1 Tenseurs	238
14.A.2 Exemples d'invariants et de quadri-vecteurs	240
B Forme covariante des équations de Maxwell	242
14.B.1 Tenseur de Faraday	243
C Applications	246
14.C.1 Formule de Larmor relativiste	247
D Formulation lagrangienne	249
15 Annexes	257
A Formulaire	257
15.A.1 Notation indicielle	257
15.A.2 Formules d'analyse vectorielle	258
15.A.3 Conversion entre les systèmes SI et gaussien	261
B Théorème de Helmholtz	262
C Relations de Kramers-Krönig	263
D Polynômes de Legendre	265

Table des matières

E	Fonctions de Bessel	268
	15.E.1 Définitions	268
	15.E.2 Propriétés	269
	15.E.3 Fonctions de Bessel modifiées	271
F	Méthodes de solution de l'équation de Laplace	272
	15.F.1 Propriétés des fonctions harmoniques	272
	15.F.2 Séparation des variables	273
	15.F.3 Séparation des variables en coordonnées cartésiennes	274
	15.F.4 Séparation des variables en coordonnées sphériques	275
	15.F.5 Séparation des variables en coordonnées cylindriques	278
G	Vecteurs et tenseurs	280

CHAPITRE 1

Équations de Maxwell

L'objectif de ce chapitre est l'établissement des lois fondamentales de l'électromagnétisme – soit les équations de Maxwell – à partir des observations empiriques. Il s'agit donc d'un procédé inductif. Les chapitres suivants seront, par contraste, plus déductifs. On suppose ici que ces lois sont déjà connues ; ce chapitre est donc en bonne partie composé de rappels.

A Charge électrique

1.A.1 Forces et unités

Les phénomènes électriques sont connus depuis l'Antiquité. THALÈS de Milet, six siècles avant notre ère, savait que l'ambre¹ frotté pouvait attirer à lui de menus objets, comme des brindilles. Un mystère fascinant a toujours entouré cette capacité des corps électrisés à exercer une force à distance sur d'autres corps. Cependant, ce n'est qu'au 18e siècle, par une application de la méthode expérimentale, que les phénomènes électriques ont été réellement approfondis. On conçoit dès lors que la «vertu électrique» est un fluide qui peut s'écouler d'un corps à l'autre. Un corps *électrifié* peut transmettre ce fluide à un autre corps par contact direct. Il peut aussi attirer à lui des petits objets qui ne sont pas au préalable électrisés, mais qui le deviennent à son contact et qui sont par la suite violemment repoussés par lui. En 1729, Stephen GRAY distingue les corps *conducteurs*, qui peuvent transporter le fluide électrique d'un objet à l'autre, des corps *isolants*. Quelques années plus tard, Charles DU FAY propose le modèle dit des *deux fluides* : l'ambre frotté porte une électricité dite *résineuse*, alors que le verre frotté porte une électricité dite *vitrée*. Les deux fluides s'attirent l'un l'autre et se neutralisent lorsqu'ils entrent en contact. Par contre, deux corps portant des électricités du même type se repoussent. Benjamin FRANKLIN propose plus tard la théorie du *fluide unique* : il n'y a qu'un type d'électricité, qui est normalement en quantité équilibrée dans les corps. C'est son surplus dans un corps qui correspond à l'électricité vitrée (ou positive, selon Franklin) et son déficit qui correspond à l'électricité résineuse (ou négative). Le 18e siècle voit aussi l'invention du condensateur, alors appelé *bouteille de Leyde*, qui permet de stocker le fluide électrique pendant un certain temps.

1. *elektron*, en grec

La loi de Coulomb

À la fin du 18e siècle, l'influence de Newton pousse les savants à déterminer des lois quantitatives sur les forces exercées par les corps électrisés. C'est Charles COULOMB qui, en 1785, réalise le premier des expériences précises sur la grandeur de ces forces, à l'aide d'une balance à torsion de son invention. La loi de Coulomb stipule que la force mutuelle entre deux sphères électrisées décroît comme l'inverse du carré de la distance séparant les deux sphères, comme la force de gravité. De plus, cette force est proportionnelle à la quantité de fluide électrique sur chaque sphère, est attractive si les deux objets ont des charges de signes opposés, négative dans le cas contraire. Ainsi, la grandeur de cette force s'exprime ainsi :

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

où q_1 et q_2 dénotent la quantité de fluide électrique – la *charge électrique* – sur les objets 1 et 2 respectivement, alors que r est la distance séparant les deux objets et k_e est une constante. Cette affirmation suppose bien sûr une méthode qui permet d'ajouter à répétition à un objet une quantité fixe de fluide électrique, de manière à pouvoir quantifier le fluide électrique.

Forces sur des fils portant des courants

L'invention de la pile électrique par Volta a permis l'étude des courants électriques et l'électrolyse. Cette dernière a permis de mesurer un courant par la quantité de matière produite par électrolyse en un temps donné. Suite à la découverte de Oersted sur l'influence d'un courant électrique sur une boussole, André-Marie AMPÈRE a mis en évidence les forces mutuelles entre des fils conducteurs portant des courants électriques. Explicitement, deux fils conducteurs parallèles, séparés par une distance r , dans lesquels circulent des courants I_1 et I_2 subissent une force mutuelle proportionnelle au produit des courants, attractive si les courants sont parallèles et répulsive s'ils sont antiparallèles. La valeur de cette force est

$$F = k_m \frac{I_1 I_2 L_1 L_2}{r^2} \quad (1.2)$$

où $L_{1,2}$ sont les longueurs des deux fils (cette formule n'est en fait qu'approximative, valable seulement dans la limite $r \gg L_1, L_2$). La constante k_m est reliée à la constante de Coulomb k_e . Du simple point de vue des unités, le rapport k_e/k_m a les unités d'une vitesse au carré, et on posera

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2 \quad (1.3)$$

où c est une vitesse universelle et caractéristique des forces électromagnétiques, qui coïncide en fait avec la vitesse de la lumière. En principe, cette vitesse peut être mesurée par des moyens strictement électromagnétiques. En pratique, elle est maintenant une quantité définie :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (1.4)$$

(le mètre est défini par la seconde et par cette valeur de c).

Les unités de la charge électrique

Une formulation plus précise des lois de l'électromagnétisme requiert bien sûr la définition d'un système d'unités de mesure pour la quantité de charge électrique, et donc une définition de la constante

k_e figurant dans la loi de Coulomb (1.1), ou de la constante k_m figurant dans la formule (1.2). Le système international (SI) définit

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (1.5)$$

où par définition $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$, ce qui constitue en fait une définition de l'ampère.

Nous adopterons plutôt, dans ce cours, le système d'unités *gaussien*, ou *naturel*, dans lequel la constante k_e est l'unité. Dans ce système, l'unité de la charge électrique est dérivée des unités mécaniques de force et de distance. Traditionnellement, ce système est conjugué avec le système CGS (pour centimètre-gramme-seconde), dans lequel l'unité de force est le dyne (1 dyne = 1 gramme.cm/s² = 10⁻⁵ newton). Mais cette association du système naturel avec le système CGS n'est pas essentielle. L'unité de charge électrique, appelée statcoulomb, est définie comme la quantité de charge qui produit une force de 1 dyne lorsque les deux objets sont séparés de 1 cm. Ce système a le net avantage de ne pas introduire de quantités dimensionnées nouvelles, par le biais de constantes arbitraires comme μ_0 . Les unités dimensionnelles de la charge électrique sont simplement (ML³/T²)^{1/2}, où M désigne une masse, L une longueur et T un temps. Ce système est parfois désigné par l'acronyme esu (*electrostatic units*), qui désigne également le statcoulomb. Dans ce système, la formule (1.2) s'exprime comme

$$F = \frac{1}{c^2} \frac{I_1 I_2 L_1 L_2}{r^2} \quad (1.6)$$

L'annexe A explique comment convertir les unités gaussiennes en unités SI et vice-versa.

1.A.2 Quantification de la charge électrique

On sait, depuis les travaux de MILIKAN, que la charge électrique est quantifiée. Dans la compréhension actuelle des choses, chaque particule élémentaire possède une charge électrique bien définie, qui caractérise son interaction électromagnétique (voir le tableau 1.1). La charge d'un objet – macroscopique ou non – est simplement la somme algébrique des charges associées à chacune des particules qui le composent. La quantification de la charge électrique est expliquée dans le cadre des théories unifiées des interactions fondamentales, de façon semblable à la quantification du spin en mécanique quantique.²

En dépit de la quantification de la charge, on peut en pratique la considérer comme une quantité continue dans les corps macroscopiques, en raison du très grand nombre d'électrons qui peuvent passer d'un objet à un autre lors d'un contact. En pratique, les lois de l'électromagnétisme classique sont exprimées en toute généralité à l'aide de distributions continues de charge et de courant.

La charge électrique est une quantité strictement conservée lors des interactions fondamentales : les particules chargées peuvent changer de nature, mais la charge totale n'est pas modifiée. La conservation de la charge constitue l'une des symétries de base sur lesquelles se fonde notre compréhension de l'Univers.

L'équivalent magnétique de la charge électrique ne semble pas exister. La recherche des monopôles magnétiques (c'est-à-dire de particules hypothétiques comportant une charge purement magnétique) s'est toujours soldée par un résultat négatif. Ces recherches sont motivées par certaines théories

2. Signalons cependant que le détail de ces théories n'a pas jusqu'ici fait l'objet de confirmation expérimentale.

nom	charge ($\times e$)	composition
électron	-1	-
neutrino	0	-
quark u	$\frac{2}{3}$	-
quark d	$-\frac{1}{3}$	-
photon	0	-
proton	1	uud
neutron	0	udd

TABLE 1.1
Charges électriques de quelques particules importantes

d'unification des forces fondamentales qui prédisent l'existence de monopôles magnétiques et, plus anciennement, par la démonstration par Dirac que l'existence d'un seul monopôle magnétique dans l'univers suffirait à expliquer la quantification de la charge électrique.

1.A.3 Distributions de charge et de courant

Distribution de charge

On considère souvent des distributions continues de charge qu'on note $\rho(\mathbf{r})$. La charge contenue dans un élément de volume d^3r est alors égale à $dq = \rho(\mathbf{r})d^3r$. La densité ρ correspondant à une charge ponctuelle q située au point \mathbf{r}_0 s'écrit alors $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ où $\delta(\dots)$ est la fonction de Dirac. Notons qu'en coordonnées cartésiennes, cette notation signifie

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad (1.7)$$

Si on désire, dans le contexte de la physique classique, que la densité ρ soit une quantité continue, il faut évidemment se limiter à des échelles de distance suffisamment grandes pour que les fluctuations de la charge dans un élément de volume mésoscopique soient négligeables. Par *mésoscopique*, on entend une échelle de grandeur petite en comparaison des grandeurs macroscopiques, mais grande par rapport aux échelles atomiques. La fonction delta est une distribution et non une fonction continue, mais son utilisation permet d'appliquer le concept de densité de charge à des charges ponctuelles. L'utilisation d'une densité de charge ρ est donc parfaitement générale. Dans un contexte quantique, la notion de distribution de charge est incontournable, car une particule n'admet pas de position bien définie ; la densité de charge associée à un électron est $e|\psi|^2$, où ψ est la fonction d'onde associée.

Densité de courant

On définit la *densité de courant* \mathbf{J} comme la quantité de charge électrique qui s'écoule par unité de surface et par unité de temps. Autrement dit, étant donné un élément de surface infinitésimal $d\mathbf{a}$, la quantité de charge électrique qui traverse cet élément par unité de temps est $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$. Le *courant*

électrique traversant une surface S est le flux de la densité de courant à travers cette surface, c'est-à-dire la quantité de charge traversant la surface S par unité de temps :

$$I[S] = \int_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{J} \quad (1.8)$$

Équation de continuité

Considérons un volume quelconque V et sa surface ∂V . Le courant qui traverse la surface ∂V vers l'extérieur est égal à l'opposé de la dérivée de la charge totale incluse dans V , en vertu de la conservation de la charge électrique :

$$\oint_{\partial V} \mathbf{da} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

En appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche, on trouve

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

Ceci étant vrai pour tout volume V , les intégrands doivent être égaux et on en déduit l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

En général, cette équation relie la densité d'une quantité conservée à la densité de courant associée.

Si on considère le fluide électrique comme possédant une vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ à chaque endroit, alors la densité de courant est le produit de cette vitesse par la densité de charge :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (1.12)$$

Ceci se démontre assez simplement, en considérant un élément de surface $\mathbf{da} = \delta A \mathbf{n}$ (\mathbf{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à l'élément de surface). Le fluide qui traverse cet élément de surface en un temps δt occupe un volume $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$ et possède donc une charge électrique $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$. D'un autre côté, cette charge électrique doit être $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$, par définition de la densité de courant. On retrouve donc la relation $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$.

Dans le cas particulier d'un ensemble de N particules de charges q_i , se déplaçant à des vitesses \mathbf{v}_i et se trouvant à des positions \mathbf{r}_i , la densité de courant est donnée par³

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.13)$$

3. Notez que les unités de la densité de courant sont $[J] = Q/TL^2$, ce qui veut dire charge par unité de temps par unité de surface. Ceci est compatible avec les expressions $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ et (1.13), car les unités de la fonction delta $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ sont L^{-3} . En effet, la fonction delta est caractérisée par la relation $\int d^3r \delta(\mathbf{r}) = 1$; puisque la mesure d'intégration d^3r a les unités L^3 , la fonction delta doit compenser pour que le résultat soit sans unités.

B Forces électrique et magnétique

Dans le modèle newtonien, il est naturel de vouloir définir les forces d'origine électrique ou magnétique entre des particules chargées, à partir d'observations expérimentales, et ensuite de chercher à comprendre les phénomènes électrique et magnétique à partir de ces lois de force.

Force de Coulomb

Dans le cas de la force électrique, la loi de Coulomb (1.1) correspond parfaitement à ce que Newton avait en tête, en ce sens qu'une loi de force semble être correctement décrite par une formule simple qui fait intervenir les positions des deux particules en jeu. Dans le système gaussien et en notation vectorielle, cette loi s'exprime plus généralement ainsi :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.14)$$

Explications :

1. \mathbf{F}_{12} est la force exercée par la charge q_2 au point \mathbf{r}_2 sur q_1 au point \mathbf{r}_1 .
2. $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ est la distance entre les deux charges.
3. q_1, q_2 sont les charges électriques des deux particules.
4. $\hat{\mathbf{r}}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/r_{12}$ est le vecteur unité allant de q_2 vers q_1

Remarques :

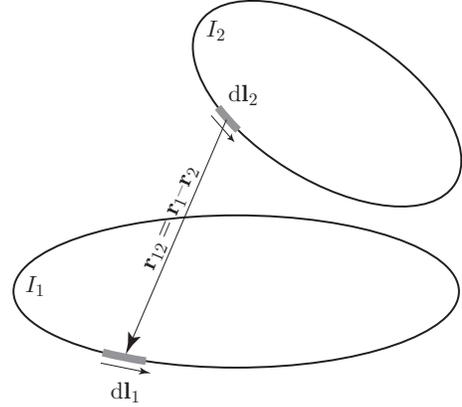
- ◆ La force est centrale.
- ◆ Elle est proportionnelle au produit des deux charges. Deux charges de même signe se repoussent, de signes opposés s'attirent.
- ◆ La force de Coulomb constitue une *interaction à deux corps*, ce qui signifie que (i) l'ajout d'une ou plusieurs particules à une paire de particules chargées ne modifie pas la force mutuelle entre ces deux particules, et que (ii) la force nette exercée sur une charge par un ensemble de charges est la somme vectorielle des forces de Coulomb exercées par chacune des charges :

$$\mathbf{F}_{\text{tot.}} = q_1 \sum_{i=2}^N \frac{q_i}{r_{1i}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1i} \quad (1.15)$$

ce qu'on appelle aussi le *principe de superposition*.

- ◆ La force de Coulomb est très semblable, dans sa formulation, à la force de gravité telle qu'exprimée par Newton. En particulier, elle varie en raison inverse du carré de la distance. On a vérifié expérimentalement une limite supérieure à une possible déviation par rapport à la loi en inverse du carré, en posant que la force se comportait comme $F \propto r^{-(2+\epsilon)}$ et en vérifiant que $\epsilon < 5.8 \times 10^{-16}$. Dans la théorie quantique de l'électromagnétisme, ceci équivaut à une limite supérieure sur la masse du photon : $m_\gamma < 4 \times 10^{-48} g \sim 10^{-15} m_e$.

FIGURE 1.1
Schéma explicatif de la loi de force magnétique entre deux circuits.



Forces magnétiques

Les travaux d'Ampère ont mis en évidence les forces mutuelles exercées par des fils portant des courants électriques. Ampère a montré toute l'analogie qui existe entre ces forces et celles qui s'exercent entre des aimants, ou entre des aimants et des fils porteurs de courants. Il a cherché à décrire les phénomènes magnétiques classiques impliquant des aimants par des systèmes ne comportant que des boucles de courant. La force magnétique (1.1) entre deux fils porteurs de courant peut être généralisée au cas de deux boucles de formes et de positions arbitraires, par la formule suivante, pour l'essentiel due à Ampère :

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.16)$$

où l'intégrale est prise le long des deux circuits fermés, dont les éléments sont situés à \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 respectivement (voir Fig. 1.1). Les différentielles $d\mathbf{l}_1$ et $d\mathbf{l}_2$ représentent des éléments directionnels de chacun des deux circuits. Remarquons que cette force magnétique ne reçoit de contribution que de la partie parallèle des éléments de circuits, en raison du produit scalaire $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$. Autrement dit, deux longs fils mutuellement perpendiculaires n'exerceraient pas de force nette l'un sur l'autre.

La formule ci-dessus est symétrique lors de l'échange des deux circuits ($1 \leftrightarrow 2$). Elle peut cependant être réécrite de manière asymétrique, en fonction d'un double produit vectoriel :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} \quad (1.17)$$

En effet, on vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} &= \frac{d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} - \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^2} \\ &= -d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla_1 (1/r_{12})) - \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Or, l'intégrale du premier terme s'annule le long du circuit 1, car $d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla_1 f$ n'est rien d'autre que la différentielle de la fonction f le long du circuit 1. En faisant un tour complet le long du circuit

1, la fonction f , qui ne dépend que de la position, revient à sa valeur de départ et l'intégrale de sa différentielle est donc nulle.

La force magnétique entre deux boucles de courant devrait, dans le modèle newtonien, provenir d'une force entre particules chargées en mouvement dans les fils. Cette force, manifestement, doit être proportionnelle à la vitesse des particules, mais la loi de force (1.17) ne permet pas de remonter avec certitude vers une loi de force exprimée purement en fonction de particules ponctuelles. En somme, une théorie définitive des forces électromagnétiques dans un schéma newtonien – c'est-à-dire formulée en fonction des positions et des vitesses des particules en jeu – n'a jamais été formulée, malgré de nombreux efforts (notamment par Weber (1846)).

C Champs électrique et magnétique

À partir de Faraday, et bien plus encore avec Maxwell, l'électromagnétisme a été formulé non pas en fonction de lois de forces entre des particules, mais en fonction des concepts de champs. Du temps de Faraday, la motivation pour agir ainsi était d'ordre méthodologique : une formulation sur la base de lois de forces ne se prêtait pas aux descriptions qualitatives et intuitives qu'affectionnait Faraday. Mais la raison physique capitale qui nous force à introduire les notions de champs électrique et magnétique est la vitesse finie de propagation des effets électromagnétiques. En effet, les forces électromagnétiques ne sont pas instantanées et donc une description exacte en fonction d'une action à distance semble tout simplement impossible. Ceci, bien sûr, n'était pas clair du temps de Faraday. Il s'agit ici d'une rupture radicale d'avec la vision mécanique newtonienne, en ce sens qu'un nouvel objet dynamique continu, le champ, est nécessaire à la description des phénomènes électromagnétiques.

Champ électrique

Dans cette nouvelle vision, une charge ponctuelle est la source d'un champ électrique \mathbf{E} qui s'étend sur tout l'espace. En retour, ce champ électrique exerce une force $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ sur toute particule chargée. La loi de Coulomb, en fonction du champ électrique, peut donc s'écrire ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.19)$$

où les sources du champ sont les particules de charges q_i de positions \mathbf{r}_i .

Pour une distribution de charge quelconque $\rho(\mathbf{r})$, la loi de Coulomb devient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.20)$$

Remarquons cependant que la loi de Coulomb n'est strictement valable que si les sources du champ sont au repos (électrostatique). Le traitement général de charges en mouvement doit tenir compte explicitement de la vitesse de propagation finie des effets électromagnétiques (voir chapitre 10).

Champ magnétique

De même, les charges en mouvement sont aussi la source d'un champ magnétique \mathbf{B} . La force magnétique entre deux circuits résulte de la création d'un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ par l'un des circuits, et de la force ressentie par les éléments de l'autre circuit en présence de ce champ. L'expression du champ magnétique causé par une boucle portant un courant I' est :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I'}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.21)$$

En retour, la force exercée par ce champ sur une autre boucle de courant I décrite par un élément $d\mathbf{l}(\mathbf{r})$ est

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

Remarques :

- ◆ La combinaison des expressions (1.21) et (1.22) redonne exactement l'expression (1.17) de la force mutuelle entre deux circuits.
- ◆ L'expression (1.21) constitue généralement ce qu'on appelle la loi de *Biot-Savart*, quoiqu'elle soit aussi l'oeuvre de Laplace, et que les travaux indépendants d'Ampère l'aient amené à un résultat équivalent, à savoir la loi de force (1.17).
- ◆ Il y a en principe plusieurs façons de «factoriser» la formule (1.17) et de l'exprimer en fonction d'une quantité intermédiaire (le champ magnétique). En particulier, la manière utilisée ici établit une convention sur les unités et le signe du champ magnétique. D'après ce choix, les unités du champ magnétique sont les mêmes que celles du champ électrique (dans le système CGS).
- ◆ La loi de Biot-Savart n'est strictement valable que pour une distribution de charge et de courants stationnaires (c'est-à-dire indépendants du temps). Le cas de courants variables doit tenir compte de la vitesse finie de propagation des effets électromagnétiques. Si la densité de charge est indépendante du temps, alors l'équation de continuité entraîne que la densité de courant est sans divergence ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$), ce qui signifie qu'elle n'a ni source ni drain.

Pour faire le lien entre une formule impliquant une boucle de courant et des particules ponctuelles, nous pouvons, en une première étape, effectuer la substitution suivante :

$$I \int_C d\mathbf{l}(\dots) \longrightarrow \int d^3r \mathbf{J}(\dots) \quad (1.23)$$

où \mathbf{J} est la densité de courant décrivant le mouvement des particules chargées dans le fil. Cette substitution se justifie en remarquant que l'élément de volume d^3r peut s'écrire comme $|\mathbf{dl}| dA$, où dA est la section du fil, et que le courant passant dans le fil n'est autre que $I = |\mathbf{J}| dA$, alors que la direction de l'élément du fil est la même que celle de la densité de courant (modulo le signe de I). Le champ magnétique créé par une distribution de courant arbitraire – mais stationnaire – est donc

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.24)$$

et la force exercée par un champ magnétique sur une distribution de courant arbitraire est

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

En une deuxième étape, en considérant que cette densité provient du mouvement de particules ponctuelles de charges q_i , de vitesses \mathbf{v}_i et de positions \mathbf{r}_i , elle doit s'exprimer comme

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.26)$$

La force magnétique exercée sur un ensemble de particules en mouvement est donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{c} \sum_i \int d^3r q_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{c} \sum_i q_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (1.27)$$

On est donc mené à la conclusion simple que la force magnétique exercée sur une seule particule par un champ magnétique est⁴

$$\mathbf{F} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \quad (1.28)$$

Au total, la force électromagnétique exercée sur une particule chargée est donnée par la formule de LORENTZ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \quad (1.29)$$

4. Cette conclusion n'est pas absolument évidente, car la loi de force d'Ampère n'est valable que pour des courants stationnaires, alors qu'une seule particule en mouvement ne peut pas constituer un courant stationnaire. Disons simplement qu'il s'agit d'une hypothèse plausible, confirmée par l'expérience et renforcée par une compréhension théorique plus avancée résultant de la théorie de la relativité. C'est pourquoi il a fallu attendre Lorentz pour la formuler.

D Lois de Gauss et d'Ampère

Les relations (1.20) et (1.24) expriment la relation existant entre une distribution de charge et de courant stationnaires et les champs électromagnétiques. Cette relation peut aussi s'exprimer de manière locale, c'est-à-dire sans faire intervenir d'intégrale sur toute la distribution. Elle prend alors la forme d'équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array} \quad (1.30)$$

Démontrons maintenant ces relations à partir des relations (1.20) et (1.24). Nous devons pour cela utiliser la relation suivante :

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (1.31)$$

Une application de la formule (15.33) montre que $\nabla^2(1/r) = 0$ partout sauf à l'origine, où l'application de (15.33) est non définie. Par contre, en intégrant l'équation ci-haut à l'intérieur d'une sphère S de rayon R centrée à l'origine, et en utilisant le théorème de la divergence, on trouve

$$\int_S d^3r \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \oint_{\partial S} d\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \quad (1.32)$$

ce qui démontre la présence (et le coefficient) de la fonction delta. Par un changement d'origine $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, on montre ensuite que

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.33)$$

La relation (1.20) peut alors s'écrire comme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.34)$$

Comme le rotationnel d'un gradient est nul, on voit que $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$. Calculons maintenant la divergence de l'expression (1.20) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= - \int d^3r' \nabla^2 \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= 4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 4\pi\rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Cette dernière relation constitue la *loi de Gauss*, en tout point équivalente à la loi de Coulomb.

Chapitre 1. Équations de Maxwell

Passons maintenant au champ magnétique. La non-existence des monopôles magnétiques signifie que le champ \mathbf{B} n'a ni source, ni drain. L'équivalent magnétique de la loi de Gauss est donc $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Quant à la loi de Biot-Savart (1.24), nous allons démontrer qu'elle est équivalente à la relation

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.36)$$

qu'on appelle la *loi d'Ampère*, à condition bien sûr que la distribution de courant respecte la condition $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Nous devons donc calculer

$$\frac{1}{c} \nabla \wedge \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{1}{c} \nabla \wedge \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.37)$$

Il est plus facile de traiter cette expression en notation indicielle ; elle devient

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \partial_j \int d^3 r' \varepsilon_{krs} J_r(\mathbf{r}') \partial_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & = -\frac{1}{c} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) \int d^3 r' J_r(\mathbf{r}') \partial_j \partial_s \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & = -\frac{1}{c} \int d^3 r' J_i(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{c} \int d^3 r' J_j(\mathbf{r}') \partial_j \partial_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Le deuxième terme s'annule. En effet, les dérivées $\partial_j \partial_i$ peuvent être prises par rapport à \mathbf{r}' au lieu de \mathbf{r} car elles s'appliquent à une expression qui ne dépend que de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Ensuite, on peut procéder à une intégration par parties et obtenir l'expression suivante :

$$-\frac{1}{c} \int d^3 r' \partial'_j J_j(\mathbf{r}') \partial'_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.39)$$

Mais ceci s'annule, car $\partial'_j J_j(\mathbf{r}') = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, par hypothèse. Le premier terme, lui, se simplifie si on utilise la relation (1.33) :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{c} \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.40)$$

et nous retrouvons la loi d'Ampère.

Nous avons donc démontré les quatre équations (1.30) à partir des formules classiques de Coulomb et de Biot-Savart.

E L'induction électromagnétique

Les lois de l'électromagnétisme s'appliquant aux cas de distributions de charge et de courants stationnaires sont données en (1.30). Ces relations sont équivalentes aux lois de Coulomb et de Biot-Savart et sont compatibles avec les observations et expériences réalisées jusque vers 1830, principalement par Ampère. Dans les années 1820, ayant réalisé qu'un courant exerce une force sur un aimant, force qui «circule» autour du fil portant le courant, on cherchait à mettre en évidence une influence réciproque : la génération d'un courant électrique par le mouvement d'un aimant. C'est Michael FARADAY qui découvre l'effet en 1831, et lui donne le nom d'*induction électromagnétique* : un champ électrique peut être produit, ou induit, par une variation dans le temps du champ magnétique. Cet effet est subtil, car il est transitoire : c'est la variation dans le temps du champ magnétique, obtenu par exemple par le déplacement d'un aimant par rapport à une bobine, qui cause un courant. Dès que le mouvement s'arrête, le courant disparaît.

Définissons d'abord la *force électromotrice* (f.é.m.) V d'un circuit fermé C comme étant la circulation du champ électrique autour de ce circuit :

$$V = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \quad (1.41)$$

Dans les situations stationnaires, la force électromotrice le long d'un circuit fermé est nulle puisque le champ électrique est alors irrotationnel.⁵ Dans les situations où les courants dépendent du temps, la découverte de Faraday est que la force électromotrice d'un circuit fermé est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps du *flux magnétique* passant à travers la boucle du circuit.

Le flux magnétique à travers une surface S est évidemment défini comme

$$\Phi_B[S] = \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \quad (1.42)$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ce flux ne dépend pas de la forme précise de la surface, mais uniquement du contour ∂S qui lui sert de frontière. En effet, comme le champ \mathbf{B} est dépourvu de sources ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), le flux net à travers une surface fermée est nul, et la différence de flux entre deux surfaces ouvertes qui partagent la même frontière est précisément le flux net sortant de la surface fermée formée par l'union des deux surfaces ouvertes. Dit autrement, la condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ entraîne que \mathbf{B} peut être écrit comme le rotationnel d'un autre vecteur : $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ (\mathbf{A} est appelé potentiel vecteur ; voir chapitre suivant). En utilisant le théorème de Stokes pour \mathbf{B} , le flux magnétique peut alors être exprimé comme la circulation du vecteur \mathbf{A} le long de la frontière de la surface S :

$$\Phi_B[S] = \int_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \quad (1.43)$$

La loi empirique de Faraday, ou *loi de l'induction*, stipule qu'une variation dans le temps du flux magnétique passant à travers une boucle induit une force électromotrice le long de cette boucle. Plus

5. On parle souvent de la force électromotrice d'une source de courant, par exemple d'une pile. Il s'agit alors du travail par unité de charge accompli par le champ électrique le long d'un circuit allant du pôle positif au pôle négatif de la pile. Un tel circuit n'est pas fermé ; pour le fermer, il faut parcourir l'intérieur de la pile, du pôle négatif au positif. Le travail total est alors nul, dans une situation stationnaire.

précisément, la f.é.m. induite est proportionnelle à la dérivée du flux magnétique, et peut s'écrire ainsi :

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{B} \quad (1.44)$$

En utilisant le théorème de Stokes pour \mathbf{E} , on peut écrire cette loi sous forme différentielle :⁶

$$\int_S \mathbf{da} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \int_S \mathbf{da} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \boxed{\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (1.45)$$

Bien entendu, cette loi s'applique qu'il y ait ou non un circuit conducteur le long de la courbe fermée ∂S . Elle suppose aussi que la courbe ∂S est immobile. Si cette courbe coïncide avec un circuit physique et que celui-ci se déplace, une contribution supplémentaire à la force électromotrice proviendra de la force de Lorentz ressentie par les charges libres du conducteur en mouvement dans un champ magnétique.

Remarquons que si le contour sur lequel la f.é.m. est calculée correspond à un circuit physique, la variation du champ magnétique tend à produire une f.é.m. qui à son tour cause un courant dont l'effet est de s'opposer, par le champ magnétique qu'il produit, à la variation du flux magnétique. Ce principe compensateur s'appelle la *loi de Lenz*. Quoiqu'un champ magnétique ne puisse produire un travail sur un ensemble de particules chargées (la force de Lorentz étant perpendiculaire à la vitesse), la variation dans le temps du champ magnétique peut induire un champ électrique qui, lui, peut produire un travail.

6. La constante $1/c$ qui apparaît dans la loi de Faraday est évidemment nécessaire pour que les unités soient cohérentes. On peut cependant se demander : pourquoi $1/c$ et non pas λ/c , où λ est une constante sans unités ? La raison est qu'un tel multiplicateur violerait l'invariance de Lorentz. C'est donc une symétrie fondamentale qui est en jeu ici. En particulier, si $\lambda \neq 1$, la vitesse des ondes électromagnétiques ne serait pas égale à c ...

F Les équations de Maxwell

Rien n'indique que la loi de Gauss ou que la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ doivent être modifiées dans des situations dépendantes du temps. Par contre, la loi d'Ampère doit être modifiée, car elle a été établie à partir de la loi de Biot-Savart, en supposant que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. En fait, en prenant la divergence de la loi d'Ampère, on est forcé d'admettre que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ puisque la divergence d'un rotationnel s'annule. Ceci ne peut plus être le cas quand ρ dépend du temps, en vertu de l'équation de continuité (1.11). Par contre, l'expression

$$\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.46)$$

a toujours une divergence nulle, en vertu de la loi de Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \right) = 0 \quad (1.47)$$

Cette expression pourrait généraliser le courant dans la loi d'Ampère. Le deuxième terme s'appelle *courant de déplacement*. Cette modification a été apportée par Maxwell. On écrit alors la loi d'Ampère comme suit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.48)$$

Comme illustration, considérons un circuit comprenant un condensateur qui se charge et une surface S passant précisément entre les plaques, c'est-à-dire non traversée par le circuit. Il n'y a aucun courant de charge à travers la surface S , même si la circulation de \mathbf{B} est visiblement non nulle le long de ∂S . C'est le courant de déplacement, lié à l'augmentation de \mathbf{E} entre les plaques en fonction du temps, qui contribue, par la loi d'Ampère, à la circulation de \mathbf{B} .

La loi d'Ampère modifiée permet de compléter le tableau des lois de l'électromagnétisme (1.30) en le généralisant au cas de situations non stationnaires, autrement dit de l'électrodynamique :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (b) \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & (c) \\ \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} & (d) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ce sont les célèbres *équations de Maxwell*.

Remarques :

- ◆ Il s'agit d'un ensemble de 8 équations du premier ordre, couplées, pour les 6 quantités \mathbf{E} et \mathbf{B} .
- ◆ L'équation de continuité (1.11) est une conséquence des équations de Maxwell.

- ◆ dans le vide ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$), il y a une symétrie, dite de *dualité*, lorsqu'on échange les rôles des champs électrique et magnétique :

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \quad (1.50)$$

Toute solution des équations de Maxwell dans le vide doit refléter cette symétrie.

Forme intégrale des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell peuvent aussi être exprimées sous forme intégrale, à l'aide du théorème de la divergence et du théorème de Stokes. Si S est une surface orientée, nous désignerons par ∂S sa frontière (également orientée). Désignons par $\Phi_E[S]$ (flux électrique), $\Phi_B[S]$ (flux magnétique) et $I[S]$ (courant électrique) les flux des vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{J} à travers cette surface, c'est-à-dire les intégrales

$$\Phi_E[S] = \int_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{E} \quad \Phi_B[S] = \int_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{B} \quad I[S] = \int_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{J} \quad (1.51)$$

D'autre part, désignons par $C_E[\partial S]$ et $C_B[\partial S]$ les circulations des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} le long de la frontière ∂S de cette surface. Dans cette notation, les équations de Maxwell sous forme intégrale sont

$$\begin{aligned} \Phi_E[S] &= 4\pi Q_{\text{tot}} & (a) \\ \Phi_B[S] &= 0 & (b) \\ C_E[\partial S] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_B[S]}{\partial t} & (c) \\ C_B[\partial S] &= \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_E[S]}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} I_{\text{tot}}[S] & (d) \end{aligned} \quad (1.52)$$

où, dans la première équation, Q_{tot} est la charge totale contenue à l'intérieur de la surface fermée S . La surface S est fermée dans les deux premières équations, ouverte dans les deux dernières.

Remarque

Nous avons établi les équations de Maxwell (1.49) par une sorte de raisonnement inductif, en partant des lois de force électrique et magnétique dans le cas stationnaire, de la loi d'induction de Faraday et d'un certain nombre d'hypothèses plausibles. Nous aurions pu procéder différemment, par exemple de manière beaucoup plus déductive, en partant d'hypothèses basées sur l'invariance de Lorentz et le principe de moindre action.⁷ La voie que nous avons suivie est cependant plus proche de l'expérience pratique et du développement historique. Ceci dit, effectuons maintenant un changement de cap, et adoptons les équations (1.49) comme un nouveau point de départ, dans une approche dorénavant plus déductive.

7. Voir à cet effet LANDAU et LIFCHITZ, *Théorie du champ*.

Problèmes

Problème 1.1

Soit une particule ponctuelle de charge q ayant une trajectoire $\mathbf{r}(t)$. La densité de courant et la densité de charge associées sont $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ et $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$. Démontrez explicitement que l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ est satisfaite.

Problème 1.2

Considérez l'expression $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ pour la densité de courant. Démontrez explicitement que l'équation de continuité est satisfaite pour cette expression. Considérez pour cela une région V , délimitée par une surface S . Si on suit le flot déterminé par la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, cette région est transportée en un temps δt en une autre région V' (de volume généralement différent). La charge totale à l'intérieur de cette région doit être inchangée. Le concept d'élément de volume en co-mouvement avec \mathbf{v} est ici utile.

Problème 1.3

Un disque de rayon a porte une densité superficielle de charge constante ρ_s . L'axe des z est perpendiculaire à ce disque et passe par son centre. Calculez le potentiel électrique $\Phi(z)$ le long de l'axe des z . Calculez le champ électrique \mathbf{E} dans les deux limites $z \gg a$ et $z \ll a$ et montrez que les résultats obtenus sont ceux auxquels on doit s'attendre respectivement d'une charge ponctuelle et d'un plan infini.

Problème 1.4

Le champ électrique d'une charge ponctuelle e située à l'origine est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.53)$$

Montrez que la transformée de Fourier $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$ de ce champ est

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = -4\pi i \frac{e}{k^2} \mathbf{k} \quad (1.54)$$

Note : il y a deux façons de résoudre ce problème. La première procède par calcul direct de la transformée de Fourier. Dans ce cas, il faut bien calculer toutes les composantes vectorielles de la transformée de Fourier, et toutes les intégrales sont simples et faisables par parties quand elles sont non nulles. L'autre méthode, à la fois plus simple et plus subtile, demande que l'on parte non pas de l'expression pour $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, mais de la loi de Gauss avec la densité de charge ρ appropriée (une fonction delta), en utilisant la représentation en transformée de Fourier de la fonction delta. Vous pouvez utiliser la méthode de votre choix.

Problème 1.5

Une boucle circulaire de rayon a porte un courant I . Calculez le champ magnétique partout le long de l'axe de la boucle.

Problème 1.6

Un solénoïde cylindrique de rayon a et de longueur L comporte n tours par unité de longueur et porte un courant I . On suppose que $L \gg a$, c.-à-d. que le solénoïde est très étroit. Calculez \mathbf{B} et \mathbf{A} à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, en restant toutefois proche de celui-ci (de sorte que le solénoïde apparait infini).

Problème 1.7

Une coquille sphérique mince de rayon a fait d'un matériau conducteur est en rotation autour de l'axe z avec une vitesse angulaire ω . Cette coquille est placée dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}$. Calculez la force électromotrice induite entre le pôle nord et l'équateur de la coquille.

Problème 1.8

Quelles raisons ont motivé les corporations distribuant de l'énergie électrique à adopter le système de courant alternatif, par opposition à celui de courant continu défendu par Edison ? Pourquoi le courant est-il triphasé ?

Problème 1.9

Considérez une boucle C dans laquelle circule un courant I , qu'on déplace de manière rigide avec une vitesse \mathbf{v} dans un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. En considérant la force de Lorentz agissant sur la charge en mouvement dans chaque élément de circuit, démontrez que la f.é.m. causée par ce mouvement est donnée par

$$V = \frac{1}{c} \oint_C d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (1.55)$$

Cette force électromotrice est également présente dans le référentiel qui se déplace avec la boucle. À quoi serait alors due cette f.é.m., alors que la vitesse de la boucle est nulle dans ce référentiel ?

CHAPITRE 2

Potentiels et énergie électromagnétiques

Dans ce chapitre on explique comment les champs électromagnétiques peuvent être dérivés de potentiels et quel rôle ces potentiels jouent dans la description de l'interaction des particules chargées avec le champ électromagnétique. On démontre ensuite le théorème de Poynting sur la densité et le flux d'énergie associés au champ électromagnétique. On termine avec une solution générale des équations de Maxwell dans le vide, en fonction des potentiels.

A Les potentiels électromagnétiques

Les lois (1.49b) et (1.49c) nous permettent d'exprimer les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} en fonction du *potentiel électrique* Φ et du *potentiel vecteur* \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (2.1)$$

Rappelons ici comment une telle représentation est possible. D'après le *théorème de Helmholtz* (voir l'annexe B), la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ entraîne l'existence d'un champ vectoriel \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Ensuite, la loi de Faraday s'écrit

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.2)$$

et donc, toujours d'après le théorème de Helmholtz, la quantité entre accolades est le gradient d'une fonction Φ , d'où la représentation (2.1).

À une configuration donnée des potentiels Φ et \mathbf{A} correspondent des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} bien précis, mais l'inverse n'est pas vrai. On peut toujours effectuer une *transformation de jauge* :

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \xi \quad (2.3)$$

où $\xi(\mathbf{r}, t)$ est une fonction quelconque de la position et du temps, sans affecter les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} .

jauge de Coulomb

Cet arbitraire dans les potentiels nous permet de leur imposer des conditions particulières appelées *jauges*. Par exemple, on utilise souvent la *jauge de Coulomb*, ou *jauge transverse*, définie par la condition

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.4)$$

(le nom de *jauge transverse* vient de ce que le champ \mathbf{A} est alors transverse, au sens expliqué dans l'annexe B). Il est simple de démontrer que ce choix est toujours possible. Soit \mathbf{A} un potentiel vecteur dont la divergence est non nulle, et \mathbf{A}' le nouveau potentiel vecteur obtenu à l'aide de la transformation (2.3), tel que $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Cette condition se traduit donc par une contrainte sur ξ :

$$\nabla^2 \xi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.5)$$

où ξ joue le rôle d'une fonction inconnue et $\nabla \cdot \mathbf{A}$ celui d'une fonction connue. Il s'agit de l'équation de Poisson, dont la solution générale nous est connue (voir aussi l'annexe B) :

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.6)$$

Nous avons donc démontré par construction que la fonction ξ existe et donc qu'il est possible, par une transformation de jauge, de s'assurer que le potentiel vecteur respecte la condition (2.4).

jauge de Lorenz

On utilise principalement la *jauge de Lorenz* :¹

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

La démonstration que cette condition peut toujours être satisfaite par une transformation de jauge est essentiellement la même que pour la jauge de Coulomb.

1. Ne pas confondre avec H.A. Lorentz, l'un des pères de la relativité restreinte.

B Particule chargée dans un champ électromagnétique

Dans cette section on montre comment décrire l'interaction d'une particule chargée avec le champ électromagnétique dans les formalismes lagrangien et hamiltonien. La force de Lorentz (1.29) peut être incorporée dans le formalisme lagrangien de la mécanique, à l'aide d'un lagrangien L qui dépend de la vitesse :

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\Phi(\mathbf{r}) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Pour établir que ce lagrangien est bien adéquat, il suffit de démontrer que les équations de Lagrange coïncident avec la formule (1.29) ci-haut. Les équations de Lagrange sont

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \\ &= \frac{d}{dt} \left[m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) \\ &= m\mathbf{a} + \frac{q}{c}\partial_i\mathbf{A} \frac{dx_i}{dt} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Remarquons que

$$\partial_i A v_i - \nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) = -\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (2.10)$$

La force de Lorentz (1.29) s'ensuit immédiatement.

Passons maintenant au hamiltonien. Le moment conjugué \mathbf{p} est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Le hamiltonien est alors

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \\ &= m\mathbf{v}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\Phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On constate qu'il s'agit simplement de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle électrique : le potentiel vecteur ne contribue pas à l'énergie. Ceci est normal, car la force magnétique étant toujours perpendiculaire à la vitesse, elle ne peut modifier l'énergie cinétique de la particule. Cependant, le hamiltonien doit être exprimé en fonction de \mathbf{p} et non de \mathbf{v} . On écrit donc

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + q\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

Couplage minimal

En mécanique quantique, ce hamiltonien peut être utilisé tel quel, sauf que \mathbf{p} devient l'opérateur différentiel $-i\hbar\nabla$. L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ est alors

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \psi + q\Phi(\mathbf{r}, t)\psi \quad (2.14)$$

Chapitre 2. Potentiels et énergie électromagnétiques

Une question se pose immédiatement : étant donné que ce sont les potentiels qui apparaissent dans ce hamiltonien et non les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , est-ce que l'équation de Schrödinger est affectée par les transformations de jauge ? La réponse à cette question est non, mais à condition que la fonction d'onde, elle, le soit. En effet, étendons la définition d'une transformation de jauge en incluant une multiplication de la fonction d'onde ψ par une phase :

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \xi \\ \psi &\rightarrow e^{iq\xi/\hbar c} \psi\end{aligned}\tag{2.15}$$

On démontre ensuite que l'équation de Schrödinger n'est pas affectée par cette transformation, autrement dit, qu'elle est *invariante de jauge*. Pour démontrer ce fait plus aisément, il est commode de définir les opérateurs différentiels suivants, qu'on appelle *dérivées covariantes* :

$$\begin{aligned}D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \Phi \\ \mathcal{D} &= \nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}\end{aligned}\tag{2.16}$$

En fonction de ces opérateurs différentiels, l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$i\hbar D_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{D}^2 \psi\tag{2.17}$$

La propriété principale des dérivées covariantes est la *covariance* sous transformation de jauge, c'est-à-dire que, lors d'une transformation de jauge, les dérivées covariantes sont modifiées par un simple facteur de phase local :

$$D_t \psi \rightarrow e^{iq\xi/\hbar c} D_t \psi \quad \mathcal{D} \psi \rightarrow e^{iq\xi/\hbar c} \mathcal{D} \psi\tag{2.18}$$

Il est alors manifeste que l'équation de Schrödinger est invariante lors des transformations de jauge. Le fait crucial ici est que la phase qui multiplie ψ dépend de \mathbf{r} et de t . On sait qu'en mécanique quantique la fonction d'onde peut être multipliée par une phase *globale* sans en modifier le sens physique. On apprend ici que la fonction d'onde d'une particule chargée peut être multipliée par une phase *locale* sans non plus modifier son sens physique, pourvu que cette multiplication s'accompagne d'un changement des potentiels électromagnétiques, tel qu'en l'éq. (2.15). Le fait de pouvoir transformer une invariance globale en invariance locale grâce à la présence de potentiels scalaire et vecteur est à la base des *théories de jauge* qui décrivent les interactions forte (QCD), faible et électromagnétique.

C Théorème de Poynting

Dans cette section on démontre le *théorème de Poynting*, qui stipule que la densité d'énergie du champ électromagnétique est donnée par l'expression

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (2.19)$$

alors que le flux d'énergie (le courant associé à la densité \mathcal{E}) est donné par le *vecteur de Poynting* :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (2.20)$$

Le vecteur \mathbf{S} représente la quantité d'énergie passant par unité de temps et de surface à travers un élément de surface perpendiculaire à \mathbf{S} .

Pour démontrer ce théorème, considérons premièrement le travail effectué sur les charges et les courants d'un système fermé. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique des particules matérielles chargées (c'est-à-dire la puissance) est

$$\frac{dK}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (2.21)$$

Cette relation se démontre en considérant la forme explicite de la densité de courant pour des particules ponctuelles. On trouve

$$\int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i \quad (2.22)$$

où \mathbf{F}_i est la force de Lorentz agissant sur la particule i . La force magnétique est orthogonale à la vitesse et donc n'effectue aucun travail sur les charges en mouvement.

Substituons pour \mathbf{J} son expression tirée de la loi d'Ampère :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \left(\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \quad (2.23)$$

Utilisons ensuite la relation suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} \quad (2.24)$$

où nous avons utilisé la loi de Faraday dans la dernière équation. En substituant pour $\mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{B}$, on trouve

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (2.25)$$

Le dernier terme peut être transformé en intégrale de surface et le premier terme peut s'écrire comme une dérivée. On trouve finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ K + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) \right\} = - \oint_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{S} \quad (2.26)$$

où la surface S délimite le volume V . Il s'agit de l'expression de la conservation de l'énergie : la variation d'énergie totale (énergie cinétique plus énergie du champ) à l'intérieur du volume V se reflète exactement par le flux d'énergie qui sort du volume V , à travers la surface S . Notons que le théorème de Poynting peut aussi s'écrire de façon différentielle :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (2.27)$$

Le vecteur de Poynting n'est pas seulement égal au flux d'énergie du champ : il est aussi proportionnel à la *densité d'impulsion* associée au champ électromagnétique. On montre que cette densité d'impulsion, dans le vide, est précisément donnée par \mathbf{S}/c^2 .

D Potentiels retardés

Dans cette section, on montre que la solution générale des équations de Maxwell peut être obtenue en principe par la formule suivante, dite des *potentiels retardés* :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ceci constitue une solution générale des équations de Maxwell dans le sens que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} peuvent être dérivés des potentiels et que les sources ρ et \mathbf{J} sont quelconques, et représente la totalité des sources présentes. On qualifie cette forme des potentiels de *retardée*, car le temps d'évaluation des sources ρ et \mathbf{J} n'est pas le temps d'observation t , mais un temps antérieur t' , tel que la différence $t - t'$ est précisément le temps requis par un signal lumineux pour aller de \mathbf{r}' à \mathbf{r} . Cette formule, qui est une conséquence immédiate des équations de Maxwell, obéit donc naturellement au principe d'une vitesse finie de propagation des effets physiques, essentiel dans la théorie de la relativité.

2.D.1 Équation d'onde pour les potentiels

Nous allons premièrement démontrer que les potentiels, dans le cas où la jauge de Lorenz (2.7) est imposée, obéissent à l'équation d'onde non homogène :

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\end{aligned}\quad (2.29)$$

Pour ce faire, il suffit de substituer dans les équations de Maxwell l'expression des champs électromagnétiques en fonction des potentiels :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A} \quad (2.30)$$

La loi de Faraday et la relation $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ sont automatiquement satisfaites. La loi de Gauss et la loi d'Ampère prennent ensuite la forme suivante :

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\cdot\mathbf{A} &= -4\pi\rho \\ \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\end{aligned}\quad (2.31)$$

où on s'est servi de l'identité

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \quad (2.32)$$

Imposons maintenant, comme c'est notre droit, la jauge de Lorenz (2.7). On voit alors immédiatement que les équations (2.31) prennent la forme (2.29) lorsque la condition (2.7) est substituée.

Il s'agit maintenant de trouver une solution générale aux équations (2.29). Commençons par l'écrire de manière plus générale, en fonction d'une amplitude $\psi(\mathbf{r}, t)$ pouvant signifier Φ ou toute composante de \mathbf{A} :

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\xi(\mathbf{r}, t) \quad (2.33)$$

où $\xi(\mathbf{r}, t)$ est une fonction quelconque de l'espace et du temps. Afin de nous débarrasser de l'aspect temporel de cette équation, nous considérons les transformées de Fourier

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad \xi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.34)$$

En substituant dans l'équation d'onde non homogène, on trouve directement :

$$\boxed{\nabla^2\tilde{\psi} + k^2\tilde{\psi} = -\tilde{\xi}(\mathbf{r})} \quad (2.35)$$

où k est ici défini comme ω/c . Il s'agit de l'équation différentielle de Helmholtz. On obtient le même résultat lorsqu'on suppose d'emblée que la source ξ et l'onde ψ oscillent à une fréquence ω bien déterminée. Nous allons résoudre de manière générale l'équation de Helmholtz par la méthode de la fonction de Green.

Notons d'abord que, comme toute équation linéaire non homogène, l'équation (2.29) a comme solution la solution générale à l'équation homogène (i.e. obtenue en posant $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$), plus une solution particulière à l'équation non homogène. La solution donnée en (2.28) ne tient pas compte de la solution générale à l'équation homogène, qui est essentiellement supposée nulle. Dans ce qui suit, nous nous attardons à construire une solution particulière de l'équation non homogène qui respecte la condition physique de causalité.

2.D.2 Fonction de Green pour l'équation de Helmholtz

On définit la *fonction de Green* $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de l'équation de Helmholtz comme étant sa solution pour une source ponctuelle située à \mathbf{r}' :

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.36)$$

La solution précise de cette équation – et donc la forme précise de la fonction G – dépend des conditions aux limites imposées au problème. La fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ possède deux arguments : le point d'observation \mathbf{r} et le point de source \mathbf{r}' . L'interprétation physique de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est l'amplitude, au point \mathbf{r} , de l'onde créée par une source monochromatique située au point \mathbf{r}' .

Si la fonction de Green est connue, alors on peut écrire la solution générale à l'équation de Helmholtz (2.35) en utilisant le principe de superposition :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.37)$$

En effet, en appliquant l'opérateur $\nabla^2 + k^2$ à cette expression, on trouve

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) &= \int d^3r' (\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= - \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= -\tilde{\xi}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.38)$$

ce qui est bien l'équation (2.35).

Trouvons maintenant la fonction de Green dans le cas du rayonnement d'une onde dans l'espace infini, en l'absence d'obstacle. Dans ce cas, l'invariance par translation fait que la fonction $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ne dépend que de la position relative $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ du point d'observation par rapport à la source et l'invariance par rotation fait que G ne dépend que de la distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ entre le point d'observation et la source. Pour trouver la forme précise de la fonction $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, plaçons la source à l'origine ($\mathbf{r}' = 0$) et utilisons les coordonnées sphériques. Comme G ne dépend pas des angles, on trouve

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG) + k^2G = -\delta(\mathbf{r}) \quad (2.39)$$

Si $r \neq 0$, cette équation est homogène (c'est-à-dire le membre de droite s'annule) et sa solution est

$$A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.40)$$

où A et B sont des constantes. Si on ajoute à cette solution la dépendance temporelle, qui se traduit par un facteur oscillant $e^{-i\omega t}$, on constate que le premier terme représente une onde *sortante*, c'est-à-dire qui s'éloigne de la source, alors que le deuxième terme représente une onde *rentrante*. Le bon sens commande donc de rejeter le deuxième terme : les conditions aux limites du rayonnement sont justement que l'onde s'éloigne de la source et non qu'elle s'en approche.

Jusqu'ici, la fonction delta n'a joué aucun rôle. En fait, elle fixe la normalisation de G: la constante A. On peut déterminer cette constante en demandant que la fonction de Green prenne la valeur statique bien connue $1/4\pi r$ dans la limite $k \rightarrow 0$. On trouve ainsi $A = 1/4\pi$. Une démonstration plus complète de la valeur de A consiste à intégrer l'équation (2.36) à l'intérieur d'une sphère de rayon infinitésimal a centrée à l'origine. La solution trouvée ci-haut devient alors $G \rightarrow A/r$, car $kr \rightarrow 0$. En utilisant le théorème de Gauss et cette expression limite de G, on trouve

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 + k^2)G(r) &= \int_S \mathbf{da} \cdot \nabla G(r) + 4\pi k^2 \int_0^a dr r^2 G(r) \\ &= -4\pi A + 2\pi A k^2 a^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Comme $a \rightarrow 0$, le deuxième terme disparaît. D'autre part, l'intégrale de l'éq. (2.36) dans cette sphère donne -1 en raison de la fonction delta du membre de droite. On en conclut que $A = 1/4\pi$, comme anticipé. En bref, la fonction de Green recherchée est

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.42)$$

La solution générale à l'équation (2.35) est donc

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 r' \frac{1}{4\pi} \frac{\exp ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.43)$$

Solution retardée

Rétablissons maintenant la dépendance temporelle en calculant la transformée de Fourier, c'est-à-dire en passant de $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega)$ à $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int d^3 r' \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)} \tilde{\xi}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\xi(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{où} \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ce résultat s'applique de manière immédiate aux potentiels électromagnétiques. Dans le cas du potentiel électrique, $\xi = 4\pi\rho$, alors que dans le cas de la composante A^a du potentiel vecteur ($a = 1, 2, 3$), $\xi = 4\pi J^a/c$. On trouve donc la solution générale (2.28) pour les potentiels électromagnétiques. En somme, la formule (2.28) constitue la solution générale des équations de Maxwell, pour des sources quelconques. Cependant, elle est exprimée en fonction des potentiels et non des champs, et la différentiation des potentiels pour passer aux champs peut dans certains cas présenter des difficultés importantes.

2.D.3 Ondes électromagnétiques

L'un des caractères fondamentaux des équations de Maxwell est qu'elles permettent la propagation de champs électrique et magnétique même en l'absence de charge et de courant, ce qu'on appelle justement des *ondes électromagnétiques*. Considérons à cet effet l'équation (2.29) dans le cas homogène ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$) :

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.45}$$

Une solution acceptable à ces équations est une onde progressive de forme quelconque se propageant dans la direction \mathbf{n} (un vecteur unité quelconque) à la vitesse c :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)\tag{2.46}$$

Notons que la condition de Lorentz (2.7) entraîne une relation entre les amplitudes Φ_0 et \mathbf{A}_0 , en plus d'imposer que la fonction f soit la même dans les deux cas :

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} = \Phi_0\tag{2.47}$$

Les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} correspondants se calculent facilement à partir de (2.1) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{n} f'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad \mathbf{E} = \mathbf{A}_0^\perp f'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)\tag{2.48}$$

où $\mathbf{A}_0^\perp = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ est la composante de \mathbf{A}_0 perpendiculaire à \mathbf{n} (on peut évidemment remplacer \mathbf{A}_0 par \mathbf{A}_0^\perp dans l'expression de \mathbf{B}). On note que les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{n} sont mutuellement perpendiculaires et sont orientés dans cet ordre comme une triade conventionnelle.

Une onde telle que donnée en (2.46) ne se disperse pas, c'est-à-dire que sa forme ne fait que se déplacer dans l'espace, sans se modifier. Cette absence de dispersion est propre aux solutions de l'équation d'onde et donc aux ondes électromagnétiques se propageant dans le vide. Nous verrons que, dans un matériau, l'équation d'onde n'est plus applicable et que, même si des ondes électromagnétiques sont encore possibles, leur vitesse dépend de la fréquence et que par conséquent elles subissent une dispersion, sauf dans le cas idéal d'une onde monochromatique (c'est-à-dire d'une fréquence parfaitement déterminée).

Notons aussi qu'en vertu de la linéarité de l'équation d'onde (et des équations de Maxwell), on peut superposer deux ou plusieurs solutions du type (2.46) et toujours obtenir une solution. En particulier, on pourrait superposer des solutions partageant le même vecteur \mathbf{n} , mais possédant des fonctions f et des amplitudes \mathbf{A}_0 différentes, ce qui mènerait à des ondes polarisées de manière variable dans le temps.

Notons que l'équation d'onde (2.29) s'applique aussi aux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , indépendamment des potentiels et du choix de jauge (2.7). Pour s'en convaincre, retournons aux équations de Maxwell (1.49), posons $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$ et calculons le rotationnel de la loi de Faraday :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{B} = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\tag{2.49}$$

où nous avons substitué pour $\nabla \wedge \mathbf{B}$ ce que prescrit la loi d'Ampère. Comme $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ si $\rho = 0$, on trouve l'équation d'onde pour chacune des composantes de \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.50)$$

Un calcul similaire, effectué en calculant en premier le rotationnel de la loi d'Ampère, et en substituant ensuite l'expression de $\nabla \wedge \mathbf{E}$ provenant de la loi de Faraday, nous mène à la même équation pour le champ magnétique.

E Électrostatique des conducteurs

2.E.1 Loi d'Ohm

Un conducteur se définit comme un matériau qui contient des charges mobiles qui se meuvent presque librement sous l'action d'un champ électrique. On définit la *conductivité* σ d'un conducteur par la relation linéaire qui y existe entre la densité de courant et le champ dans plusieurs matériaux (*Loi d'Ohm*) :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.51)$$

Du point de vue microscopique, la loi d'Ohm est le résultat de la diffusion des électrons d'un cristal par ce qui altère la structure périodique du cristal, en particulier les ondes sonores (phonons), les défauts et les impuretés. Bien sûr, cette relation linéaire n'est qu'une approximation, valable lorsque le champ est suffisamment faible. Plus le champ \mathbf{E} augmente en intensité, plus les corrections non linéaires à la loi d'Ohm sont importantes. Nous les négligerons cependant dans ce qui suit.

Si on substitue dans l'équation de continuité la loi d'Ohm et la loi de Gauss, on trouve

$$(4\pi\sigma)\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.52)$$

Ce qui résulte en un amortissement exponentiel de la densité de charge avec temps de relaxation τ :

$$\rho(t) \sim e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{1}{4\pi\sigma} \quad (2.53)$$

Voici quelques valeurs typiques :²

- cuivre : $\tau \sim 1.5 \times 10^{-19} \text{s}$.
- eau pure : $\tau \sim 3.5 \times 10^{-6} \text{s}$.
- quartz : $\tau \sim 2 \times 10^6 \text{s}$.

On se considère en situation électrostatique quand les échelles de temps du problème sont beaucoup plus grandes que τ (dans un bon conducteur) ou beaucoup plus petites que τ (dans un bon isolant).

2. En pratique, la conductivité dépend de la fréquence du champ électrique appliqué. On donne ici les valeurs de σ à fréquence nulle. La loi d'Ohm (2.51) doit être comprise comme reliant les transformées de Fourier en fréquence : $\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega)$.

2.E.2 Distribution des charges dans un conducteur

Dans une situation électrostatique, c'est-à-dire qui ne change pas avec le temps, le champ électrique est nul dans un conducteur et la charge qu'on y dépose se distribue à la surface du conducteur et non à l'intérieur. En effet,

1. Si le champ \mathbf{E} était non nul dans le conducteur, il en résulterait un courant de charge en vertu de la loi d'Ohm et une redistribution des charges jusqu'à ce que le champ soit nul, dans un temps de l'ordre de τ .
2. Si la densité de charge était non nulle à l'intérieur du conducteur, alors la loi de Gauss donnerait un flux électrique non nul autour d'une sphère suffisamment petite autour d'un point intérieur, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathbf{E} = 0$ à l'intérieur. Donc la charge qui peut y exister se situe uniquement sur la surface du conducteur, où cet argument est inapplicable.

Comme le champ électrique est nul dans un conducteur, le potentiel Φ y est constant. La surface du conducteur est alors une équipotentielle et donc le champ électrique à la surface est nécessairement perpendiculaire à cette dernière. Tout près de la surface d'un conducteur, la loi de Gauss nous donne la relation entre la densité superficielle de charge ρ_s et le champ électrique :

$$\mathbf{E} \approx 4\pi\rho_s\hat{\mathbf{n}}$$

$$(2.54)$$

Cette expression se démontre en appliquant la loi de Gauss sur une surface fermée infiniment mince qui chevauche la surface du conducteur, comme illustré.

La densité volumique d'énergie associée à la surface d'un conducteur est

$$\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2 = 2\pi\rho_s^2 \quad (2.55)$$

Cette quantité est aussi égale à la pression exercée par le conducteur sur sa surface : l'énergie gagnée par une expansion de la surface du conducteur (déplacement virtuel) sur une distance δx pour un élément de surface δA est égale à $2\pi\rho_s^2\delta x\delta A$, ce qui mène à la pression citée. C'est aussi la force exercée sur l'élément de surface par tous les autres éléments de surface du conducteur : le champ \mathbf{E} peut être décomposé en deux parties \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 , dues respectivement à l'élément de surface à \mathbf{r} et à la somme de toutes les autres sources. Tout juste à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du conducteur, on a $\mathbf{E}_1 = -2\pi\hat{\mathbf{n}}\rho_s$ (resp. $+2\pi\hat{\mathbf{n}}\rho_s$), en vertu du théorème de Gauss. Donc $\mathbf{E}_2 = 2\pi\hat{\mathbf{n}}\rho_s$ tout juste à l'intérieur, puisque $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ à cet endroit. Or la force par unité de surface exercée sur l'élément est $\rho_s\mathbf{E}_2$.

2.E.3 Capacité

En vertu du principe de superposition, le potentiel d'un conducteur est proportionnel aux charges qui sont placées dans le système. Soit Q_i les charges placées dans un système de N conducteurs ($i = 1, \dots, N$) et Φ_i le potentiel qui en résulte sur le conducteur i . On a la relation linéaire

$$\Phi_i = \sum_j B_{ij}Q_j \quad (2.56)$$

où les coefficients B_{ij} forment une matrice carrée qui ne dépend que de la configuration spatiale des conducteurs en question. On préfère généralement considérer la relation inverse :

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j \quad (2.57)$$

où les coefficients C_{ii} sont appelés *coefficients de capacité* car ils sont une mesure de la capacité d'un conducteur à absorber de la charge électrique à un potentiel donné. Les coefficients C_{ij} ($i \neq j$) sont appelés *coefficients d'influence électrostatique*. Pour un conducteur simple, on a $Q = C\Phi$ où C est la *capacité* du conducteur.

L'énergie potentielle d'un système de conducteurs est donc

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j \quad (2.58)$$

pour un conducteur simple, cela revient à $U = \frac{1}{2} C \Phi^2$. On peut donc introduire une définition différente des coefficients C_{ij} , comme étant les dérivées partielles secondes de l'énergie électrostatique par rapport aux potentiels :

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \quad (2.59)$$

D'après cette définition, il est évident que la matrice C est symétrique ($C_{ij} = C_{ji}$) car l'ordre de différentiation est sans importance.

Remarques :

- ◆ L'énergie U doit être une forme quadratique définie positive pour que l'état de moindre énergie soit $Q_i = 0$.
- ◆ On peut démontrer en général que $C_{ii} > 0$ et $C_{ij} < 0$ si $i \neq j$ (le signe de la charge induite est l'opposée du signe du potentiel inducteur).

Exemple : capacités de deux sphères concentriques

Considérons deux sphères conductrices concentriques de rayons a et b ($a < b$). Calculons les coefficients C_{ij} de capacité et d'influence électrostatique.

Soit q_a et q_b les charges situées sur les deux sphères. Il est évident que le potentiel $\Phi(\mathbf{r})$ ne dépend que du rayon r en coordonnées sphériques et que de la charge totale incluse à l'intérieur de ce rayon. En demandant que le potentiel soit nul à l'infini et continu partout ailleurs, on obtient

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{q_a + q_b}{r} & (r > b) \\ \frac{q_a}{r} + \frac{q_b}{b} & (a < r < b) \\ \frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b} & (r < a) \end{cases} \quad (2.60)$$

On peut donc écrire l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Chapitre 2. Potentiels et énergie électromagnétiques

Les coefficients C_{ij} sont obtenus par inversion de cette relation :

$$\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} = \frac{ab}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

On a donc

$$C_{11} = \frac{ab}{b-a} \quad , \quad C_{12} = C_{21} = -\frac{ab}{b-a} \quad , \quad C_{22} = \frac{b^2}{b-a} \quad (2.63)$$

Problèmes

Problème 2.1

On veut ici démontrer rigoureusement que le potentiel à l'extérieur d'une sphère conductrice creuse de rayon a contenant une charge q est $\Phi = q/r$, quelle que soit la façon dont cette charge est répartie à l'intérieur de la sphère. À cette fin, nous allons procéder à une inversion de l'espace, c.-à-d. à une transformation conforme qui transforme tout point à l'intérieur de la sphère en un point à l'extérieur et vice-versa.

A Considérez la transformation $\mathbf{r} \rightarrow (a^2/r^2)\mathbf{r}$ ou, en coordonnées sphériques, $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (a^2/r, \theta, \varphi)$. Définissons un potentiel transformé

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = r^\alpha \Phi(a^2/r, \theta, \varphi) \quad (2.64)$$

Démontrez que si Φ satisfait à l'équation de Laplace, alors Φ' aussi, pourvu que l'exposant α soit bien choisi. Quelle est la valeur de α appropriée ?

B À l'aide de cette transformation, montrez comment la solution $\Phi(r, \theta, \varphi) = q/r$ à l'extérieur de la sphère conductrice se démontre à partir de la solution $\Phi'(r, \theta, \varphi) = \text{const.}$ à l'intérieur d'une sphère conductrice ne contenant aucune charge.

C Refaites la partie **A**, cette fois en dimension 2, en coordonnées polaires planes. Quelle est la valeur de α cette fois-ci ?

Problème 2.2

Considérez deux charges q_1 et q_2 situées respectivement à l'origine et à $\mathbf{r} = (0, 0, a)$. Soit \mathbf{E} le champ produit par ces deux charges. À partir de l'expression (2.19) pour la densité d'énergie \mathcal{E} , montrez que l'énergie d'interaction entre les deux charges est $U = q_1 q_2 / a$. Indice : écrivez $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, où \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 sont respectivement produits par les charges 1 et 2, et ne considérez dans la densité \mathcal{E} que le terme qui provient de la présence simultanée des deux charges.

Problème 2.3

Dans une onde électromagnétique particulière, le champ électrique est donné par l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant, \mathbf{n} un vecteur unitaire et f une fonction différentiable quelconque. L'onde se propage dans le vide.

A Utilisez la loi de Faraday pour obtenir une expression du champ magnétique \mathbf{B} correspondant à cette onde.

Chapitre 2. Potentiels et énergie électromagnétiques

- B** Vérifiez que les autres équations de Maxwell sont respectées, moyennant une contrainte sur les vecteurs \mathbf{E}_0 et \mathbf{n} .
- C** Que vaut le flux d'énergie électromagnétique associé à cette onde ?

CHAPITRE 3

Dipôles électriques et magnétiques

Dans ce chapitre on traite de distributions de charges localisées dans un espace restreint, des champs produits par ces distributions et de leur interaction avec des champs externes. Nous nous plaçons partout dans l'approximation statique, dans laquelle la dépendance temporelle des distributions de charge et de courant est supposée suffisamment lente qu'on peut négliger les effets de retard qui apparaissent explicitement dans l'expression des potentiels retardés. Dans la limite statique (aucune dépendance en temps), la formule des potentiels retardés se réduit à

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.2)$$

A Moment dipolaire électrique

Considérons une distribution de charge $\rho(\mathbf{r})$ localisée dans une région bien délimitée de taille a . Plus précisément, a pourrait être le rayon de la plus petite sphère qui englobe toute la distribution. Plaçons l'origine des coordonnées au centre de cette sphère et considérons un observateur situé suffisamment loin de la distribution ($r \gg a$). Il est intuitivement clair que le champ électrique causé par cette distribution de charge doit ressembler à celui d'une charge ponctuelle q (q est la charge totale de la distribution) si $r \gg a$. Cependant, des corrections existent à cette approximation, qui sont essentielles si la charge totale est nulle. Un développement systématique du potentiel en une série de puissances de a/r est possible : c'est le *développement multipolaire*.

Si on désire limiter ce développement aux deux premiers termes, il suffit d'utiliser le développement limité suivant :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \quad (3.3)$$

où \mathbf{r} est le point d'observation, \mathbf{r}' le point de source et $\hat{\mathbf{r}}$ le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{r} . En substituant cette expression dans la formule (3.1) pour le potentiel électrique causé par une distribution de charge, on obtient

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') + \dots \quad (3.4)$$

les termes supplémentaires négligés décroissant plus rapidement que $1/r^2$. Le premier terme du membre de gauche fait intervenir la charge totale q de la distribution. Le deuxième terme fait intervenir ce qu'on appelle le *moment dipolaire électrique* :

$$\mathbf{d} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (3.5)$$

et peut ensuite être écrit sous la forme

$$\Phi_{\text{d.e.}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{d}}{r^2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} \quad (3.6)$$

Le champ électrique correspondant est

$$\mathbf{E}_{\text{d.e.}} = -\nabla(1/r^3) \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} - (1/r^3) \mathbf{d} = \frac{1}{r^5} (3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{d} r^2) \quad (3.7)$$

Remarquons que le champ dipolaire décroît comme $1/r^3$ et qu'il est deux fois plus fort le long de l'axe du dipôle que perpendiculairement à cet axe.

Comme exemple d'une distribution ponctuelle de charge totale nulle possédant un moment dipolaire non nul, considérons une charge $-q$ placée à l'origine ($\mathbf{r}' = 0$) et une charge $+q$ située à $\mathbf{r}' = \mathbf{a}$. La distribution de charge est alors

$$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) - q\delta(\mathbf{r}') \quad (3.8)$$

La définition (3.5) donne $\mathbf{d} = qa$. Dans ce cas, le moment dipolaire est parallèle à l'axe qui relie les deux charges et dirigé vers la charge positive. Sa valeur absolue est qa , où a est la distance entre les charges.

La charge totale (monopôle) ne dépend pas de l'origine des coordonnées. Cependant, le moment dipolaire dépend en général du choix de l'origine. Si on calcule le moment dipolaire par rapport à une nouvelle origine O' située à une position \mathbf{a} par rapport à l'ancienne origine O , on trouve

$$\mathbf{d}' = \int d^3r \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{d} - qa \quad (3.9)$$

où \mathbf{d} est le moment dipolaire par rapport à l'origine O . On remarque que si $q = 0$, alors le moment dipolaire est indépendant de l'origine.

B Développement multipolaire

Pour compléter notre discussion, indiquons ici la forme complète du développement initié en (3.3). Nous devons pour cela utiliser la formule suivante :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (3.10)$$

où $\gamma = \angle \mathbf{r}\mathbf{r}'$ et P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l (voir l'annexe D pour des rappels sur les polynômes de Legendre). Cette série converge si $r' < r$. Si nous substituons ce développement dans la formule (3.1), l'expression du potentiel devient à son tour une série infinie :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^{(l)}(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

où $\Phi^{(l)}(\mathbf{r})$ est le potentiel créé par le *multipôle* d'ordre l :

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos \gamma) \quad (3.12)$$

Le potentiel multipolaire $\Phi^{(l)}(\mathbf{r})$ diminue avec la distance comme $1/r^{l+1}$. De plus, il dépend de la direction, sauf pour $l = 0$. Si le rayon caractéristique de la distribution est a , $\Phi^{(l)}$ sera aussi proportionnel à a^l fois une quantité ayant les unités de la charge électrique. On peut montrer que le moment multipolaire non nul le plus bas ne dépend pas de l'origine des coordonnées, mais que tous les autres en dépendent.

Une expression différente du développement multipolaire peut être obtenue en mettant à profit la formule d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.13)$$

où γ est l'angle entre les points (θ', φ') et (θ, φ) sur la sphère (on utilise les coordonnées sphériques pour \mathbf{r} et \mathbf{r}'). On obtient alors le développement

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.14)$$

L'expression du potentiel multipolaire devient alors

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{l+1}} \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) q_{lm} \quad (3.15)$$

où on définit le moment multipolaire

$$q_{lm} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (3.16)$$

L'avantage de cette formulation en fonction des harmoniques sphériques est que l'on connaît bien la dépendance angulaire de ces derniers, ainsi que la façon dont ils se transforment lorsqu'on effectue une rotation ou une inversion de l'espace.

C Moment quadripolaire électrique

Le troisième terme de la série (3.3) est le potentiel *quadripolaire* (cf. éq. (3.12)) :

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2r^3} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') r'^2 (3 \cos^2 \gamma - 1) \\ &= \frac{1}{2r^5} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2) \\ &= \frac{1}{6r^5} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \\ &= \frac{1}{6r^5} Q_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ici nous avons utilisé la convention de sommation sur les indices répétés et nous avons défini le *tenseur quadripolaire* :

$$Q_{ij} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \quad (3.18)$$

Remarques :

- ◆ La trace du tenseur quadripolaire s'annule : $Q_{ii} = 0$ (indice sommé). Donc on peut écrire

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r^5} Q_{ij} x_i x_j \quad (3.19)$$

- ◆ Ce tenseur est symétrique ($Q_{ij} = Q_{ji}$). Par conséquent, il est possible de trouver un système d'axes orthogonaux (dits *axes principaux* du tenseur) dans lequel le tenseur est diagonal. Celui-ci comporte alors trois composantes (Q_{11} , Q_{22} et Q_{33}) reliées par la contrainte de trace nulle : $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$.
- ◆ Si la distribution de charge possède une symétrie de rotation autour d'un axe (ex. z) alors $Q_{xx} = Q_{yy}$. En appelant $Q_{zz} = Q$ le *moment quadripolaire* de la distribution, il s'ensuit que $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$. Dans ce cas, le potentiel quadripolaire devient

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4r^5} (2z^2 - x^2 - y^2) \quad (3.20)$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (3.21)$$

- ◆ Si $\rho > 0$ et que la distribution est allongée, alors $Q > 0$. Si, au contraire, la distribution est aplatie, alors $Q < 0$. L'inverse est vrai si $\rho < 0$. Le moment quadripolaire d'une distribution de charge comportant une densité à peu près uniforme nous permet de caractériser la forme de cette distribution.
- ◆ On peut obtenir un quadripôle en plaçant côte à côte deux dipôles de signes opposés (ce procédé est général pour obtenir un l -pôle à l'aide de deux $(l - 1)$ -pôles).

D Énergie d'une distribution de charge dans un potentiel externe

Considérons une distribution de charge avec densité $\rho(\mathbf{r})$ confinée dans une région finie de l'espace où s'applique un champ électrique externe (c'est-à-dire produit par une source autre que ρ , située hors de la région considérée). Soit $\Phi(\mathbf{r})$ le potentiel électrique associé à ce champ externe; alors l'énergie potentielle W de cette distribution dans ce potentiel externe est

$$W = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Cette expression est une extension simple de l'énergie potentielle $q\Phi(\mathbf{r})$ d'une charge ponctuelle dans un potentiel. Insistons sur le fait que le potentiel Φ n'est pas ici causé par la distribution $\rho(\mathbf{r})$, mais par une autre source, et donc il satisfait à l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ dans la région de l'espace considérée ici.

Plaçons l'origine des coordonnées quelque part au centre de la distribution de charge, et procédons à un développement limité de $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + x_i \partial_i \Phi(0) + \dots = \Phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) + \dots \quad (3.23)$$

En substituant ce développement dans l'expression pour W , on trouve

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{E}(0) \cdot \int d^3r \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}' + \dots = q\Phi(0) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(0) + \dots \quad (3.24)$$

où q est la charge totale de la distribution et \mathbf{d} son moment dipolaire électrique. Le premier terme représente l'énergie d'interaction de la distribution comme si toute sa charge était concentrée à l'origine. La forme du deuxième terme montre qu'un dipôle électrique cherche à s'aligner sur le champ électrique pour minimiser l'énergie potentielle.

La force agissant sur une distribution de charge localisée causée par un champ électrique externe est

$$\mathbf{F} = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.25)$$

Une série de Taylor au premier ordre pour \mathbf{E} donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + x_a \partial_a \mathbf{E}(0) + \dots \quad (3.26)$$

Les deux premiers termes dans la force totale sont donc

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(0) + (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}|_0 + \dots \quad (3.27)$$

On constate que la force ressentie par un dipôle dépend non pas du champ lui-même, mais de son gradient :

$$\mathbf{F}_{\text{dip.}} = d_a \partial_a \mathbf{E}|_0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_{\text{dip.}} = (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}|_0 \quad (3.28)$$

De même, le couple qui s'exerce sur un dipôle électrique est, à l'ordre zéro,

$$\mathbf{N} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}(0) = \mathbf{d} \wedge \mathbf{E}(0) \quad (3.29)$$

Ces résultats sont tout à fait compatibles avec l'énergie d'interaction $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ du dipôle dans un champ électrique.

On peut facilement observer dans la vie courante les effets de la force $(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ agissant sur un dipôle. Lorsqu'un objet devient chargé d'électricité – par exemple, un peigne qu'on vient de frotter à ses cheveux – il peut attirer des objets légers, comme des bouts de papier. On peut expliquer le phénomène comme suit : la charge déposée sur le peigne crée un champ électrique diminuant avec la distance qui polarise le papier. Les dipôles microscopiques contenus dans le papier sont parallèles au champ et attirés dans la direction où le champ augmente, c'est-à-dire vers le peigne. Le même peigne peut aussi attirer vers lui un mince filet d'eau coulant d'un robinet, car l'eau est une substance très polarisable.

E Moment dipolaire magnétique

On peut appliquer à l'expression (3.2) du potentiel vecteur \mathbf{A} le même développement multipolaire que pour le potentiel électrostatique. Limitons-nous aux deux premiers termes :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{cr^2} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') + \dots \quad (3.30)$$

Le premier terme (monopôle) est la dérivée par rapport au temps du moment dipolaire électrique. En effet, la composante k de l'intégrale peut s'exprimer comme

$$\int d^3r J_k(\mathbf{r}) = \int d^3r J_i \partial_i x_k = - \int d^3r \partial_i J_i x_k = \int d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} x_k \quad (3.31)$$

où nous avons (i) intégré par parties, le terme de surface étant pris à l'extérieur de la distribution, et (ii) mis à profit l'équation de continuité (1.11). Bref, ce premier terme peut s'exprimer comme

$$\int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \rho \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (3.32)$$

Le deuxième terme est

$$A_k^{(2)} = \frac{1}{cr^3} \int d^3r' J_k(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{cr^3} \int d^3r' J_k(\mathbf{r}') x'_i x_i \quad (3.33)$$

Notons en passant que

$$\partial_m (x_i x_k J_m) = x_k J_i + x_i J_k \quad (3.34)$$

Chapitre 3. Dipôles électriques et magnétiques

Le membre de gauche est une divergence et donc on obtient, en intégrant,

$$\int d^3 r' (x'_i J_k + x'_k J_i) = 0 \quad (3.35)$$

On peut alors remplacer

$$\int d^3 r' x'_i J_k(\mathbf{r}') \quad \text{par} \quad \frac{1}{2} \int d^3 r' (x'_i J_k(\mathbf{r}') - x'_k J_i(\mathbf{r}')) \quad (3.36)$$

c'est-à-dire ne conserver que la partie antisymétrique en (i, k) de l'expression, puisque la partie symétrique s'annule. Cette contribution au potentiel vecteur devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(2)} &= \frac{1}{2cr^3} \int d^3 r' [(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r})] \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \left[\mathbf{r} \wedge \int d^3 r' \mathbf{r}' \wedge \mathbf{J} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

On définit alors l'aimantation \mathbf{M} comme

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.38)$$

et le moment dipolaire magnétique \mathbf{m} comme

$$\mathbf{m} = \int d^3 r \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \int d^3 r \mathbf{r} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3.39)$$

Le terme dipolaire du potentiel vecteur devient

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.40)$$

Le champ magnétique correspondant se calcule simplement :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \nabla \wedge \left(\mathbf{m} \wedge \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \mathbf{m} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Le premier terme s'annule sauf à l'origine (il s'agit de la divergence du champ électrique d'une charge ponctuelle) et l'origine est ici exclue du domaine d'observation (nous nous situons loin des sources). Le deuxième terme peut être développé comme suit, en notation indiciale :

$$\begin{aligned} B_i^{(2)} &= -m_j \partial_j \left(\frac{x_i}{r^3} \right) \\ &= -m_j (\partial_j x_i) \frac{1}{r^3} + 3m_j x_i \frac{x_j}{r^5} \\ &= \frac{1}{r^3} (-m_i + 3n_i n_j m_j) \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $n_i = x_i/r$ est le vecteur unité dans la direction de \mathbf{r} . En notation vectorielle, ceci devient

$$\mathbf{B}^{(2)} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} \quad (3.43)$$

Remarques :

- ◆ La forme du champ est la même que pour un dipôle électrique.
- ◆ Les unités du moment dipolaire magnétique sont les mêmes que celles du moment dipolaire électrique. Le facteur de $1/c$ a comme conséquence que le moment dipolaire magnétique typique sera beaucoup plus petit que son analogue électrique, à moins que les vitesses typiques de la distribution de courant soient voisines de c .
- ◆ Cette forme est valide loin des sources et constitue le terme dominant dans le développement multipolaire magnétique. Une approximation supplémentaire consiste à ajouter un terme à l'origine des coordonnées qui assure que l'intégrale du champ $\int d^3r \mathbf{B}$ soit reproduite correctement :

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.44)$$

Le dernier terme ne contribue qu'à l'origine (il ne fait donc pas partie du développement multipolaire) et joue un rôle important dans le traitement de la structure hyperfine de l'hydrogène.

Moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant

Selon la correspondance (1.23) et la définition (3.39), le moment dipolaire d'un circuit de courant est

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int \mathbf{r} \wedge d\mathbf{l} \quad (3.45)$$

Pour une boucle plane avec origine à l'intérieur de la boucle, il est clair que $\frac{1}{2}\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}$ est l'élément d'aire de la surface entourée par la boucle. On peut alors écrire

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{c} \times \text{Aire de la boucle} \quad (3.46)$$

F Moment dipolaire magnétique et moment cinétique

Le moment magnétique d'un système est étroitement lié à son moment cinétique. En effet, exprimons la distribution de courant en fonction des vitesses des charges ponctuelles qui la composent (cf. éq. (1.13)) :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.47)$$

Le moment magnétique correspondant est obtenu en substituant dans (3.39) :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{q_i}{2M_i c} \mathbf{L}_i \quad (3.48)$$

où \mathbf{L}_i et M_i sont le moment cinétique et la masse de la charge i . Si le rapport q/M est commun à toutes les particules, on peut alors écrire

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{q}{2Mc} \quad (3.49)$$

en fonction du moment cinétique total \mathbf{L} . La constante γ est appelée *rapport gyromagnétique*.

Si le moment cinétique d'un atome ne provenait que des moments cinétiques orbitaux des électrons, la formule (3.49) pourrait s'appliquer à un atome dans son entier et, comme le moment cinétique orbital est quantifié en multiples entiers de \hbar , le moment magnétique d'un atome serait un multiple entier du *magnéton de Bohr* μ_B :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (3.50)$$

où m_e est la masse de l'électron et $-e$ la charge de l'électron.

Cependant, le moment cinétique d'une particule élémentaire n'est pas strictement d'origine orbitale, en raison de l'existence du spin. Cette complication se transmet aux particules non élémentaires, aux atomes, et par la suite aux matériaux. On montre en mécanique quantique que la proportionnalité entre le moment cinétique et le moment magnétique demeure, mais que le rapport gyromagnétique est typiquement différent de $q/2Mc$. Cependant, l'expression (3.49) de γ s'applique dans le cas où le moment cinétique est dominé par la contribution orbitale, en particulier dans un objet macroscopique en rotation fait d'un matériau non magnétique.

G Force et couple sur un moment dipolaire magnétique

La force qui s'exerce sur une distribution localisée de courant par un champ magnétique est (en composantes)

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \int d^3r J_j(\mathbf{r}) B_k(\mathbf{r}) \quad (3.51)$$

Si on développe \mathbf{B} en série autour du centre de la distribution ($\mathbf{r} = 0$) on trouve, au premier ordre,

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} B_k(0) \int d^3r J_j(\mathbf{r}) + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \partial_l B_k(0) \int d^3r J_j(\mathbf{r}) x_l \quad (3.52)$$

Le premier terme s'annule, étant proportionnel à l'intégrale de \mathbf{J} . D'autre part, on sait que

$$\frac{1}{c} \int d^3r J_j x_l = \frac{1}{2c} \int d^3r (J_j x_l - J_l x_j) = \frac{1}{2c} \int d^3r \epsilon_{ljr} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{J})_r = \epsilon_{ljr} m_r \quad (3.53)$$

Donc la force devient

$$F_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljr} \partial_l B_k(0) m_r = \partial_i (B_k m_k) \quad (3.54)$$

ou encore

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.55)$$

On conclut que l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ magnétique est

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (3.56)$$

Ceci signifie aussi que même un champ uniforme peut exercer une influence sur un dipôle, en exerçant un couple sur la distribution de courant de façon à aligner le moment dipolaire avec le champ pour minimiser W . Si θ est l'angle que fait \mathbf{m} avec \mathbf{B} , l'énergie potentielle est $W = Bm \cos \theta$; le couple est alors $N = -dW/d\theta$ ou $N = Bm \sin \theta$; sa direction est perpendiculaire au plan qui contient \mathbf{m} et \mathbf{B} . En tenant compte de son signe conventionnel, on peut donc écrire

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \quad (3.57)$$

On peut aussi démontrer cette relation directement : la composante N_i du couple exercé sur la distribution de courant est

$$N_i = \frac{1}{c} \epsilon_{imn} \epsilon_{nj k} \int d^3r x_m J_j(\mathbf{r}) B_k(\mathbf{r}) \quad (3.58)$$

Dans ce cas le terme d'ordre zéro contribue :

$$N_i = \frac{1}{c} \epsilon_{imn} \epsilon_{nj k} B_k \int d^3r x_m J_j(\mathbf{r}) = \epsilon_{imn} \epsilon_{nj k} \epsilon_{mjr} m_r B_k \quad (3.59)$$

Le calcul des contractions donne $N_i = \epsilon_{irk} m_r B_k$, ce qui confirme la formule (3.57).

Expérience de Stern et Gerlach

L'interaction (3.56) est bien sûr responsable de l'effet Zeeman en physique atomique, par lequel un niveau d'énergie dégénéré est séparé en plusieurs niveaux équidistants sous l'influence d'un champ magnétique, ce en raison de la quantification des orientations de spin. Quant à la force (3.55), elle est mise à profit dans l'expérience de Stern et Gerlach pour séparer les deux orientations de spin dans un faisceau d'atomes neutres. Un champ magnétique avec un fort gradient dans la direction z est appliqué sur une petite région de l'espace, par laquelle passe un faisceau d'atomes ayant une vitesse dans la direction x . Dans le champ magnétique, les deux orientations de spins ont des énergies différentes. Avant que des transitions aient le temps de se produire vers l'orientation ayant l'énergie la plus basse, les atomes ayant leur spin parallèle au champ ont déjà été attirés dans la direction $+z$ et les autres, dans la direction opposée : le faisceau a été séparé en deux. Cette expérience a permis de mettre clairement en évidence la quantification de l'orientation du spin.

L'énergie potentielle (3.56) et l'expression (3.43) pour le champ dipolaire nous permet d'écrire l'expression suivante pour l'énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 :

$$U_{\text{dip.}} = \frac{1}{r^3} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_2)) - \frac{8\pi}{3} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.60)$$

Cette *interaction dipolaire* joue un rôle souvent important dans les solides magnétiques, en particulier dans les ferroaimants. Elle est aussi la source de la structure hyperfine de l'hydrogène et d'autres atomes.

Précession de Larmor

Considérons un moment magnétique \mathbf{m} dans un champ magnétique uniforme et constant \mathbf{B} . Un couple $\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$ s'exerce sur lui et son moment cinétique \mathbf{J} varie en conséquence : $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$. D'après l'éq. (3.49), ceci signifie que

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \quad (3.61)$$

De cette équation on déduit que la composante de \mathbf{m} dans la direction de \mathbf{B} est constante dans le temps, alors que les deux autres composantes forment un vecteur tournant dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} . En effet, rappelons que la dérivée temporelle d'un vecteur \mathbf{A} tournant à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe \mathbf{n} est

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n} \quad (3.62)$$

Cette équation reste inchangée si on ajoute à \mathbf{A} une composante constante dans la direction de $\boldsymbol{\omega}$. On conclut que le moment magnétique précesse autour de \mathbf{B} avec un vecteur vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\gamma \mathbf{B} \quad \omega_L = |\gamma| B \quad (3.63)$$

On appelle ω_L la fréquence de Larmor et ce mouvement de précession la *précession de Larmor*. La correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique associe à tout mouvement périodique de fréquence ω une différence de niveaux d'énergie $\hbar\omega$ entre deux états quantiques. Dans le cas de la précession de Larmor, $\hbar\omega_L$ est la différence d'énergie entre les différents états de projection du moment cinétique selon \mathbf{B} (effet Zeeman).

La présence d'états du moment cinétique séparés par une énergie $\hbar\omega_L$ permet d'envisager des transitions quantiques entre ces états, au cours desquelles des photons sont émis ou absorbés. Ces transitions se produisent lorsque l'onde électromagnétique incidente est en résonance avec le système oscillant, c'est-à-dire lorsque sa fréquence est égale à la fréquence de Larmor. Voyons ce que ceci signifie du point de vue classique, dans une situation de *résonance magnétique*. Supposons qu'un moment magnétique soit plongé dans un champ magnétique constant $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{z}$, auquel on superpose un faible champ magnétique tournant dans le plan xy :

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1(\cos \omega t \mathbf{x} + \sin \omega t \mathbf{y}) \quad (3.64)$$

En pratique, \mathbf{B}_0 est créé par un électroaimant, souvent supraconducteur, alors que \mathbf{B}_1 est créé par une modeste solénoïde ou par une cavité résonante ($B_1 \ll B_0$). Comme il est difficile d'analyser le mouvement d'un moment magnétique dans un champ tournant, plaçons-nous dans un référentiel tournant à la même vitesse que \mathbf{B}_1 . On sait que la dérivée temporelle d'un vecteur \mathbf{A} dans un référentiel tournant, en fonction de sa dérivée dans un référentiel inertiel, est

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_I - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A} \quad (3.65)$$

Comme le champ magnétique est constant dans ce référentiel tournant, on trouve

$$\left(\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right)_R = \mathbf{m} \wedge \{\gamma\mathbf{B} + \boldsymbol{\omega}\} \quad (3.66)$$

où $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$. Dans le référentiel tournant, on constate que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ joue le rôle d'un champ magnétique 'fictif', contribuant à un champ magnétique effectif

$$\mathbf{B}_{\text{eff.}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\omega}/\gamma \quad (3.67)$$

Dans ce référentiel, le moment magnétique effectue donc un mouvement de précession à la fréquence de Larmor $\omega_L = \gamma B_{\text{eff.}}$, autour de l'axe de $\mathbf{B}_{\text{eff.}}$. Si ω (la fréquence du champ magnétique tournant) est petit par rapport à la fréquence de Larmor $\omega_0 = |\gamma|B_0$, alors la précession de \mathbf{m} autour de \mathbf{B}_0 n'est que légèrement modifiée par le champ \mathbf{B}_1 . La projection $\mathbf{m} \cdot \mathbf{z}$ reste essentiellement la même : elle ne fait qu'osciller entre deux bornes assez rapprochées. La même chose est vraie si $\omega \gg \omega_0$: la variation de \mathbf{B}_1 est trop rapide pour faire basculer $\mathbf{m} \cdot \mathbf{z}$ dans l'autre sens. Cependant, si $\omega = \omega_0$ (ou $-\omega_0$, selon le signe de γ), le champ effectif $\mathbf{B}_{\text{eff.}}$ dans le référentiel tournant est entièrement dans le plan xy et la précession autour de ce champ fait basculer la composante en z du moment magnétique, aussi petit soit B_1 par rapport à B_0 . Un infime champ magnétique peut donc avoir un effet majeur sur le mouvement de précession de \mathbf{m} , s'il oscille dans le temps à la fréquence de Larmor associée au champ constant B_0 : c'est la *résonance magnétique*.

La résonance magnétique a de multiples applications en physique expérimentale, en analyse chimique et en physique médicale. On distingue la *résonance magnétique nucléaire* (RMN), dans laquelle ce sont les moments magnétiques des noyaux qui sont mis en résonance, de la *résonance paramagnétique électronique* (RPE), dans laquelle ce sont les moments magnétiques des nuages électroniques qui sont mis en résonance. Comme le rapport des masses du proton et de l'électron est d'environ 2000, la fréquence de résonance typique en RPE est 10^3 fois plus grande qu'en RMN. Le champ magnétique net ressenti par le moment magnétique d'un noyau ou d'un électron n'est pas seulement le champ appliqué ($\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$), mais aussi le champ magnétique local créé par les voisins atomiques de ce moment magnétique. Ce champ est faible, mais modifie légèrement la fréquence de résonance.

Chapitre 3. Dipôles électriques et magnétiques

Ceci permet d'identifier l'environnement dans lequel se situe le moment magnétique, d'où l'utilité de la RMN en chimie. D'autre part, comme dans tout système résonant, l'énergie transférée au système oscillant (ici, les moments magnétiques) est maximale à la résonance. La mesure de cette énergie transférée permet de mesurer la concentration à un endroit donné d'une certaine catégorie de moments magnétiques (par exemple, des protons). Ainsi, la concentration en hydrogène d'une portion du corps humain peut être mesurée à un endroit précis à l'intérieur du corps, en temps réel, sans intrusion. Ceci permet de visualiser l'intérieur du corps, par tranches successives, et d'identifier des pathologies.

Problèmes

Problème 3.1

Une sphère de rayon a porte une charge Q uniformément distribuée sur sa surface et est en rotation sur elle-même avec une vitesse angulaire ω . Calculez le moment dipolaire magnétique associé.

CHAPITRE 4

Champs macroscopiques

A Champs \mathbf{D} , \mathbf{P} , \mathbf{H} et \mathbf{M}

Dans les matériaux, les équations de Maxwell microscopiques sont difficilement applicables en pratique, car les charges liées aux atomes et aux molécules jouent un rôle important et difficilement contrôlable. Pour surmonter cette difficulté, on introduit des champs macroscopiques (\mathbf{D} et \mathbf{H}) dont les sources excluent ces charges et courants liés. Nous allons maintenant rapidement passer en revue l'origine de ces champs macroscopiques.

Par définition, la *charge liée* ne peut s'étendre que sur une très courte distance, c'est-à-dire à l'échelle atomique. L'effet de cette charge liée peut donc être complètement représenté par une distribution de dipôles électriques et de dipôles magnétiques, qui sont soit créés par une redistribution des mouvements électroniques ou un réorientation des molécules sous l'influence de champs externes, soit présents de manière spontanée. Le moment dipolaire électrique par unité de volume, ou *polarisation*, est noté \mathbf{P} . Le moment dipolaire magnétique par unité de volume, ou *aimantation*, est noté \mathbf{M} .

Rappelons que le potentiel électrique $\Phi(\mathbf{r})$ causé par la présence d'un dipôle électrique ponctuel \mathbf{d} situé au point \mathbf{r}' est

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.1)$$

Par superposition, le potentiel électrique résultant d'une distribution de dipôles électriques est

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_V d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.2)$$

Il est possible d'interpréter cette formule en fonction d'une densité de charge en procédant à une intégration par parties. L'intégration par parties en dimension 3 se fait de plusieurs façons, dont la suivante : si \mathbf{A} est un champ vectoriel et f une fonction scalaire, on a la relation suivante :

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.3)$$

En intégrant sur un volume V et en appliquant le théorème de Gauss, on trouve

$$\oint_{\partial V} f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V d^3r \mathbf{A} \cdot \nabla f + \int_V d^3r f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.4)$$

En appliquant cette relation à l'éq. (4.2), où $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}$ et $f \rightarrow 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ et où l'intégration et les dérivées sont prises par rapport à \mathbf{r}' , on trouve

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_V d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \oint_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.5)$$

V désigne le volume d'intégration (le volume du matériau) et ∂V représente la surface du matériau, orientée avec une normale externe. L'interprétation de ce résultat est la suivante : étant donné que le potentiel électrique causé par une densité de charge quelconque $\rho(\mathbf{r})$ est

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (4.6)$$

le potentiel créé par la distribution de dipôles équivaut à celui créé par une densité de charge volumique $\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ plus une densité surfacique de charge $\rho'_s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est la normale qui sort de l'échantillon :

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \rho'_s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (4.7)$$

Donc, fondamentalement, la polarisation \mathbf{P} se ramène à une distribution de charge liée, volumique et surfacique. Notons que la polarisation peut aussi donner naissance à une densité de courant si elle varie dans le temps. Ceci peut se déduire de l'équation de continuité exprimant la conservation de la charge liée :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 \quad (4.8)$$

(la charge liée est conservée séparément de la charge mobile, sinon le concept de charge liée ne serait pas très utile). Pour que cette équation soit satisfaite avec $\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, il faut que \mathbf{J}' soit égal à $\partial \mathbf{P} / \partial t$, plus une partie sans divergence.

D'autre part, le potentiel vecteur causé par un dipôle magnétique ponctuel \mathbf{m} situé au point \mathbf{r}' est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (4.9)$$

Encore une fois, par superposition, le potentiel électrique résultant d'une distribution de dipôles magnétiques est

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int_V d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\ &= \int_V d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \\ &= \int_V d^3r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \oint_S d\mathbf{a} \wedge \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Encore une fois, nous avons intégré par parties pour obtenir la dernière équation. Or, rappelons que le potentiel vecteur causé par une densité de courant stationnaire quelconque \mathbf{J} est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.11)$$

À la lumière de cette expression, on constate que l'aimantation agit comme une densité de courant $\mathbf{J}' = c\nabla\wedge\mathbf{M}$ liée au matériau, plus une densité surfacique de courant $\mathbf{J}'_s c\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$ apparaissant à la surface du matériau :

$$\mathbf{J}' = c\nabla\wedge\mathbf{M} \quad \mathbf{J}'_s = c\mathbf{M} \wedge \mathbf{n} \quad (4.12)$$

Les densités de charge liée et de courant lié sont donc

$$\rho' = -\nabla\cdot\mathbf{P} \quad \mathbf{J}' = c\nabla\wedge\mathbf{M} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \quad (4.13)$$

Écrivons maintenant les densités de charge et de courant totales comme

$$\rho_{\text{tot.}} = \rho + \rho' \quad \mathbf{J}_{\text{tot.}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}' \quad (4.14)$$

où ρ et \mathbf{J} représentent la charge libre, tandis que ρ' et \mathbf{J}' représentent la charge liée au matériau. En insérant cette décomposition dans les lois de Gauss (1.49a) et d'Ampère (1.49d), on trouve

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi(\rho - \nabla\cdot\mathbf{P}) \\ \nabla\wedge\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{J} + c\nabla\wedge\mathbf{M} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) &= 4\pi\rho \\ \nabla\wedge(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{aligned} \quad (4.16)$$

De là vient l'utilité de définir les champs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} && \text{induction électrique ou déplacement électrique} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} && \text{champ magnétique} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour sa part, le vecteur \mathbf{B} sera dorénavant désigné *induction magnétique* et le vecteur \mathbf{E} conserve le nom de *champ électrique*.

Bien sûr, dans le vide, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs fondamentaux, alors que les champs \mathbf{D} et \mathbf{H} ne sont distincts que dans la matière. Récrivons les équations de Maxwell, en fonction des champs macroscopiques :

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D} &= 4\pi\rho && \text{(a)} \\ \nabla\wedge\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(b)} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && \text{(c)} \\ \nabla\wedge\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} && \text{(d)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

La résolution des équations de Maxwell macroscopiques est possible en principe si on connaît la relation entre les champs \mathbf{D} et \mathbf{E} et entre les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} , qui sont en quelque sorte des équations d'état thermodynamiques. Dans les milieux linéaires et isotropes, ces relations sont $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, où ε est la *constante diélectrique* et μ la *perméabilité magnétique*. En fait, ces 'constantes' dépendent de la fréquence (nous traiterons de cette question dans la section 6). On doit aussi spécifier les conditions initiales et les conditions aux limites en nombre suffisant.

B Conditions de continuité

Conditions de continuité pour \mathbf{D} et \mathbf{E}

À l'interface de deux milieux diélectriques 1 et 2 avec normale \mathbf{n} de 1 vers 2, on a les conditions aux limites

$$\boxed{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\rho_s} \quad \boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n} = 0} \quad (4.19)$$

où ρ_s est la densité superficielle de charge libre. En d'autres mots, la composante de \mathbf{D} perpendiculaire à l'interface est discontinue par la densité superficielle de charge *libre*, alors que la composante de \mathbf{E} parallèle à l'interface est continue. Si aucune charge libre n'est présente dans le système, alors la composante normale de \mathbf{D} est continue. Dans des milieux linéaires et isotropes, cela revient à dire que la composante normale de \mathbf{E} est discontinue et sa composante parallèle continue.

Justifions maintenant la première de ces conditions aux limites. Pour ce faire, considérons encore une fois une surface abstraite de type 'boîte à pilule' à cheval sur l'interface, et intégrons la relation $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ dans cette surface. Le théorème de la divergence donne

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \mathcal{A} = 4\pi\rho_s \mathcal{A} \quad (4.20)$$

(ici \mathcal{A} est l'aire de la surface d'intégration) ce qui est bien la condition ci-haut. Pour justifier la deuxième condition, on considère plutôt une boucle d'intégration rectangulaire, infiniment étroite et qui longe l'interface de part et d'autre. Soit \mathbf{m} la normale à cette boucle. Le vecteur qui décrit le côté long de la boucle est de longueur L et parallèle à $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$. Intégrons à travers cette boucle le flux de $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$. On trouve, avec le théorème de Stokes :

$$0 = L(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}) = L\mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) \quad (4.21)$$

Comme cette relation est vraie pour n'importe laquelle orientation du contour (pourvu qu'il soit dans le plan) ou encore pour n'importe laquelle valeur de \mathbf{m} , on en déduit que $\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$, la deuxième des relations ci-haut.

Conditions aux limites des champs \mathbf{B} et \mathbf{H}

À l'interface de deux milieux ayant des propriétés magnétiques différentes, la composante normale de l'induction magnétique est continue, en raison de la loi différentielle $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Par contre, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue s'il y a des courants libres de surface. Si \mathbf{K} est la densité superficielle de courant, alors l'application du théorème de Stokes près de l'interface à la relation $\nabla \wedge \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{J}$ donne

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{n} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \quad (4.22)$$

En effet, soit \mathbf{n}_1 le vecteur normal à une boucle rectangulaire infinitésimale traversant l'interface et $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}$. Alors $\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = (4\pi/c)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{K}$ ou

$$(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{K} \quad (4.23)$$

d'où on peut conclure la formule ci-haut, en raison de l'arbitraire de \mathbf{n}_1 .

C Potentiel scalaire magnétique

Nous allons ici expliquer une méthode de résolution des problèmes aux limites en magnétostatique, particulièrement adaptée aux cas où la densité de courant libre est nulle dans la région d'intérêt. Dans ce cas le champ magnétique \mathbf{H} est irrotationnel : $\nabla \wedge \mathbf{H} = 0$; donc on peut l'écrire comme le gradient d'un champ scalaire Φ_m qu'on appelle le *potentiel scalaire magnétique* :

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \quad (4.24)$$

Il y a alors une parfaite analogie entre les situations électrostatiques sans charge libre ($\rho = 0, \rho_s = 0$) et les situations magnétostatiques sans courant libre ($\mathbf{J} = 0, \mathbf{K} = 0$). Cette analogie se manifeste avec la correspondance suivante :

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H} \quad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad (4.25)$$

En effet, les lois différentielles et les conditions aux limites sont les mêmes dans ce cas :

$$\begin{array}{|l} \hline \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{E}_{\parallel} \text{ continu} \\ \mathbf{D}_{\perp} \text{ continu} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|l} \hline \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \\ \mathbf{H}_{\parallel} \text{ continu} \\ \mathbf{B}_{\perp} \text{ continu} \\ \hline \end{array} \quad (4.26)$$

Une différence essentielle demeure, cependant : la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{H} peut très souvent être non linéaire, ce qui est plus rare entre \mathbf{E} et \mathbf{D} . D'autre part, les situations électrostatiques comportent souvent des corps conducteurs sur lesquels le potentiel électrique Φ est constant, ce qui ne se produit pas pour le potentiel scalaire magnétique.

Si la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{H} est linéaire ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) alors la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique $\nabla^2 \Phi_m = 0$: le potentiel magnétique satisfait à l'équation de Laplace. La méthode de séparation des variables peut alors être utilisée, comme dans le cas électrostatique.

Dans le cas plus général où la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{H} n'est pas linéaire, par exemple en présence d'aimants permanents, on ne peut qu'affirmer ceci :

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = 0 \implies \nabla^2 \Phi_m = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (4.27)$$

On définit alors une densité de 'charge magnétique' $\xi = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ et une densité superficielle de charge magnétique $\xi_s = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}$ à une interface, comme pour la charge liée à un diélectrique. La solution à l'équation de Poisson nous est heureusement connue :

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \frac{\xi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int d\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.28)$$

Ceci nous permet de calculer \mathbf{H} et \mathbf{B} si l'aimantation est connue. Naturellement, la charge magnétique n'est pas une quantité fondamentale comme la charge électrique, mais une quantité intermédiaire reliée à l'aimantation qui n'a son utilité que si Φ_m est bien défini, c'est-à-dire en l'absence de courant libre. La charge magnétique représente alors la source du champ \mathbf{H} de la même façon que la charge électrique est la source du champ \mathbf{E} .

4.C.1 Exemple : sphère avec aimantation uniforme.

Considérons une sphère de rayon a portant une aimantation uniforme \mathbf{M} . Appliquons le concept de potentiel scalaire magnétique pour calculer \mathbf{H} et \mathbf{B} partout.

Adoptons les coordonnées sphériques, avec l'origine au centre de la sphère et l'axe z dans la direction de l'aimantation : $\mathbf{M} = M\mathbf{z}$. Comme aucun courant libre n'est présent, on utilisera la méthode du potentiel scalaire magnétique. Étant donné que l'aimantation est uniforme, la densité de charge magnétique ξ s'annule, mais une densité superficielle ξ_s existe à la surface de la sphère : $\xi_s = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M} = M \cos \theta$. La relation (4.28) donne donc

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \int d\Omega' \frac{\cos \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.29)$$

où $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$, (θ', φ') étant les coordonnées d'un point de source sur la sphère. Si γ est l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{r}' , on peut écrire

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \int d\Omega' \cos \theta' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (4.30)$$

où $r_{<} = r$, $r_{>} = a$ si $r < a$ et vice-versa si $r > a$. On utilise ensuite la formule d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.31)$$

Substituons cette expression dans Φ_m , en remarquant que $\cos \theta' = C Y_{10}(\theta', \varphi')$, avec $C = \sqrt{4\pi/3}$:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \frac{4\pi}{2l+1} C \sum_{l,m} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int d\Omega' Y_{10}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.32)$$

La relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques nous permet d'intégrer sur Ω' :

$$\int d\Omega' Y_{10}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \delta_{l1} \delta_{m0} \quad (4.33)$$

Il ne reste donc que

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} a^2 M \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (4.34)$$

On en déduit que si $r > a$, alors

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} M a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (r > a) \quad (4.35)$$

Ce qui implique que \mathbf{H} ($= \mathbf{B}$) a la forme dipolaire (3.43). On remarque que le moment dipolaire associé est alors égal à M fois le volume de la sphère. À l'intérieur de la sphère, on a plutôt $\Phi_m = \frac{4}{3} \pi M z$, ce qui implique

$$\mathbf{H} = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{M} \quad \mathbf{B} = \frac{8}{3} \pi \mathbf{M} \quad (4.36)$$

Le champ \mathbf{H} s'oppose donc à l'aimantation, contrairement à \mathbf{B} .

D Énergie électromagnétique

Dans le vide, on peut associer au champ électromagnétique une densité d'énergie donnée par l'expression (2.19) et un flux d'énergie donné par le vecteur de Poynting (2.20). Qu'en est-il dans un milieu, en fonction des champs macroscopiques? Nous allons montrer que, si le milieu est linéaire, alors ces formules sont remplacées par celles-ci :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (4.37)$$

et

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (4.38)$$

Pour le démontrer, il suffit de reprendre les calculs de la section C mais d'y utiliser cette fois les équations de Maxwell (4.18).

Comme avant, la puissance communiquée aux particules chargées est

$$\frac{dK}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.39)$$

En substituant pour \mathbf{J} son expression tirée de la loi d'Ampère, on trouve

$$\frac{dK}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \left(\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \quad (4.40)$$

Utilisons ensuite la relation suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (4.41)$$

où nous avons utilisé la loi de Faraday dans la dernière équation. En substituant pour $\mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}$, on trouve

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (4.42)$$

Le dernier terme peut être transformé en intégrale de surface. Supposons maintenant que le milieu considéré est linéaire, de sorte que \mathbf{H} est proportionnel à \mathbf{B} en tout temps, comme \mathbf{D} est proportionnel à \mathbf{E} . Le premier terme peut alors s'écrire comme une dérivée. On trouve finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ K + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right\} = - \oint_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{S} \quad (4.43)$$

Ce qui confirme l'interprétation de la densité d'énergie \mathcal{E} définie en (4.37) et du vecteur de Poynting défini en (4.38).

Problèmes

Problème 4.1

Montrez que le champ électrique à l'intérieur d'une sphère uniformément polarisée est uniforme et donné par $\mathbf{E} = -(4\pi/3)\mathbf{P}$. Montrez ensuite que le champ électrique \mathbf{E}_s existant dans une cavité sphérique au sein d'un milieu diélectrique uniformément polarisé est relié au champ \mathbf{E} dans le milieu par

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad (4.44)$$

Indice : considérez deux sphères chargées uniformément (avec des charges égales mais opposées) superposées avec un déplacement relatif.

Problème 4.2

Considérez un disque aimanté de rayon a et d'épaisseur h , tel que $h \ll a$ (disque mince). Ce disque porte une aimantation uniforme $\mathbf{M} = M\mathbf{z}$ (on prend \mathbf{z} le long de l'axe de symétrie du disque). Calculez \mathbf{B} et \mathbf{H} au centre du disque, le long de l'axe de symétrie [considérez par exemple l'origine $(0, 0, 0)$ au milieu du disque et un point sur la surface : $(0, 0, h/2)$]. Faites le calcul de deux façons différentes : (a) à l'aide de la loi de Biot-Savart et du courant lié. (b) à l'aide de la 'charge magnétique' et du potentiel scalaire magnétique.

Problème 4.3

Considérez une sphère de rayon a faite d'un matériau diélectrique linéaire de constante ε . Cette sphère est plongée dans un champ électrique externe uniforme $\mathbf{E} = E_0\mathbf{z}$. Le milieu à l'extérieur de la sphère est de constante diélectrique $\varepsilon = 1$.

A Calculez \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{P} partout. Indice : utilisez la solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques, avec symétrie azimutale, et appliquez les conditions aux limites appropriées.

B Quel est le moment dipolaire induit sur cette sphère par le champ externe ?

Problème 4.4

Considérez une sphère creuse de rayon intérieur a et de rayon extérieur b ($b > a$), faite d'un matériau diélectrique linéaire de constante ε . Cette sphère est plongée dans un champ électrique externe uniforme $\mathbf{E} = E_0\mathbf{z}$. Le milieu à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère est de constante diélectrique $\varepsilon = 1$.

A Calculez \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{P} partout. Indice : utilisez la solution générale de l'équation de Laplace en

coordonnées sphériques, avec symétrie azimutale, et appliquez les conditions aux limites appropriées. N'hésitez pas à utiliser un logiciel de calcul symbolique pour résoudre les équations qui en résultent.

B Quel est le moment dipolaire induit sur cette sphère par le champ externe ?

Problème 4.5

Un matériau supraconducteur a la propriété d'exclure tout champ magnétique de son intérieur. Ainsi, si on plonge un corps supraconducteur dans un champ magnétique uniforme, une densité superficielle de courant \mathbf{K} sera induite à la surface du supraconducteur pour annuler le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. Considérons une sphère supraconductrice de rayon a , plongée dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}$. L'objet de ce problème est de calculer le champ magnétique partout à l'extérieur de la sphère et de calculer la densité superficielle de courant induite.

A Sachant que la seule source de courant se trouve sur la surface de la sphère, écrivez le champ \mathbf{B} à l'extérieur comme le gradient d'une fonction ($\mathbf{B} = -\nabla\Phi_m$) et trouvez \mathbf{B} partout à l'extérieur en résolvant l'équation de Laplace pour Φ_m , avec les conditions aux limites appropriées, à savoir que la composante normale de \mathbf{B} doit s'annuler à la surface de la sphère. Quel est le dipôle magnétique induit de la sphère ? Pourquoi peut-on utiliser l'équation de Laplace dans ce problème ?

B Trouvez la densité superficielle de courant \mathbf{K}' sur la sphère, à partir de la solution trouvée plus haut.

C Décrivez les ressemblances et les différences entre ce problème et celui d'une sphère conductrice plongée dans un champ électrique uniforme en ce qui a trait aux conditions aux limites et aux lignes de champ.

D Trouvez une expression possible pour le potentiel vecteur \mathbf{A} à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.

CHAPITRE 5

Ondes planes dans le vide et les diélectriques

On étudie dans cette section les principales caractéristiques de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire et isotrope, caractérisé par une constante diélectrique $\varepsilon(\omega)$ qui dépend de la fréquence.

A Ondes planes et représentation complexe

Dans cette sous-section nous allons établir les formes possibles d'une onde électromagnétique plane se propageant dans un milieu linéaire et isotrope. Rappelons qu'une onde est qualifiée de *plane* si elle se propage dans une direction bien définie et de *monochromatique* si elle possède une fréquence bien définie. Nous désignerons par ω la fréquence angulaire (en radians par seconde) d'une telle onde et par \mathbf{k} son vecteur d'onde. Si $\hat{\mathbf{k}}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation, alors le vecteur d'onde s'exprime comme suit en fonction de la longueur d'onde λ :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \quad (5.1)$$

Soit $\psi(\mathbf{r}, t)$ une quantité se propageant sous la forme d'une onde monochromatique plane, par exemple une composante du champ électrique ou magnétique. Une telle onde peut être représentée de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \psi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \} \quad (5.2)$$

où ψ_0 est un nombre complexe – souvent appelé *amplitude complexe* de l'onde – et 'Re' signifie que l'on doit prendre la partie réelle de ce qui suit. L'utilisation des nombres complexes est ici très utile, car elle permet d'inclure dans une seule quantité ψ_0 à la fois l'amplitude et la phase de l'onde. En effet, en écrivant $\psi_0 = |\psi_0| e^{i\phi}$ (ϕ est l'argument de ψ_0), on peut exprimer l'onde comme suit :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi_0| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (5.3)$$

Le module de ψ_0 décrit donc l'amplitude de l'onde et son argument ϕ est la phase de l'onde à $\mathbf{r} = 0$ et $t = 0$.

Dans le cas d'une onde électromagnétique, il est pratique d'incorporer dans un même vecteur complexe \mathbf{E}_0 les amplitudes complexes de toutes les composantes du champ électrique (et pareillement pour le champ magnétique). On écrit donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right\} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right\}\end{aligned}\quad (5.4)$$

Il faut cependant garder à l'esprit que les différentes composantes de \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 peuvent avoir des phases différentes. Dans ce qui suit, nous allons généralement omettre le symbole 'Re' et il sera implicite qu'il faut toujours considérer la partie réelle des expressions impliquant une exponentielle oscillante et une amplitude complexe.

Contraintes imposées par les équations de Maxwell

Les amplitudes complexes \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 ne sont pas arbitraires : elles sont contraintes par les équations de Maxwell. Nous allons maintenant démontrer que, dans un milieu linéaire et isotrope de constante diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ , elles doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \mathbf{B}_0 = n \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_0 \quad (5.5)$$

où n est l'indice de réfraction, défini comme suit en fonction des constantes du milieu :

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (5.6)$$

De plus, nous allons montrer que la fréquence est déterminée par le vecteur d'onde :

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} |\mathbf{k}| = v_p |\mathbf{k}| \quad (5.7)$$

où $v_p = c/n$ est la vitesse de phase de l'onde. Notons qu'on peut utiliser indifféremment $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ ou (\mathbf{E}, \mathbf{B}) dans ces formules, car le facteur exponentiel oscillant est commun à \mathbf{E} et \mathbf{B} .

Pour démontrer tout ceci, il suffit de substituer la forme (5.4) dans les équations de Maxwell (4.18) en l'absence de charge libre ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$). Étant donné la linéarité de ces équations, la restriction à la partie réelle en (5.4) est transparente. L'effet des opérateurs différentiels sur l'exponentielle est purement multiplicatif :

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (5.8)$$

On obtient donc les relations suivantes, dans le même ordre qu'en (4.18) :

$$\varepsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.10)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0 + \frac{\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5.12)$$

Prenons le produit vectoriel de \mathbf{k} par (5.10) :

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0) - \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.13)$$

Étant donné que

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 k^2 = -\mathbf{E}_0 k^2 \quad (5.14)$$

en vertu de (5.9) et que

$$-\frac{\omega}{c} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 \quad (5.15)$$

en vertu de (5.12), on trouve bel et bien la relation de dispersion (5.7), qui sert en quelque sorte de relation de compatibilité des équations (5.9–5.12). Par la suite, les relations (5.5) s’obtiennent immédiatement de (5.9) et (5.10).

Nous avons donc démontré les relations (5.5) et (5.7). Décrivons maintenant leur contenu physique. Les relations $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ et $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ expriment le fait que les ondes électromagnétiques sont transversales, c’est-à-dire que la quantité oscillante (\mathbf{E} ou \mathbf{B}) est perpendiculaire à la direction de propagation ($\hat{\mathbf{k}}$). La relation (5.5) signifie aussi que le champ magnétique de l’onde est entièrement déterminé par le champ électrique et par l’indice de réfraction. Les trois vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 forment une triade orientée. Il est donc courant de se concentrer sur le champ électrique et de n’exprimer le champ magnétique que lorsqu’absolument nécessaire. La relation (5.7) détermine la vitesse de phase de l’onde en fonction des constantes du milieu et de la vitesse de la lumière dans le vide. Nous verrons bientôt que les constantes ε et μ dépendent généralement de la fréquence, de sorte que la vitesse de phase dépend aussi de la fréquence, ce qui cause une dispersion des ondes non monochromatiques. L’avantage de considérer des ondes monochromatiques plutôt qu’une onde de forme arbitraire est justement que cette dépendance en fréquence des constantes du milieu invalide l’équation d’onde (2.50) et rend nécessaire de considérer une fréquence ω bien déterminée pour simplifier la discussion. Nous verrons plus bas (sous-section D) comment combiner des ondes de fréquences différentes.

B Polarisation

La *polarisation* d'une onde plane est la direction que prend le vecteur \mathbf{E} dans l'espace, en particulier en fonction du temps à un point donné. Elle est déterminée par les phases relatives des composantes transverses de l'amplitude vectorielle \mathbf{E}_0 . Choisissons l'axe des z parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} . On peut alors exprimer \mathbf{E}_0 comme suit :

$$\mathbf{E}_0 = (E_1\mathbf{x} + E_2\mathbf{y}) \quad (5.16)$$

où les amplitudes $E_{1,2}$ sont complexes. Le champ électrique est alors

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ (E_1\mathbf{x} + E_2\mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \} \quad (5.17)$$

ou, en mettant les phases des composantes en évidence :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ (|E_1| e^{i\alpha}\mathbf{x} + |E_2| e^{i\beta}\mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \} \quad (5.18)$$

Pour bien comprendre l'évolution du champ électrique dans le temps, plaçons-nous à une position fixe (l'origine). Les composantes du champ électrique sont alors :

$$E_x = |E_1| \cos(\omega t - \alpha) \quad E_y = |E_2| \cos(\omega t - \beta) \quad (5.19)$$

Considérons maintenant les cas particuliers suivants :

1. les phases α et β diffèrent par un multiple de π : $\beta = \alpha + n\pi$. Dans ce cas, $\cos(\omega t - \beta) = \pm \cos(\omega t - \alpha)$ (le signe dépend si n est pair (+) ou impair (-)) et le rapport E_y/E_x est constant dans le temps :

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \quad (5.20)$$

La direction du champ est donc constante dans le temps. On qualifie cette polarisation de *linéaire*.

2. les phases α et β diffèrent par un multiple impair de $\pi/2$, ce qui est équivalent à $\beta = \alpha \pm \pi/2$. Dans ce cas, $\cos(\omega t - \beta) = \cos(\omega t - \alpha \mp \pi/2) = \pm \sin(\omega t - \alpha)$. Les composantes de \mathbf{E} sont alors

$$E_x = |E_1| \cos(\omega t - \alpha) \quad E_y = \pm |E_2| \sin(\omega t - \alpha) \quad (5.21)$$

Si $|E_1| = |E_2|$, alors le champ \mathbf{E} trace, en fonction du temps, un cercle dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k} . On parle alors de polarisation *circulaire*. Si le champ tourne dans le sens anti-horaire pour un observateur qui voit l'onde se diriger vers lui (signe +), on dit que la polarisation est *levogyre* (ou *senestogyre*, ou de polarisation circulaire *gauche*). Dans le cas contraire (signe -), elle est *dextogyre* (ou de polarisation circulaire *droite*). On montre qu'une onde levogyre possède un moment cinétique dans la direction du vecteur d'onde. On dit alors qu'elle possède une *hélicité positive*. Dans le cas contraire (onde dextogyre), l'hélicité est *négative*. Si $|E_1| \neq |E_2|$, le champ électrique trace une ellipse, dont les axes principaux sont parallèles à \mathbf{x} et \mathbf{y} . On dit alors que la polarisation est *elliptique*.

Traitons maintenant le cas de phases α et β quelconques. On montre alors que le champ \mathbf{E} trace une ellipse dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k} , mais les axes principaux de cette ellipse sont différents de \mathbf{x} et \mathbf{y} . Une rotation des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} (c'est-à-dire un choix différent des vecteurs de base) nous ramènerait au cas précédent avec ($|E_1| \neq |E_2|$). La polarisation est elliptique. La preuve en est relativement simple : Écrivons le vecteur amplitude comme $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{i\phi}$, où la phase ϕ est choisie de manière à ce que le carré du vecteur \mathbf{b} soit réel. Décomposons aussi les vecteurs \mathbf{E}_0 et \mathbf{b} en parties réelle et imaginaire, comme suit : $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}_r + i\mathbf{b}_i$. Il est toujours possible de choisir ϕ de manière à annuler la partie imaginaire de \mathbf{b}^2 , car

$$\text{Im } \mathbf{b}^2 = \text{Im} (\mathbf{E}_0^2 e^{-2i\phi}) = 2 \cos(2\phi) \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i - (\mathbf{E}_r^2 - \mathbf{E}_i^2) \sin(2\phi) \quad (5.22)$$

Pour que cette expression s'annule, il suffit de choisir la phase ϕ de manière à respecter la condition

$$\tan(2\phi) = 2 \frac{\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_r^2 - \mathbf{E}_i^2} \quad (5.23)$$

ce qui est toujours possible pour des vecteurs \mathbf{E}_r et \mathbf{E}_i donnés, car la fonction $\tan(x)$ prend toutes les valeurs réelles. D'un autre côté, la partie imaginaire de \mathbf{b}^2 est égale à $2\mathbf{b}_r \cdot \mathbf{b}_i$. Étant nulle, les deux vecteurs \mathbf{b}_r et \mathbf{b}_i sont orthogonaux. On peut donc choisir les nouveaux axes \mathbf{x}' et \mathbf{y}' le long de ces deux vecteurs. Dans cette base, l'amplitude complexe du champ électrique est alors

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\phi} (b_r \mathbf{x}' + i b_i \mathbf{y}') \quad (5.24)$$

où b_r et b_i sont des constantes réelles. On retourne donc au cas (2) ci-dessus, le long d'axes différents, cependant.

On peut montrer que l'angle ψ que fait l'un des axes principaux de l'ellipse avec l'axe des x est tel que

$$\tan(2\psi) = 2 \frac{|E_1 E_2|}{|E_1|^2 - |E_2|^2} \cos(\alpha - \beta) \quad (5.25)$$

De plus, les demi-axes principaux b_r et b_i de cette ellipse sont tels que

$$b_r^2 + b_i^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 \quad (5.26)$$

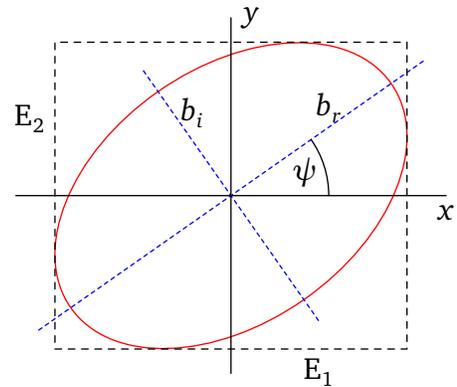


FIGURE 5.1

Tracé du champ électrique sur le plan xy dans le cas général d'une polarisation elliptique.

Donnons ici une preuve que la polarisation générale est elliptique.

Vecteurs de base complexes

On peut aussi choisir des vecteurs de base complexes, mieux adaptés à la description de la polarisation circulaire, comme suit :

$$\epsilon_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \quad \epsilon_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - i\mathbf{y}) \quad (5.27)$$

Une onde à polarisation circulaire gauche peut alors s'écrire comme

$$\mathbf{E} = A\epsilon_+ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.28)$$

alors que ϵ_- décrit la polarisation circulaire droite. Une onde à polarisation linéaire peut, quant à elle, toujours s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{E} = A\epsilon e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.29)$$

où ϵ est un vecteur *réel*. Or, tout vecteur unitaire réel peut être écrit comme une combinaison linéaire de ϵ_+ et de ϵ_- :

$$\epsilon = e^{i\alpha}\epsilon_+ + e^{-i\alpha}\epsilon_- \quad (5.30)$$

pour une valeur réelle donnée de α . On peut donc considérer une onde à polarisation linéaire comme une superposition de polarisations circulaires de phases opposées. La polarisation elliptique, par contre, est une superposition de polarisations linéaires de phases et d'amplitudes quelconques. En général, on peut donc écrire

$$\mathbf{E}_0 = (E_+\epsilon_+ + E_-\epsilon_-) \quad (5.31)$$

où les amplitudes E_{\pm} sont complexes.

C Densité et flux d'énergie d'une onde monochromatique

Considérons la densité d'énergie et le flux d'énergie associés à une onde monochromatique de fréquence ω se propageant dans un milieu linéaire. Décomposons l'amplitude de l'onde en ses parties réelle et imaginaire : $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i$, où $\mathbf{E}_{r,i}$ sont des vecteurs *réels*. À une position donnée, on peut écrire

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i)e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_r \cos \omega t + \mathbf{E}_i \sin \omega t \quad (5.32)$$

et de même pour les autres vecteurs en jeu (\mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D}). La densité d'énergie dans un milieu linéaire est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (5.33)$$

Dans le cas présent, elle devient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \varepsilon (\mathbf{E}_r \cos \omega t + \mathbf{E}_i \sin \omega t)^2 + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_r \cos \omega t + \mathbf{B}_i \sin \omega t)^2 \right\} \quad (5.34)$$

En développant le carré et en prenant la moyenne temporelle, on obtient

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{16\pi} (\varepsilon [\mathbf{E}_r^2 + \mathbf{E}_i^2] + [\mathbf{B}_r^2 + \mathbf{B}_i^2]/\mu) \quad (5.35)$$

où nous avons utilisé les moyennes temporelles

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0 \quad (5.36)$$

On peut donc exprimer la densité d'énergie comme

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{16\pi} \left\{ \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}|^2 \right\} \quad (5.37)$$

où la notation $|\mathbf{E}|^2$ signifie la somme des modules carrés des composantes du vecteur \mathbf{E} . Notons qu'on peut utiliser \mathbf{E} ou \mathbf{E}_0 indifféremment dans cette formule puisque $e^{-i\omega t}$ n'est qu'un facteur de phase.

Une formule analogue s'obtient pour le vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{S} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle (\mathbf{E}_r \cos \omega t + \mathbf{E}_i \sin \omega t) \wedge (\mathbf{H}_r \cos \omega t + \mathbf{H}_i \sin \omega t) \rangle \\ &= \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_r \wedge \mathbf{H}_r + \mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) \quad (5.39)$$

Restreignons maintenant ces résultats au cas d'une onde plane. Dans ce cas, le champ \mathbf{B} est donné par $n\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}$ et on trouve

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n}{\mu} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{k}} = \langle \mathcal{E} \rangle \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} \quad (5.40)$$

Cette dernière relation signifie que le flux d'énergie provient de la densité d'énergie \mathcal{E} se propageant à la vitesse de phase c/n .¹

D Décomposition spectrale

Nous avons montré ci-haut qu'une onde plane de la forme (5.4) est une solution des équations de Maxwell dans un milieu linéaire et isotrope, pourvu que les conditions (5.5) et (5.7) soient respectées. Les équations de Maxwell étant linéaires, une superposition d'ondes planes monochromatiques en est encore une solution acceptable. Une telle superposition a la forme d'une intégrale sur tous les vecteurs d'onde :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (5.41)$$

L'amplitude $\mathbf{E}_0(\mathbf{k})$ est en fait la transformée de Fourier (en dimension trois) du champ électrique au temps zéro $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$. Elle peut être isolée en écrivant la transformée de Fourier inverse :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) = \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (5.42)$$

Il n'est peut-être pas évident que l'onde décrite par (5.41) est la solution la plus générale possible aux équations de Maxwell en l'absence de sources ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$). C'est pourtant le cas et nous allons maintenant le démontrer dans le reste de cette section (toute personne convaincue de ce fait peut passer à la section suivante). Considérons une configuration quelconque $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ du champ électrique et exprimons-la en fonction de sa transformée de Fourier en position et en temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3r dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.43)$$

On écrit des expressions similaires pour \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H} . Par convention, un tilde ($\tilde{}$) désignera la transformée de Fourier. Puisque les champs sont réels, la contrainte suivante doit être respectée par la transformée de Fourier :

$$\tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, -\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.44)$$

1. Parce que n dépend de la fréquence, ceci n'est vrai que pour une onde parfaitement monochromatique : en général, l'énergie se déplace à la *vitesse de groupe* de l'onde.

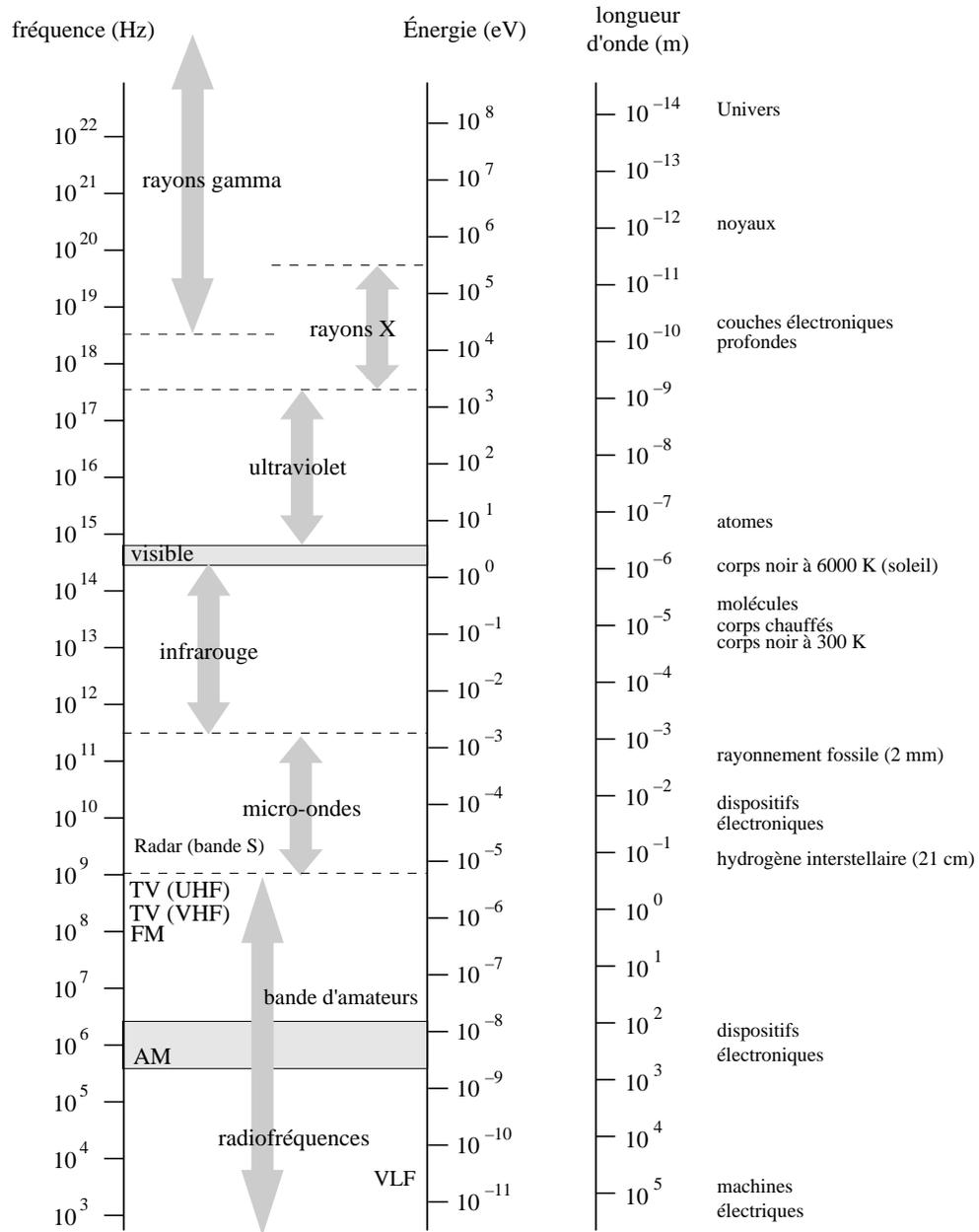


FIGURE 5.2
Spectre des ondes électromagnétiques. À droite, on donne les sources typiques.

où une étoile (*) désigne la conjugaison complexe. Cette contrainte se déduit simplement de l'équation (5.43) :

$$\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3r dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (5.45)$$

Écrivons maintenant les équations de Maxwell (en l'absence de sources) en fonction des transformées de Fourier des champs \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H} . Les opérateurs différentiels deviennent multiplicatifs en fonction des transformées de Fourier :

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (5.46)$$

et les équations de Maxwell peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}} &= 0 \\ \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{B}} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= 0 \\ \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{H}} + \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{D}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ces équations ont l'avantage d'être plus facilement applicables aux matériaux linéaires dont la susceptibilité (électrique ou magnétique) dépend de la fréquence (et même du vecteur d'onde) du champ appliqué :

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \mu(\omega)\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.48)$$

On retrouve donc les équations (5.9–5.12), sauf qu'elles sont satisfaites par les transformées de Fourier en vecteur d'onde et en fréquence et non par les amplitudes complexes d'ondes planes. En procédant aux mêmes manipulations que dans ce qui suit les équations (5.9–5.12), on trouve les contraintes suivantes sur les transformées de Fourier :

1. La fréquence est déterminée par le vecteur d'onde via la relation de dispersion $\varepsilon\mu\omega^2 = c^2k^2$, ou encore $\omega = \pm\omega(\mathbf{k})$, où on a défini la fonction $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|/n$.
2. Pour une valeur donnée de \mathbf{k} , les vecteurs $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et \mathbf{k} sont orthogonaux entre eux et forment une triade orientée : $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = (c/\omega)\mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$.

Pour être une solution des équations de Maxwell, toute transformée de Fourier $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$ doit donc respecter les contraintes $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ et $\omega = \pm\omega(\mathbf{k})$. On peut donc écrire, *en toute généralité*,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k})\pi\delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) + \mathbf{E}'_0(\mathbf{k})\pi\delta(\omega + \omega(\mathbf{k})) \quad (5.49)$$

(le facteur π est introduit pour simplifier les expressions ultérieures) où $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ et $\mathbf{E}'_0(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$. Mais il faut aussi que la contrainte $\tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, -\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}, \omega)$ soit respectée, pour toute valeur de \mathbf{k} et ω , ce qui implique

$$\mathbf{E}_0(-\mathbf{k})\pi\delta(\omega + \omega(\mathbf{k})) + \mathbf{E}'_0(-\mathbf{k})\pi\delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) = \mathbf{E}_0^*(\mathbf{k})\pi\delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) + \mathbf{E}'_0^*(\mathbf{k})\pi\delta(\omega + \omega(\mathbf{k})) \quad (5.50)$$

ce qui implique nécessairement que $\mathbf{E}'_0(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_0^*(-\mathbf{k})$. On peut donc finalement écrire

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k})\pi\delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) + \mathbf{E}_0^*(-\mathbf{k})\pi\delta(\omega + \omega(\mathbf{k})) \quad (5.51)$$

Si on substitue maintenant cette solution dans la transformée de Fourier (5.43), on trouve

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} + \mathbf{E}_0^*(-\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega(\mathbf{k})t)}) \quad (5.52)$$

En faisant le changement de variable d'intégration $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ dans le deuxième terme, on trouve finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{k}) e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega(\mathbf{k})t)}) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} + \text{conjugué complexe} \\ &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ceci démontre finalement que la solution (5.41) découle de la décomposition (5.43) et des équations de Maxwell : c'est la *solution générale* des équations de Maxwell en l'absence de source.

E Lumière partiellement polarisée et paramètres de Stokes

Une onde monochromatique est une idéalisation, impossible à réaliser en pratique puisqu'elle doit s'étendre sur tout l'espace et le temps, ce qui implique une énergie infinie. En réalité nous devons considérer un *paquet d'ondes*, c'est-à-dire une superposition d'ondes monochromatiques de fréquences voisines centrées autour d'une fréquence ω_0 : la transformée de Fourier de ce paquet d'ondes n'est pas une fonction delta, mais une fonction finie, ayant un pic autour de ω_0 . Si la largeur de ce pic en fréquences est $\Delta\omega$, la durée du paquet d'ondes est $\Delta t \sim 1/\Delta\omega$. Si la durée d'un train d'onde est de Δt , la longueur du train d'onde, ou *longueur de cohérence*, est $\xi_c \sim c\Delta t \sim c/\Delta\omega$. La longueur de cohérence d'un faisceau lumineux dépend beaucoup du type de source utilisé :

1. Une source basée sur les transitions atomiques dans un gaz (une lampe à arc, par exemple) produit une longueur de cohérence de l'ordre du millimètre ou moins. La largeur en fréquence $\Delta\omega$ de cette source provient de deux facteurs : (i) une largeur intrinsèque, associée à la demi-vie de l'état excité de l'atome qui retourne à l'état fondamental par un processus appelé *émission spontanée*. La largeur intrinsèque est typiquement de l'ordre du GHz, ce qui correspond à une longueur de l'ordre du mètre. (ii) une largeur thermique, provenant de l'effet Doppler. En effet, dans un gaz chaud, les molécules étant en mouvement rapide, les photons émis par des molécules différentes subissent des effets Doppler différents en raison de la distribution thermique des vitesses des molécules. L'élargissement thermique des raies qui en résulte est généralement plus important que l'élargissement intrinsèque, sauf aux températures très basses.² Ceci fait que la longueur de cohérence réelle d'une lampe à arc est fortement réduite ($10^{-4} - 10^{-3}$ m).

2. La nécessité de construire des horloges atomiques extrêmement précises, basées sur des largeurs de raies non élargies par l'effet Doppler thermique, a suscité la construction de trappes à atomes dans lesquelles un petit nombre d'atomes peut être refroidi à des températures extrêmement basses ($\sim 10^{-9}$ K). Le prix Nobel de physique de 1997 a été attribué aux pionniers de cette méthode.

lumière solaire filtrée (0.4-0.8 μm)	800 nm
lampe à arc (sodium)	600 μm
laser He-Ne multimode	20 cm
laser He-Ne monomode	300 m

TABLE 5.1
Longueurs de cohérences typiques de diverses sources

2. Une source laser peut facilement produire une longueur de cohérence de l'ordre de $10^2 - 10^3\text{m}$. Dans un laser, les photons sont émis par un processus appelé *émission stimulée*, au cours duquel l'émission d'un photon est justement stimulée par la présence d'une onde de mêmes vecteur d'onde et polarisation. Les photons sont émis exactement en phase avec ceux déjà présents, ce qui donne au total une onde très cohérente. La longueur de cohérence du laser est limitée non pas par la largeur intrinsèque de la transition en émission spontanée, mais par la qualité de la cavité optique.
3. Une source basée sur le rayonnement du corps noir (une lampe à incandescence, ou le soleil) produit un continuum de fréquences et l'équivalent de la largeur de raie est ici l'étendue spectrale $\Delta\omega$ de la source, qui est énorme. La situation peut être améliorée en utilisant des filtres, mais la longueur de cohérence demeure très petite même dans ce cas (quelques dizaines de longueurs d'onde).

Les trains d'onde émis par une source sont polarisés dans une direction quelconque, aléatoire et dictée par les moments cinétiques des états initial et final de l'atome ou de la molécule (dans le cas de l'émission par un gaz). Une onde macroscopique est une superposition de plusieurs petits paquets d'ondes qui ne se recouvrent pas et sont émis tour à tour à des instants aléatoires. Ces différents paquets d'ondes ne sont pas *en phase*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être considérés comme faisant partie d'une seule onde monochromatique : leurs amplitudes se superposent en moyenne pour donner zéro. Une onde de ce type est dite *incohérente*. Une onde incohérente peut toutefois être polarisée si les polarisations de tous les paquets d'ondes sont identiques. Également, si les paquets d'ondes polarisés dans une direction donnée ont été éliminés (en tout ou en partie) par un moyen quelconque (polaroïd, réflexion), l'onde résultante est qualifiée de polarisée. En résumé, une onde cohérente est toujours polarisée de façon linéaire, circulaire ou elliptique. Une onde incohérente (ou *quasi monochromatique*) peut être non polarisée ou polarisée à un degré quelconque. Voyons comment caractériser cela de manière quantitative.

Une onde quasi monochromatique peut être représentée comme une onde monochromatique dont l'amplitude E_0 varie lentement dans le temps. Ici, 'lentement' réfère à une échelle de temps grande par rapport à la fréquence inverse ω^{-1} , mais qui peut quand même être de l'ordre de 10^{-9} seconde dans le domaine optique ! Pour caractériser les amplitudes moyennes, on définit le tenseur suivant :

$$I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle \quad (a, b = 1, 2) \quad (5.54)$$

où $\langle \dots \rangle$ signifie une moyenne dans le temps et seules les composantes dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde \mathbf{k} sont incluses. La matrice I_{ab} est manifestement hermitienne ($I_{ab}^* = I_{ba}$). On peut donc la représenter comme une combinaison linéaire des matrices de Pauli et de la matrice identité :

$$I_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(s_0 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (5.55)$$

où \mathbf{s} est le vecteur (s_1, s_2, s_3) . Les quatre paramètres $s_{0,1,2,3}$ sont appelés *paramètres de Stokes*. En fonction des composantes E_1 et E_2 , ces paramètres sont³

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle |E_1|^2 + |E_2|^2 \rangle \\ s_1 &= 2 \operatorname{Re} \langle E_2 E_1^* \rangle \\ s_2 &= 2 \operatorname{Im} \langle E_2 E_1^* \rangle \\ s_3 &= \langle |E_1|^2 - |E_2|^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.56)$$

La trace $I = I_{11} + I_{22} = s_0$ est toujours proportionnelle à l'intensité de l'onde. On définit aussi le tenseur normalisé $\rho_{ab} = I_{ab}/I$. Le degré de polarisation d'une onde est relié au déterminant de ce tenseur :

$$\det \rho = \frac{1}{4s_0^2} \begin{vmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\mathbf{s}^2}{s_0^2} \right) \quad (5.57)$$

La lumière *naturelle* (ou *non polarisée*) est par définition telle que $\rho_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$, autrement dit $\mathbf{s} = 0$. Cela signifie que l'amplitude du champ électrique est en moyenne la même dans toutes les directions. Dans ce cas, le déterminant est $\det \rho = \frac{1}{4}$. Par contre, la lumière monochromatique polarisée est caractérisée par un déterminant nul. En effet, dans ce cas, les valeurs moyennes peuvent être omises et

$$\det(I_{ab}) = |E_1|^2 |E_2|^2 - (E_1 E_2^*)(E_1^* E_2) = 0 \quad (5.58)$$

Donc, dans le cas d'une onde monochromatique, on a la contrainte

$$s_0^2 = \mathbf{s}^2 \quad (\text{onde monochromatique}) \quad (5.59)$$

On définit le *degré de polarisation* P d'une onde quasi monochromatique comme

$$P = \frac{\mathbf{s}^2}{s_0^2} \quad \text{ou} \quad \det \rho = \frac{1}{4}(1 - P) \quad (5.60)$$

$P = 1$ pour une onde monochromatique (complètement polarisée) et $P = 0$ pour une onde non polarisée. Pour une valeur donnée de P , l'onde peut être polarisée de deux façons différentes, car il reste alors deux paramètres de Stokes indépendants, disons s_2 et s_3 (car $s_1^2 = s_0^2 P - s_2^2 - s_3^2$). Ces paramètres donnent l'importance relative des deux polarisations linéaires et des deux polarisations circulaires dans l'onde incohérente.

Toute onde quasi monochromatique peut être formellement représentée comme la superposition incohérente de deux ondes complètement polarisées. Expliquons : par définition, lors d'une superposition incohérente de deux ondes, aucune interférence n'est possible et seules les intensités s'additionnent. Plus précisément, on additionne alors les tenseurs I_{ab} des deux ondes (ou leurs paramètres de Stokes). Or, pour une onde partiellement polarisée, ce tenseur est toujours hermitien ($I_{ab}^* = I_{ba}$) et donc diagonalisable avec valeurs propres réelles. Appelons les vecteurs propres orthonormés de ce tenseur $\mathbf{n}^{(1)}$ et $\mathbf{n}^{(2)}$ et les valeurs propres correspondantes λ_1 et λ_2 . On peut donc écrire le tenseur I_{ab} comme

$$I_{ab} = \lambda_1 n_a^{(1)} n_b^{(1)*} + \lambda_2 n_a^{(2)} n_b^{(2)*} \quad (5.61)$$

3. Ces définitions sont différentes de celles de JACKSON, qui sont obtenues des nôtres en faisant $s_2 \rightarrow s_3$, $s_3 \rightarrow s_1$ et $s_1 \rightarrow s_2$.

C'est le résultat annoncé : le tenseur I_{ab} est la somme (donc superposition incohérente) de deux termes, chacun des deux termes décrivant une onde complètement polarisée (parce que les vecteurs $\mathbf{n}^{(1,2)}$ sont comme le vecteur amplitude \mathbf{E}_0 et donc la contrainte $s_0^2 = \mathbf{s}^2$ est satisfaite pour chacun d'entre eux). Maintenant, on peut toujours choisir l'orientation des axes et la phase du vecteur propre $\mathbf{n}^{(1)}$ telles que $\mathbf{n}^{(1)} = (b_1, ib_2)$, où b_1 et b_2 sont réels. En raison de l'orthogonalité $\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(2)*} = 0$ et de l'arbitraire dans la phase de $\mathbf{n}^{(2)}$, on peut alors choisir $\mathbf{n}^{(2)} = (ib_2, b_1)$. Ceci signifie que les deux ondes incohérentes sont de polarisations elliptiques de même excentricité, mais dont les axes principaux sont tournés de 90 degrés l'un par rapport à l'autre. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 , quant à elles, représentent les intensités de ces deux ondes.

Problèmes

Problème 5.1

Un milieu est caractérisé par une constante diélectrique $\varepsilon(\mathbf{r})$ qui dépend de la position ; par exemple, une fibre optique à gradient d'indice, ou même l'atmosphère, dans laquelle l'indice de réfraction dépend de l'altitude.

A Montrez qu'une onde monochromatique de fréquence ω est alors régie par les équations suivantes :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} \right) \quad \nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \mathbf{B} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) \quad (5.62)$$

B Supposons que la constante diélectrique ne varie que dans une direction (disons z). Montrez qu'une onde plane du type

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.63)$$

est impossible à réaliser (avec \mathbf{k} constant), à moins que ε soit une constante. Indice : l'application d'une des équations de Maxwell (sans dire laquelle) permet de démontrer ce fait en deux lignes.

C Toujours en supposant que la constante diélectrique ne varie qu'en fonction de z , montrez qu'il est possible de poser le type de solution suivant :

$$\mathbf{E} = E(z)\mathbf{x} \quad \mathbf{B} = B(z)\mathbf{y} \quad (5.64)$$

et obtenez les équations différentielles qui nous permettent, en principe, de déterminer les deux fonctions $E(z)$ et $B(z)$. Trouvez aussi une expression pour $B(z)$ en fonction de la dérivée de $E(z)$, en utilisant la loi de Faraday.

CHAPITRE 6

Théorie de la constante diélectrique

Dans cette section nous étudions l'origine de la constante diélectrique, en particulier de sa dépendance en fréquence. Cette dépendance est la cause de la *dispersion* d'un paquet d'ondes non monochromatique. Nous examinerons un modèle classique simple pour la dépendance en fréquence de la constante diélectrique dans divers matériaux : le modèle de Drude. Il va sans dire qu'un calcul sérieux de la constante diélectrique doit faire appel aux notions de la mécanique quantique et de la mécanique statistique. Cependant, le modèle de Drude nous permettra de dégager certaines caractéristiques essentielles, surtout pour les gaz, les liquides, les métaux et les plasmas.

A Polarisation

Les propriétés électriques d'un matériau (disons, un isolant) dépendent de la façon précise avec laquelle un champ électrique externe induit une polarisation \mathbf{P} dans le matériau. Dans l'hypothèse où le matériau est linéaire, c'est-à-dire réagit linéairement à un champ électrique appliqué, la forme la plus générale de la polarisation \mathbf{P} induite par un champ électrique appliqué \mathbf{E} est la suivante :

$$P_a(\mathbf{r}, t) = \int dt' d^3r' \chi_{ab}(\mathbf{r}', t') E_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad (6.1)$$

où la fonction $\chi_{ab}(\mathbf{r}', t')$ est la *fonction de réponse électrique* du matériau, ou *susceptibilité électrique*, ou *polarisabilité*. $\chi_{ab}(\mathbf{r}', t')$ est la composante a ($a = x, y, z$) de la polarisation causée à \mathbf{r} , au temps t , par la composante b d'un champ électrique de grandeur unité à $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, au temps $t - t'$. C'est un tenseur dans le cas le plus général, c'est-à-dire pour un cristal à structure non cubique. Dans les liquides, les gaz et les verres, ce tenseur a une forme isotrope $\chi_{ab} = \delta_{ab}\chi$. Restreignons-nous à ce cas plus simple. On écrit alors

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int dt' d^3r' \chi(\mathbf{r}', t') \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad (6.2)$$

Le fait que la susceptibilité dépende de la position et du temps relatifs est crucial : il indique que l'induction d'une polarisation à (\mathbf{r}, t) ne se fait pas directement par le champ électrique, mais indirectement, en raison de l'interaction entre les différents degrés de liberté du système. Considérons par exemple un champ électrique localisé dans l'espace et le temps à (\mathbf{r}_1, t_1) (ceci est bien sûr impossible,

même en principe, mais il ne s'agit ici que d'un argument basé sur le principe de superposition). Ce champ électrique a une influence directe sur le nuage électronique à ce point-là et à ce moment-là. Ce nuage électronique est ensuite modifié à d'autres points en raison du mouvement de l'électron et de son interaction avec ses voisins, les noyaux, etc. Il se crée donc, à des temps ultérieurs, une polarisation au voisinage du point \mathbf{r}_1 . La distance ℓ sur laquelle une polarisation est créée autour de \mathbf{r}_1 est intimement liée à la portée des interactions électron-électron dans le matériau, ou à la distance typique que parcourt un électron. Le temps τ au bout duquel cette polarisation s'estompe est le temps que prend un électron pour compléter son 'orbite', c'est-à-dire le temps associé à la différence des niveaux d'énergies, $\tau \sim \hbar/\Delta E$. On s'attend à ce que la fonction $\chi(\mathbf{r}', t')$ tende vers zéro quand $|\mathbf{r}'| \gg \ell$ et $t' \gg \tau$.

La relation (6.2) est beaucoup plus simple en transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) &= \int dt d^3r \int dt' d^3r' \chi(\mathbf{r}', t') \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \\ &= \int dt' d^3r' \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \chi(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' + i\omega t'} \\ &= \chi(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)\end{aligned}\quad (6.3)$$

(les tildes sur les champs dénotent les transformées de Fourier ; on utilise habituellement le même symbole χ pour sa transformée de Fourier). Dans la deuxième équation, l'ordre des intégrations a été changé et le changement de variables $(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t')$ a été effectué. La relation linéaire entre polarisation et champ électrique est donc directe dans l'espace de Fourier. Autrement dit, la polarisation est la *convolution* du champ électrique appliqué $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et de la susceptibilité électrique $\chi(\mathbf{r}, t)$. Il s'ensuit que

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi\chi(\mathbf{k}, \omega) \quad (6.4)$$

La constante diélectrique $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ dépend en général de la fréquence et du vecteur d'onde.

Absence de dépendance en vecteur d'onde de la constante diélectrique

La dépendance en vecteur d'onde de la constante diélectrique est généralement négligeable. Voici pourquoi : nous avons vu que la fonction $\chi(\mathbf{r}, t)$ est négligeable si $|\mathbf{r}| \gg \ell$, où ℓ est la longueur caractéristique du mouvement des électrons. Ceci implique que la transformée de Fourier $\chi(\mathbf{k}, \omega)$ est indépendante de \mathbf{k} quand $|\mathbf{k}|\ell \ll 1$.¹ Cette condition peut aussi s'exprimer comme $\ell \ll \lambda$. Dans un isolant, la distance caractéristique ℓ est de l'ordre de la distance interatomique. Dans un conducteur, ℓ est plutôt de l'ordre du libre parcours moyen des électrons. Par contre, la longueur d'onde (dans le domaine optique ou moins) est considérablement plus grande que cela ($> 10^{-7}\text{m}$).

1. Comme exemple simple illustrant cette propriété générale, considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} lA & |x| < \ell \\ 0 & |x| > \ell \end{cases}$$

La transformée de Fourier de cette fonction est

$$\tilde{f}(k) = 2A\ell \frac{\sin(k\ell)}{k\ell}$$

Or, quand $k\ell \ll 1$, ceci tend vers une constante $2A\ell$.

Considérons, pour être plus précis, une transition atomique. L'ordre de grandeur de la fréquence est donné par $\omega \sim e^2/\hbar a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr. La longueur d'onde associée est alors grosso modo $2\pi c/\omega \sim 2\pi a_0(c\hbar/e^2) = 2\pi a_0/\alpha$, où $\alpha \approx 1/137$ est la constante de structure fine. En somme, les longueurs d'onde associées aux fréquences atomiques sont plus grandes que les dimensions atomiques par un facteur α (ceci n'est qu'un ordre de grandeur). Par conséquent, la dépendance en vecteur d'onde de $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ est généralement négligeable dans le domaine $|\mathbf{k}| \sim \omega/c$ si ω est une fréquence atomique.

Les exceptions à cette règle se produisent quand ℓ est beaucoup plus grand que la distance interatomique. Ceci se produit dans les métaux à très basse température : le libre parcours moyen devient très grand dans un échantillon très propre à très basse température. La longueur caractéristique devient alors la longueur de de Broglie thermique des électrons

$$\ell \sim \lambda_T = \frac{\hbar v_F}{k_B T} \quad (6.5)$$

où v_F est la vitesse de Fermi (c'est-à-dire la vitesse des électrons au niveau de Fermi). À suffisamment basse température, cette longueur est suffisamment grande pour permettre une mesure de la dépendance en \mathbf{k} de ε et une caractérisation de la surface de Fermi.² Une autre exception de choix est l'état supraconducteur, encore une fois dans la limite propre. La distance caractéristique est alors la longueur de cohérence des paires de Cooper, qui est de l'ordre de 10^{-6} – 10^{-7} m dans un supraconducteur conventionnel de type I. Nous négligerons ces cas d'exception dans ce qui suit, comme nous négligerons la dépendance en \mathbf{k} de la constante diélectrique.

Relations de Kramers-Krönig

Le principe de causalité impose une condition évidente à la fonction $\chi(\mathbf{r}', t')$: elle doit s'annuler si $t' < 0$, car le champ électrique futur ne peut influencer la polarisation présente. Une conséquence de cette causalité sont les relations de Kramers-Krönig, que nous démontrons dans l'annexe C :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\varepsilon}(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{\varepsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \operatorname{Im} \hat{\varepsilon}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\varepsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ces relations permettent d'exprimer la partie réelle de $\hat{\varepsilon}$ en fonction d'une intégrale de sa partie imaginaire et vice-versa. On remarque que la constante diélectrique ne peut pas être toujours réelle : sa partie imaginaire doit être non nulle, au moins dans un certain domaine de fréquence. Nous verrons plus bas que cette partie imaginaire est le reflet de l'absorption des ondes électromagnétiques par le milieu.

Indice de réfraction complexe

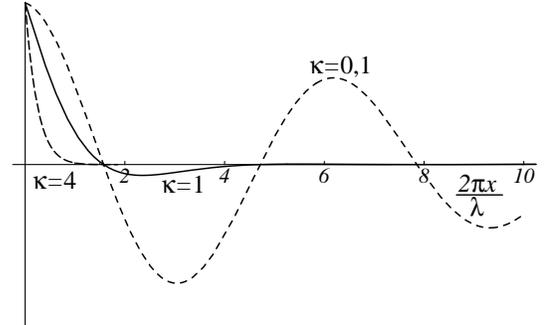
Une constante diélectrique complexe signifie qu'une onde électromagnétique traversant le milieu est atténuée, car le nombre d'onde k a une partie imaginaire (cette partie imaginaire doit être positive). Cette atténuation résulte bien sûr de la dissipation d'énergie représentée par le facteur d'amortissement γ_a . La provenance de ce facteur est multiple, mais ne peut pas être parfaitement comprise dans

2. En anglais, on appelle ce phénomène *anomalous skin effect*. Voir J.M. ZIMAN, *Principles of the Theory of solids*, 2^e éd., p. 282.

le seul cadre classique. La dissipation d'énergie provient d'un transfert d'énergie en provenance du mouvement oscillatoire de l'électron vers d'autres formes d'excitations, tel le rayonnement d'ondes électromagnétiques (on parle alors d'amortissement radiatif) ou d'ondes sonores (phonons). Ce dernier mécanisme ne joue pas dans le cas des gaz, et conséquemment γ est plus petit dans ce cas.

FIGURE 6.1

Illustration de l'amortissement d'une onde dans un milieu dissipatif, pour trois valeurs du coefficient d'extinction κ . L'onde est incidente sur le milieu en $x = 0$ et possède la même amplitude initiale dans les trois cas.



l'indice de réfraction complexe associé est $\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}}$. On le décompose en parties réelle et imaginaire comme suit :

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}} = n(1 + i\kappa) \quad (6.7)$$

La relation de dispersion $k = (\omega/c)\hat{n}$ signifie que le nombre d'onde est complexe si la fréquence est réelle. La dépendance spatiale d'une onde monochromatique plane est alors

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(\omega n x/c - \omega t)} e^{-\omega n \kappa x/c} \quad (6.8)$$

(ψ représente une composante quelconque des champs électrique ou magnétique). L'onde est atténuée sur une distance caractéristique $c/(\kappa n \omega) = \lambda/2\pi\kappa$. On constate que κ , souvent appelé *coefficient d'extinction*, est le rapport de la longueur d'onde à la distance d'atténuation. Un milieu à forte atténuation aura $\kappa \gg 1$ et vice-versa. La vitesse de phase de l'onde est toujours reliée à la partie réelle de l'indice de réfraction : $v = c/n$. On introduit souvent le *coefficient d'atténuation* $\alpha = \omega n \kappa/c$, de sorte que l'atténuation de l'onde se lit $e^{-\alpha x}$.

B Modèle de Drude

Le modèle de Drude nous permet d'obtenir la forme générale de la dépendance en fréquence de la constante diélectrique, en considérant l'atome comme un oscillateur ou comme un ensemble d'oscillateurs. Dans ce modèle, l'électron (ou le nuage électronique) est lié harmoniquement au noyau, avec une fréquence caractéristique ω_0 . En fait, pour une espèce donnée d'atome, on doit supposer qu'il existe plusieurs oscillateurs indépendants, un pour chaque fréquence caractéristique ω_a de l'atome associée à une transition possible d'énergie $\hbar\omega_a$.

Nous désirons étudier la réponse d'un tel oscillateur à l'imposition d'un champ électrique externe oscillant à une fréquence ω . Supposons que ce champ a une polarisation linéaire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (6.9)$$

Ce champ exerce une force $-e\mathbf{E}$ sur l'électron. L'électron subit aussi une force de rappel $-m\omega_0^2\mathbf{r}$. On suppose en outre qu'il existe une force de friction proportionnelle à la vitesse de l'électron. L'équation du mouvement pour l'électron est donc

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.10)$$

où m est la masse de l'électron, γ est le coefficient de friction par unité de masse et ω_0 est la fréquence d'oscillation libre (en l'absence de force externe).

La solution générale de cette équation linéaire non homogène est la somme d'une solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène. Cette dernière, en raison du terme d'amortissement γ , constitue un régime transitoire que nous pouvons négliger. La solution du régime permanent est de la forme $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$. Substituant dans l'équation du mouvement, on obtient

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (6.11)$$

Le mouvement oscillant de l'électron équivaut à l'induction d'un dipôle oscillant $\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}$ où

$$\mathbf{d}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (6.12)$$

Supposons maintenant qu'un milieu comporte ρ molécules par unité de volume, N oscillateurs par molécule et qu'une fraction f_a de ces oscillateurs ait une fréquence caractéristique ω_a et un amortissement γ_a . La polarisation \mathbf{P} étant le moment dipolaire par unité de volume, on conclut que

$$\mathbf{P} = \frac{\rho e^2}{m} \mathbf{E} N \sum_a \frac{f_a}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_a} \quad \left(\sum_a f_a = 1 \right) \quad (6.13)$$

La susceptibilité électrique est alors

$$\chi(\omega) = \frac{\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad (6.14)$$

où nous avons défini

$$\Gamma(\omega) = N \sum_a \frac{f_a}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_a} \quad (6.15)$$

qui dépend des détails de la composition du milieu, mais non de sa densité. La constante diélectrique est alors

$$\hat{\epsilon} = 1 + \frac{4\pi\rho e^2}{m}\Gamma(\omega) = 1 + \omega_p^2\Gamma(\omega) \quad (6.16)$$

où on a défini la *fréquence de plasma* ω_p :

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\rho e^2}{m} \quad (6.17)$$

(on vérifie facilement que ω_p a effectivement les unités d'une fréquence). Nous verrons un peu plus bas qu'il s'agit de la fréquence d'oscillations libres d'un plasma de densité volumique ρ . Comme $\Gamma(\omega)$ est complexe, la constante diélectrique l'est aussi – d'où l'accent (^) – et un déphasage est possible entre **E** et **D**.

Indice de réfraction dans un gaz

Dans les gaz la densité est suffisamment petite pour que $\hat{\epsilon} - 1$ soit très petit. On peut alors faire l'approximation

$$\sqrt{\hat{\epsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\omega_p^2\Gamma(\omega) \quad (6.18)$$

Séparons les parties réelle et imaginaire :

$$\sqrt{\hat{\epsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\omega_p^2(\Gamma'(\omega) + i\Gamma''(\omega)) \quad (6.19)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma'(\omega) &= N \sum_a \frac{f_a(\omega_a^2 - \omega^2)}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_a^2} \\ \Gamma''(\omega) &= N \sum_a \frac{f_a\omega\gamma_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_a^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

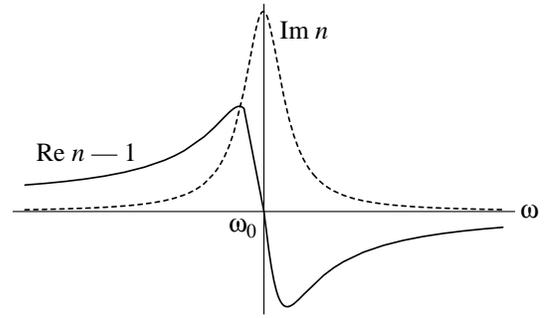
Examinons la forme de (6.20) pour un seul type d'oscillateur avec fréquence propre ω_0 et amortissement γ . La partie réelle de l'indice de réfraction tend vers la valeur

$$n(0) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (6.21)$$

quand $\omega \rightarrow 0$. Elle augmente ensuite jusqu'à $\omega = \omega_1 < \omega_0$, fréquence à laquelle $dn/d\omega = 0$. Dans cette plage de fréquence la dispersion est dite *normale*, parce que $dn/d\omega > 0$. La lumière bleue est alors réfractée davantage que la lumière rouge et la partie imaginaire $n\kappa$ est relativement petite. Cette partie imaginaire est toujours positive, augmente de zéro vers un maximum à $\omega = \omega_0$, pour ensuite diminuer. La partie réelle est égale à 1 à $\omega = \omega_0$, pour ensuite être < 1 . Une partie réelle < 1 signifie que la vitesse de phase est plus grande que c . La partie réelle atteint un minimum à $\omega = \omega_2 > \omega_0$, pour ensuite remonter vers 1. Dans la plage de fréquence $\omega_1 < \omega < \omega_2$ la dispersion est dite *anormale*, parce que $dn/d\omega < 0$. La vitesse de phase augmente alors avec la fréquence ($dv/d\omega > 0$) et l'absorption peut être importante. Le milieu est alors relativement opaque.

FIGURE 6.2

Parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction près d'une fréquence propre ω_0 , en fonction de ω/ω_0 . La partie réelle est illustrée relative à $n = 1$.



C Équation de Clausius-Mossoti

La constante diélectrique (6.16) calculée plus haut n'est applicable qu'aux milieux relativement dilués, tel les gaz, pour la raison suivante : on a supposé que le champ local \mathbf{E} ressenti par l'électron était le même que le champ macroscopique traversant le milieu. Ceci est valable pour les gaz, car l'effet de la polarisation d'une molécule sur sa distante voisine est négligeable. Dans les liquides et les solides, il faut cependant distinguer \mathbf{E}' , le champ local en un point précis, du champ macroscopique \mathbf{E} .

Considérons par exemple un liquide, c'est-à-dire un milieu isotrope. Prélevons de ce liquide une sphère microscopique qui contient, supposons, une seule molécule en moyenne. Si \mathbf{P} est la polarisation du milieu, on démontre que le champ local à l'intérieur de cette sphère est

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad (6.22)$$

C'est ce champ qui est appliqué aux électrons de la molécule qui s'y trouve. La relation (6.13) doit alors être remplacée par la relation suivante :

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \right] \frac{\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad (6.23)$$

Considérant que $\mathbf{P} = (\hat{\epsilon} - 1)\mathbf{E}/4\pi$, on en déduit que $\mathbf{E} + (4\pi/3)\mathbf{P} = \frac{1}{3}(2 + \hat{\epsilon})\mathbf{E}$ et l'équation ci-haut se réduit à

$$\frac{\hat{\epsilon} - 1}{\hat{\epsilon} + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad (6.24)$$

Il s'agit de l'équation de Clausius-Mossoti. On peut facilement isoler la constante diélectrique, mais l'équation se présente mieux ainsi.

En fonction de l'indice de réfraction $\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}}$, l'équation de Clausius-Mossoti prend la forme

$$\frac{\hat{n}^2 - 1}{\hat{n}^2 + 2} \frac{1}{\rho} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \Gamma(\omega) = \text{const.}(\omega) \quad (6.25)$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de la densité moyenne ρ mais uniquement du type de molécule impliqué et de la fréquence, il est indépendant de la température.³ Cette relation porte le

3. Ceci n'est strictement vrai que si les molécules sont non polaires, car seule la polarisabilité électronique est considérée ici. Cependant, aux fréquences optiques, seule la contribution électronique est importante de toute manière.

nom d'équation de Lorentz-Lorenz et permet de déduire la dépendance en température de l'indice de réfraction d'un liquide (ou d'un gaz) si on sait comment la densité dépend de la température.

Notons que l'équation de Clausius-Mossoti (ou celle de Lorentz-Lorenz) ne peut s'appliquer aux solides en général, en raison du manque d'anisotropie au plan microscopique, qui nous empêche de considérer une sphère comme habitacle moyen d'une molécule.

D Fréquence de plasma

Un plasma est un gaz chaud d'atomes ionisés. Dans un tel milieu, les charges (ions et électrons) ne sont pas liées ($\omega_0 = 0$) et l'amortissement est très faible ($\gamma \sim 0$) car il provient surtout du rayonnement d'ondes électromagnétiques par les particules chargées. On peut facilement y appliquer le résultat (6.16), en supposant que la seule fréquence de résonance présente est nulle ($\omega_0 = 0$) et que $\gamma = 0$. On obtient dans ce cas la constante diélectrique suivante :

$$\hat{\epsilon} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.26)$$

Si $\omega > \omega_p$, la constante diélectrique est positive et l'indice de réfraction est réel : il y a propagation. Si, au contraire, $\omega < \omega_p$, la constante $\hat{\epsilon}$ est réelle négative et l'indice de réfraction est imaginaire, ce qui signifie une extinction de l'onde. Autrement dit, si $\omega < \omega_p$, la fréquence de l'onde est suffisamment petite pour laisser au plasma le temps de réagir face au champ \mathbf{E} de l'onde incidente en se réarrangeant pour annuler le champ total \mathbf{E}_{tot} dans le milieu. L'onde est alors amortie dans le plasma et complètement réfléchie.

La relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un plasma est plutôt simple. Comme $\omega^2 = c^2 k^2 / \hat{\epsilon}$, on trouve

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (6.27)$$

La vitesse de phase v_p est donnée par

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \quad (6.28)$$

alors que la vitesse de groupe v_g est plutôt donnée par

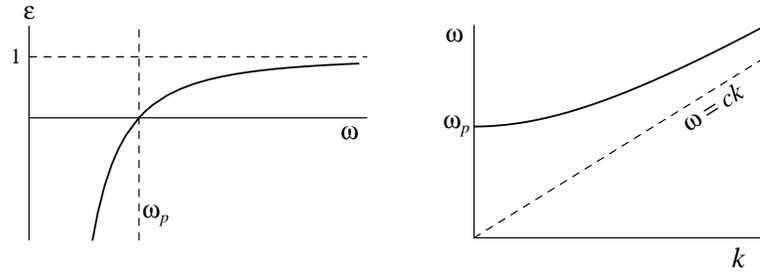
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} \quad (6.29)$$

On constate que la vitesse de phase est toujours plus grande que c , tandis que la vitesse de groupe est toujours inférieure à c , comme il se doit, puisque l'énergie et l'information se propagent à la vitesse de groupe. Nous retrouverons ce type de relation de dispersion plus tard, lors de l'étude des guides d'onde.

À ce stade une question importante se pose. Les électrons du plasma constituent-ils une charge liée ou une charge libre, du point de vue des champs macroscopiques ? Nous les avons traités ici comme

FIGURE 6.3

À gauche : schéma de la constante diélectrique du plasma en fonction de la fréquence. À droite : relation de dispersion $\omega(k)$ correspondante.



s'ils constituaient une charge liée, parce que nous avons représenté leur effet par une constante diélectrique. En fait, la distinction entre charge liée et libre est largement matière de convention. Il est pratique de considérer la charge d'un plasma comme étant liée et d'appliquer à ces milieux le formalisme des champs macroscopiques et de la constante diélectrique. De toute façon, à fréquence non nulle, les charges en question ne se déplacent pas sur de grandes distances et sont donc effectivement liées. L'exception se produit notablement à fréquence nulle, où traiter une charge physiquement libre comme si elle était liée mène à une constante diélectrique infinie. Cette remarque s'applique particulièrement aux conducteurs (voir plus bas).

Oscillations libres d'un plasma

La fréquence ω_p est la fréquence à laquelle le plasma peut avoir des oscillations collectives libres. Pour s'en convaincre, considérons une portion de plasma affectant la forme d'une plaque d'épaisseur a et d'aire $A \gg a^2$. Supposons que le nuage d'électrons dans le plasma est déplacé collectivement d'une distance x par rapport au nuage d'ions ($x \ll a$). Comme le plasma est neutre au total, l'effet de ce déplacement est de créer une densité surfacique de charge $\rho_s = \pm \rho_e x$ de chaque côté de la plaque. Le champ électrique induit entre les plaques est alors $E = 4\pi\rho_s$ et la force de rappel exercée sur chaque électron est (on considère les composantes selon x)

$$F = -eE = -4\pi\rho_e e^2 x = -m\omega_p^2 x \quad (6.30)$$

Cette force est linéaire en x ; le mouvement associé est donc harmonique, avec fréquence $\omega = \omega_p$.

Plasmons

Dans la théorie quantique, cette oscillation collective d'un plasma à la fréquence ω_p est quantifiée comme pour un oscillateur harmonique. L'énergie associée à une telle oscillation est supérieure à celle de l'état fondamental par un multiple entier de $\hbar\omega_p$. Ces oscillations quantifiées sont appelées *plasmons*, de la même façon qu'une onde sonore dans un solide est constituée de phonons. On peut détecter ces excitations de plasma quand des électrons d'énergie modérée ($\sim 10^2 - 10^3$ eV) passent au travers d'un film métallique. On constate alors que l'énergie perdue par l'électron au passage est un multiple entier de $\hbar\omega_p$; l'électron a alors cédé une partie de son énergie en créant au passage un nombre entier de plasmons.⁴

L'ionosphère

L'ionosphère, comme son nom l'indique, comporte une bonne densité de matière ionisée. On peut donc lui appliquer les considérations ci-haut sur les plasmas. La densité ρ étant beaucoup plus faible

4. On doit cependant distinguer les plasmons de volume des plasmons de surface ; ces derniers constituent une oscillation collective de la densité électronique surfacique et ont un comportement différent des plasmons de volume. Mais nous laisserons ce sujet au cours de physique de l'état solide.

	$\lambda_p^{(\text{exp.})}$ (nm)	$\lambda_p^{(\text{théor.})}$ (nm)
Li	155	155
Na	210	209
K	315	287
Rb	340	322

TABLE 6.1

Longueurs d'onde de plasma mesurées et calculées pour certains métaux alcalins ou alcalino-terreux. Ici $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$.

que pour les métaux, la fréquence plasma ω_p est beaucoup plus petite, de sorte que la lumière visible est transmise sans problèmes, alors que les ondes radio sont atténuées et par conséquent réfléchies dans l'atmosphère. Ce principe est utilisé dans la communication radio : les ondes radio peuvent, par réflexions multiples sur l'ionosphère et la surface terrestre (et les océans), se propager jusqu'aux antipodes. Pour communiquer avec les satellites, il faut plutôt utiliser des ondes dites *courtes*, qui auront une fréquence supérieure à ω_p et pourront donc traverser l'ionosphère. En pratique, l'angle d'incidence de l'onde sur l'ionosphère est important : même si $\omega > \omega_p$, il peut y avoir réflexion totale interne de l'onde vers la Terre pour un angle d'incidence suffisamment grand. D'autre part, la densité d'électrons libre varie selon l'activité solaire et surtout selon l'heure de la journée. Les détails de la propagation et de la réflexion des ondes radios par l'ionosphère peuvent donc être relativement compliqués.

E Plasma en champ magnétique : magnétosphère

L'ionosphère devient la *magnétosphère* lorsque le champ magnétique terrestre vient à jouer un rôle non négligeable. Retournons à l'équation du mouvement d'un électron libre en présence d'une onde électromagnétique incidente et du champ magnétique terrestre \mathbf{B} . On négligera l'effet du champ magnétique de l'onde incidente, qui est beaucoup plus faible que l'effet de son champ électrique, ainsi que l'amortissement radiatif :

$$m\ddot{\mathbf{r}} - (e/c)\mathbf{B} \wedge \dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.31)$$

La polarisation de l'onde n'avait pas d'importance jusqu'ici. L'introduction d'un champ externe \mathbf{B} crée une anisotropie : on s'attend donc à une relation de dispersion qui dépendra de la direction de l'onde par rapport à \mathbf{B} et aussi de la polarisation. Supposons, pour simplifier les choses, que l'onde incidente est parallèle au champ magnétique, selon l'axe \mathbf{z} . Comme l'onde est transverse, l'électron ne subira aucune force dans la direction z . On peut alors se concentrer sur son mouvement dans le plan xy . L'équation ci-haut devient

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (eB/c)\dot{y} &= -eE_{0x} e^{-i\omega t} \\ m\ddot{y} - (eB/c)\dot{x} &= -eE_{0y} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Il s'agit de deux équations différentielles linéaires couplées (du premier ordre en \dot{x} et \dot{y}). La méthode de solution habituelle consiste à supposer une solution en régime permanent du type

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad (6.33)$$

En substituant dans le système d'équations, on trouve une équation matricielle pour les amplitudes (x_0, y_0) :

$$\omega \begin{pmatrix} \omega & i\omega_c \\ -i\omega_c & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \quad (6.34)$$

Nous pourrions résoudre cette équation immédiatement, mais il est préférable de diagonaliser ce système matriciel. Les valeurs propres λ de la matrice ci-haut et les vecteurs propres normalisés correspondants sont

$$\begin{aligned} \lambda = \omega + \omega_c &: \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \\ \lambda = \omega - \omega_c &: \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) \end{aligned} \quad (6.35)$$

La diagonalisation se fait à l'aide de la matrice unitaire dont les colonnes sont les vecteurs propres :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Le système matriciel d'équations différentielles devient alors

$$\omega U^\dagger \begin{pmatrix} \omega & i\omega_c \\ -i\omega_c & \omega \end{pmatrix} U U^\dagger \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{e}{m} U^\dagger \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

En définissant les combinaisons

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0 + iy_0 & \text{et} & \quad E_0 = E_{0x} + iE_{0y} \\ \bar{u}_0 &= x_0 - iy_0 & & \quad \bar{E}_0 = E_{0x} - iE_{0y} \end{aligned} \quad (6.38)$$

on peut finalement écrire le système d'équations sous une forme découplée :

$$\omega \begin{pmatrix} \omega + \omega_c & 0 \\ 0 & \omega - \omega_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_0 \\ \bar{E}_0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

On en déduit les relations

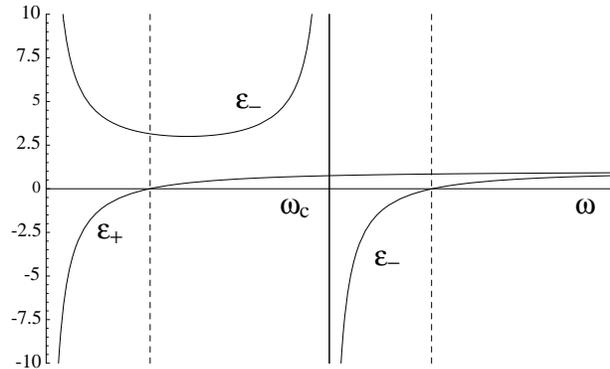
$$u_0 = \frac{eE/m}{\omega(\omega + \omega_c)} \quad \bar{u}_0 = \frac{e\bar{E}/m}{\omega(\omega - \omega_c)} \quad (6.40)$$

Il s'agit des deux solutions indépendantes du système d'équations différentielles (6.32). Pour les interpréter, considérons l'inverse des relations (6.38) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}(\bar{u}_0 + u_0) & \text{et} & \quad E_{x0} = \frac{1}{2}(\bar{E}_0 + E_0) \\ y_0 &= \frac{1}{2}i(\bar{u}_0 - u_0) & & \quad E_{y0} = \frac{1}{2}i(\bar{E}_0 - E_0) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Dans la première solution ($u_0 \neq 0$ et $\bar{u}_0 = 0$), la phase relative de E_y et E_x est $-i$, ce qui correspond à une polarisation circulaire droite. De même, le mouvement des électrons est circulaire droit (horaire). En présence du seul champ magnétique, un électron suivrait une orbite circulaire gauche (antihoraire) et donc le mouvement forcé des électrons ne peut pas entrer en résonance avec le mouvement naturel dans cette solution, ce qui se traduit par le dénominateur en $\omega + \omega_c$ en (6.40). Par contre, dans la deuxième solution ($u_0 = 0$ et $\bar{u}_0 \neq 0$), les sens sont inversés et il y a résonance à $\omega = \omega_c$ (en pratique, un petit terme d'amortissement intervient pour empêcher la divergence de \bar{u}_0).

FIGURE 6.4
Comportement de ε_{\pm} en fonction de ω/ω_c . Sur ce graphique on a supposé que $\omega_p = 0.7\omega_c$.



Les constantes diélectriques résultant de ces deux solutions sont réelles et correspondent à des polarisations tournant avec le champ électrique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ &= 1 - 4\pi\rho e \frac{e/m}{\omega(\omega + \omega_c)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \\ \varepsilon_- &= 1 - 4\pi\rho e \frac{e/m}{\omega(\omega - \omega_c)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Nous sommes en situation de biréfringence : la constante diélectrique – et donc l'indice de réfraction – dépend de la polarisation de l'onde (circulaire dans le cas présent). Le comportement en fréquence de ε_{\pm} est illustré sur la figure. On remarque différents régimes de fréquence :

1. Au-delà d'une certaine fréquence ω_2 , les deux constantes diélectriques sont positives et les deux polarisations se propagent, avec cependant des indices de réfraction différents. Le milieu possède alors ce qu'on appelle une *activité optique*, c'est-à-dire qu'il fait tourner le plan de polarisation d'une onde à polarisation linéaire au fur et à mesure de sa propagation. En effet, comme une onde à polarisation linéaire peut être considérée comme une superposition d'ondes circulaires et que ces deux composantes circulaires ont des vitesses de phase différentes, elles accumulent une différence de phase proportionnelle au chemin parcouru. Cette différence de phase détermine la direction de la polarisation linéaire résultante et cette dernière change donc de manière uniforme dans le temps, d'autant plus rapidement que $\varepsilon_+ - \varepsilon_-$ est grand. Cette biréfringence causée par un champ magnétique s'observe aussi dans les solides et porte alors le nom d'*effet Faraday*. Ce phénomène a été observé pour la première fois par Faraday dans le verre (avant la théorie électromagnétique de Maxwell) et ce dernier y a vu, avec raison, un signe que la lumière est un phénomène électromagnétique.
2. Dans l'intervalle $\omega_c < \omega < \omega_2$, ε_- est négatif et donc seule la polarisation droite se propage.
3. Dans l'intervalle $\omega_1 < \omega < \omega_c$, les deux constantes diélectriques sont positives, sauf que maintenant $\varepsilon_- > \varepsilon_+$ et la rotation du plan de polarisation se fait dans l'autre sens.
4. Si $\omega < \omega_1$, ε_+ est négatif et donc seule la polarisation gauche se propage. De plus, l'indice de réfraction $n_- - \sqrt{\varepsilon_-}$ se comporte comme $1/\sqrt{\omega}$ aux très basses fréquences. Le milieu devient alors très fortement dispersif avec dispersion anormale : les basses fréquences se propagent plus lentement. Ceci contribue à expliquer les longs sifflements descendants souvent entendus sur les ondes courtes (modes siffleurs) : il s'agit d'ondes électromagnétiques de basse fréquence émises par les orages un peu partout autour du globe. Ces ondes se propagent d'un bout à l'autre de la planète, emprisonnées qu'elles sont par l'ionosphère. La dispersion fait que la composante à haute fréquence de l'onde se propage plus vite avec une différence de temps de l'ordre de la seconde sur des distances de l'ordre du millier de kilomètres. Ainsi l'oreille humaine, par l'intermédiaire de la radio, peut percevoir le délai entre hautes et basses fréquences.

Expliquons maintenant, en complément, une autre façon de procéder à l'obtention des constantes diélectriques (6.42). Sachant que la polarisation induite s'exprime comme $\mathbf{P} = -e\rho\mathbf{r}$, où \mathbf{r} est le déplacement des électrons, l'éq. (6.34) nous indique que cette polarisation obéit à la relation suivante :

$$\omega \begin{pmatrix} \omega & i\omega_c \\ -i\omega_c & \omega \end{pmatrix} \mathbf{P}_\perp = -\frac{e^2\rho}{m} \mathbf{E}_\perp \quad (6.43)$$

où l'indice ' \perp ' indique qu'on prend ici les composantes perpendiculaires au champ magnétique et au vecteur d'onde. En inversant cette relation matricielle, on trouve

$$\mathbf{P}_\perp = -\frac{e^2\rho}{m} \frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \begin{pmatrix} \omega & -i\omega_c \\ i\omega_c & \omega \end{pmatrix} \mathbf{E}_\perp \quad (6.44)$$

Comme $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, ceci nous permet d'écrire la relation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ sous forme matricielle :

$$\mathbf{D}_\perp = \left\{ \mathbb{I} - \frac{4\pi\rho e^2}{m} \frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \begin{pmatrix} \omega & -i\omega_c \\ i\omega_c & \omega \end{pmatrix} \right\} \mathbf{E}_\perp \quad (6.45)$$

où \mathbb{I} est la matrice-unité. La constante diélectrique est donc un tenseur dans ce cas. Pour obtenir les modes propres de propagation, c'est-à-dire ceux qui se propagent à une fréquence et un vecteur

d'onde bien définis, il faut diagonaliser cette relation, à l'aide de la matrice U introduite plus haut :

$$U^\dagger \mathbf{D}_\perp = U^\dagger \varepsilon U U^\dagger \mathbf{E}_\perp \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

où $U^\dagger \varepsilon U$ est la matrice de la constante diélectrique diagonalisée. On trouve alors la relation diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} D \\ \bar{D} \end{pmatrix} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{\omega_p^2}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega + \omega_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega - \omega_c} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} E \\ \bar{E} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

où les combinaisons complexes (E, \bar{E}) sont définies comme en (6.38), et pareillement pour (D, \bar{D}) . Cette relation étant maintenant diagonale, on conclut que les polarisations E et \bar{E} , qui sont circulaires, se propagent avec les constantes diélectriques (6.42).

F Dispersion dans les conducteurs

Un conducteur est caractérisé par la présence d'électrons libres. En fonction du modèle de Drude, cela correspond au cas d'une fréquence de résonance nulle ($\omega_a = 0$). À la différence d'un plasma cependant, on ne peut négliger les facteurs d'amortissement. Soit ρ la densité d'électrons libres dans le milieu. Si on applique le résultat (6.16) à ce cas, on trouve

$$\hat{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (6.48)$$

Ici γ est la constante d'amortissement pour les électrons libres (directement liée à la résistivité) et ω_p est la 'fréquence plasma' associée à la densité d'électrons libres. Notons que la distinction entre conducteur et diélectrique n'a pleinement de sens qu'à fréquence nulle. Pour des fréquences non nulles, les phénomènes de conduction et de polarisation sont semblables, puisque tous les deux résultent du même mouvement périodique des électrons. La caractéristique d'un conducteur est simplement que la partie imaginaire de la constante diélectrique diverge quand $\omega \rightarrow 0$.

Expliquons maintenant la relation qui existe entre $\hat{\varepsilon}$ et la conductivité du milieu. Revenons à l'équation du mouvement d'un électron libre en présence d'un champ oscillant :

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.49)$$

La solution s'exprime en fonction de la vitesse de l'électron :

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{(e/m)\mathbf{E}}{\gamma - i\omega} \quad (6.50)$$

Si on suppose que tous les électrons du conducteur réagissent de la même façon au champ appliqué et que la densité d'électrons est ρ , la densité de courant est alors

$$\mathbf{J} = -\rho e \dot{\mathbf{r}} = \frac{(\rho e^2/m)\mathbf{E}}{\gamma - i\omega} \quad (6.51)$$

Par définition, la conductivité est la constante de proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique appliqué. On définit alors une conductivité complexe :

$$\hat{\sigma} = \frac{\rho e^2/m}{\gamma - i\omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{\gamma - i\omega} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega/\gamma} \quad (6.52)$$

où $\sigma_0 = \omega_p^2/4\pi\gamma$ est la conductivité dc (c'est-à-dire à fréquence nulle). La relation $\mathbf{J} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$, où $\hat{\sigma}$ est en général complexe, signifie que le courant n'est pas en phase avec le champ électrique appliqué. Notons que dans le système gaussien, la conductivité a les mêmes unités que la fréquence, tout comme le facteur d'amortissement γ et la fréquence plasma ω_p .

À des fréquences petites en comparaison de γ – à savoir le domaine infrarouge ou moins, pour la plupart des métaux – on peut utiliser l'approximation $\hat{\sigma} \approx \sigma_0$. Dans les bons conducteurs, l'amortissement γ est considérablement plus faible que la fréquence plasma ω_p . Comme $\sigma/\omega_p = \omega_p/4\pi\gamma$, ceci entraîne que la conductivité dc σ est grande devant la fréquence plasma : $\sigma \gg \omega_p$. Dans le cadre du modèle de Drude, il n'y a pas de différence profonde entre un plasma et un conducteur : tout dépend du régime de fréquence considéré. Si $\omega \gg \gamma$ on se trouve en présence d'un authentique plasma. Si, au contraire, $\omega \ll \gamma$, alors on se trouve en plein comportement métallique et on peut négliger la dépendance en fréquence de la conductivité, c'est-à-dire se limiter à la conductivité dc. Dans cette situation dite de 'basse fréquence', on peut écrire la constante diélectrique comme

$$\hat{\epsilon} = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \quad (6.53)$$

où σ et ϵ sont réels. On se trouve alors à négliger l'absorption autre que par les électrons libres. Cette forme de la conductivité sera souvent employée.

Remarquons qu'il serait illusoire d'espérer comprendre l'origine de la conductivité des métaux à l'aide du seul modèle de Drude. Ce modèle est purement classique, alors qu'un métal peut être considéré comme un gaz d'électrons très dégénéré, qui ne saurait donc être décrit sans l'aide de la mécanique quantique. En somme, le modèle de Drude permet de paramétrer les propriétés d'un conducteur à l'aide des constantes γ et ω_p , sans que l'on puisse interpréter littéralement γ comme une 'constante de frottement'. En fait, le facteur d'amortissement γ représente tout ce qui peut altérer la course d'un électron dans un solide : les impuretés du cristal, les vibrations du cristal (phonons) et les autres électrons.⁵

Indice de réfraction complexe dans un conducteur

Calculons maintenant l'indice de réfraction complexe $\hat{n} = n(1 + i\kappa)$, sans utiliser l'approximation $\omega \ll \gamma$, de sorte que le résultat sera valable même dans le domaine optique. On pose $\hat{\epsilon} = \hat{n}^2 =$

5. Contrairement à l'intuition classique, un électron se déplaçant dans un réseau cristallin d'ions parfaitement régulier ne rencontre aucune résistance, car son caractère ondulatoire lui fait traverser ce réseau sans altération de sa quantité de mouvement (ce sont les imperfections et vibrations du réseau qui sont la source de la résistance). Ce résultat est l'essence du théorème de Bloch (1930) et est le point de départ d'une compréhension sommaire des propriétés électroniques des métaux.

Chapitre 6. Théorie de la constante diélectrique

$n^2(1 - \kappa^2 + 2i\kappa)$ avec $\hat{\epsilon}$ tiré de (6.48). En identifiant les parties réelle et imaginaire, on trouve

$$\begin{aligned}n^2(1 - \kappa^2) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \\n^2\kappa &= \frac{1}{2\omega} \frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}\end{aligned}\tag{6.54}$$

Définissons la fréquence critique

$$\omega_c^2 = \omega_p^2 - \gamma^2\tag{6.55}$$

On peut alors écrire

$$n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{\omega_c^2 + \gamma^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad n^2\kappa = \frac{\gamma}{2\omega} \frac{\omega_c^2 + \gamma^2}{\omega^2 + \gamma^2}\tag{6.56}$$

On voit que $\kappa > 1$ si $\omega < \omega_c$ et vice-versa (gardons à l'esprit qu'en pratique, $\gamma \ll \omega_c \approx \omega_p$). Le milieu présente donc une forte atténuation aux basses fréquences, mais est relativement transparent aux fréquences élevées (il se comporte alors comme un plasma avec $\omega > \omega_p$). Pour les métaux alcalins, cette fréquence critique se situe dans l'ultraviolet.

G Propagation dans un conducteur

Rappelons que la relation de dispersion dans un milieu linéaire prend la forme $\omega^2 = c^2 k^2 / \mu \epsilon$ (nous restaurons, dans cette sous-section, la perméabilité magnétique). Dans un bon conducteur, à une fréquence assez basse ($\omega \ll \sigma$), on néglige la partie réelle de la constante diélectrique et cette relation devient

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{4\pi i \mu \sigma}{\omega} \quad (6.57)$$

L'indice de réfraction est alors

$$\hat{n}(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi i \mu \sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi \mu \sigma}{\omega}} (1 + i) \quad (6.58)$$

Le nombre d'onde associé à la fréquence (réelle) ω est alors

$$k = \frac{\omega}{c} \hat{n} = \frac{\sqrt{2\pi \mu \sigma \omega}}{c} (1 + i) = \frac{1 + i}{\delta} \quad (6.59)$$

où on a défini la *longueur de pénétration* δ :

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi \omega \sigma \mu}} \quad (6.60)$$

Le facteur exponentiel de propagation de l'onde dans le conducteur, disons, dans la direction x , est alors

$$e^{ikx - i\omega t} = e^{ix/\delta - i\omega t} e^{-x/\delta} \quad (6.61)$$

L'onde est donc amortie exponentiellement sur une distance δ (d'où l'appellation *longueur de pénétration*). δ est la longueur caractéristique d'amortissement du champ électrique dans le conducteur et varie en gros comme la racine carrée inverse de la fréquence. Un courant de haute fréquence se propageant dans un fil sera donc confiné à la surface de ce dernier, alors qu'un courant de basse fréquence en remplira tout l'intérieur. À 60 Hz, la longueur de pénétration des bons conducteurs est d'une fraction de centimètre et augmente notablement la résistance d'une ligne de transmission à haute tension, en comparaison de la transmission dc sur la même ligne. Dans la technologie micro-onde, la petitesse de la longueur de pénétration permet d'utiliser des conducteurs plutôt médiocres, quitte à vaporiser sur les surfaces une mince couche d'un excellent conducteur, car la conduction sera limitée à cette dernière.

Puisque $\mathbf{B} = \hat{n} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}$, le champ magnétique est forcément transverse, et orthogonal au champ électrique. Cependant, puisque \hat{n} est complexe, il y a différence de phase entre les champs électrique et magnétique. D'après l'équation (6.58), l'argument de l'indice de réfraction est $\pi/4$, et les champs électrique et magnétique sont donc déphasés de $\pi/4$. On voit facilement qu'à un endroit donné, le champ électrique s'annule un huitième de période avant le champ magnétique, alors qu'à un instant donné, il s'annule un huitième de longueur d'onde après le champ magnétique. Les deux champs sont aussi très différents en grandeur, car

$$|\mathbf{B}| = |\hat{n}| |\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{4\pi \mu \sigma}{\omega}} |\mathbf{E}| \quad (6.62)$$

et $|\hat{n}| \gg 1$ dans le régime de fréquences considéré. Le champ électrique de l'onde est donc beaucoup plus faible que le champ magnétique.

Substance	σ (Hz)	c/σ (nm)	δ à 60 Hz (cm)
Argent	$5,55 \times 10^{17}$	0,54	0,83
Cuivre	$5,22 \times 10^{17}$	0,57	0,85
Or	$4,10 \times 10^{17}$	0,73	0,96
Aluminium	$3,35 \times 10^{17}$	0,89	1,06
eau de mer	$3,6 \times 10^{10}$	$8,3 \times 10^{-3}$	32 m

TABLE 6.2
Conductivité de quelques substances à 295K.

Problèmes

Problème 6.1

Considérez un plasma et une onde électromagnétique incidente de longueur d'onde λ .

- A** Montrez que le vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{S} \rangle$ est nul si $\omega < \omega_p$.
- B** Exprimez en fonction de λ et du rayon classique de l'électron r_0 la densité critique ρ_c d'électrons au-delà de laquelle l'onde ne peut se propager.
- C** La densité de matière dans l'espace intersidéral est approximativement de un électron et un proton par cm^3 . À partir de quelle fréquence une onde électromagnétique peut-elle se propager dans un tel milieu? Faites attention au système d'unités utilisé! Exprimez votre réponse en fonction de la longueur d'onde (en cm).

Problème 6.2

Dans ce problème nous allons étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma avec champ magnétique, sans nécessairement supposer que \mathbf{k} est parallèle à \mathbf{B} . Nous allons également utiliser une méthode de démonstration légèrement différente de celle du cours. Soit ρ le nombre d'électrons par unité de volume dans le plasma et \mathbf{v} le champ de vitesse du «gaz d'électrons», de sorte que la densité de courant est $\mathbf{J} = -e\rho\mathbf{v}$ (e est la charge élémentaire). La densité moyenne est $\bar{\rho}$, de sorte que $\rho - \bar{\rho}$ représente le nombre de charges négatives en excès (par rapport au milieu neutre) par unité de volume. La densité de charge électrique est donc $-e(\rho - \bar{\rho})$.

En plus des équations de Maxwell microscopiques, nous allons considérer l'effet des champs électromagnétiques sur le mouvement du plasma. L'application de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sur un élément de

plasma mène à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (6.63)$$

Nous allons nous placer dans l'approximation linéaire, en ne conservant que les termes linéaires en \mathbf{v} et en $\rho - \bar{\rho}$.

Enfin, nous allons négliger l'effet du champ magnétique de l'onde sur le mouvement du plasma ; en revanche, nous supposons l'existence d'un champ magnétique statique $B\hat{\mathbf{n}}$, où $\hat{\mathbf{n}}$ est une direction quelconque.

A Considérez que toutes les quantités impliquées (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{v} et $\rho - \bar{\rho}$) sont des ondes planes, avec la même fréquence et le même vecteur d'onde \mathbf{k} (cette hypothèse ne s'applique pas au champ statique $B\hat{\mathbf{n}}$, bien sûr). Obtenez un ensemble d'équations gouvernant les amplitudes complexes de ces ondes.

B Exprimez \mathbf{v} en fonction de \mathbf{E} . Indice : utilisez les lois d'Ampère et de Faraday. Pour alléger, exprimez la densité $\bar{\rho}$ en fonction de la fréquence plasma ω_p .

C En vous servant de l'équation (6.63), démontrez l'équation suivante :

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_\perp + (\omega^2 - \omega_p^2) E_\parallel \hat{\mathbf{k}} + i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_\perp \wedge \hat{\mathbf{n}} + i \omega \omega_c E_\parallel \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (6.64)$$

où nous avons décomposé \mathbf{E} en composantes parallèle à $\hat{\mathbf{k}}$ (E_\parallel) et perpendiculaire à $\hat{\mathbf{k}}$ (E_\perp).

D Démontrez que la fréquence et le vecteur d'onde doivent respecter la relation suivante :

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2)^2 = \omega_c^2 (\omega^2 - c^2 k^2) \left\{ \omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) + \omega_p^2 c^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right\} \quad (6.65)$$

Indice : choisissez un système d'axes tel que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{z}$ et $\hat{\mathbf{n}}$ est dans le plan xz . L'équation (6.64) est alors un système homogène d'équations linéaires pour les composantes de \mathbf{E} , qui doit posséder des solutions non nulles.

E Supposez que $\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{k}}$. Retrouvez alors les résultats (6.42) des notes de cours pour la constante diélectrique.

F Supposez enfin que $\hat{\mathbf{n}}$ est perpendiculaire à $\hat{\mathbf{k}}$. Trouvez une expression pour la constante diélectrique ε dans ce cas et tracer son profil en supposant par exemple que $\omega_c = 2\omega_p$. Dans quels domaines de fréquence y a-t-il propagation ?

Problème 6.3

Un sous-marin évolue à 100 m au-dessous de la surface de l'océan. Pour qu'un signal électromagnétique ne soit atténué que de 90% en intensité après avoir traversé cette épaisseur d'eau, quelle fréquence doit-on utiliser ?

Problème 6.4

Nous allons étudier dans ce problème la propagation des ondes électromagnétiques dans une catégorie de matériaux appelés *ferrites*. Ces matériaux, à base d'oxyde de fer, ont la propriété remarquable d'être à la fois des isolants – donc de permettre la propagation des ondes électromagnétiques sans trop d'atténuation – et de développer une aimantation considérable, en particulier en présence d'un champ magnétique constant.^a Les ferrites sont utilisées dans les circuits micro-ondes, où ils sont à la base de dispositifs qui affectent la polarisation ou le sens de propagation, ainsi que dans certaines antennes et dans les circuits qui demandent une grande perméabilité magnétique sans que des courants de Foucault soient induits.

D'un point de vue microscopique, les ferrites comportent des moments magnétiques atomiques \mathbf{m} qui ont tendance à s'orienter de manière parallèle entre eux et parallèle à un champ magnétique appliqué. Les dispositifs à ferrite fonctionnent généralement en présence d'un champ appliqué constant \mathbf{H}_0 . La relation microscopique qui nous aide à comprendre le comportement des ferrites en présence d'une onde électromagnétique est la précession des moments magnétiques en présence d'un champ magnétique, qui obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \quad (6.66)$$

où γ est le *facteur gyromagnétique* associé à ce moment magnétique. Cette équation provient du fait que (i) le moment magnétique \mathbf{m} est associé à un moment cinétique \mathbf{J} par la relation $\mathbf{m} = \gamma \mathbf{J}$, (ii) un champ magnétique \mathbf{B} cause un couple $\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$ sur le moment magnétique et (iii) le couple est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique : $\mathbf{N} = d\mathbf{J}/dt$. En fonction de l'aimantation \mathbf{M} , la relation ci-haut devient

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \wedge \mathbf{B} \quad (6.67)$$

Dans ce qui suit, nous supposons qu'un champ statique $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}$ est appliqué sur le matériau, qui développe une aimantation de saturation $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{z}$ en réponse à ce champ. Cette aimantation est la plus forte aimantation que le matériau puisse fournir. Nous envoyons ensuite une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = kz$ et de fréquence ω dans ce matériau. Cette onde porte un champ magnétique transverse et cause également une aimantation transverse, de sorte que le champ et l'aimantation nets sont, à un endroit donné,

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z} + \mathbf{H}_1 e^{-i\omega t} \quad \mathbf{M} = M_0 \mathbf{z} + \mathbf{M}_1 e^{-i\omega t} \quad (6.68)$$

où \mathbf{M}_1 et \mathbf{H}_1 n'ont que des composantes en x et y .

A À partir de la relation (6.67), démontrez que les composantes transverses de \mathbf{M} obéissent à l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \gamma H_0 & -i\omega \\ i\omega & \gamma H_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \gamma M_0 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

B La relation entre \mathbf{B} et \mathbf{H} dans ce matériau est linéaire, mais anisotrope : on peut écrire $B_a = \mu_{ab} H_b$, où la perméabilité μ est maintenant une matrice (on considère les composantes x et y

seulement). Montrez que cette matrice est

$$\mu = \mathbb{I} - \frac{\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} \begin{pmatrix} \omega_0 & -i\omega \\ i\omega & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

où on a défini les fréquences

$$\omega_M = -4\pi\gamma M_0 \quad \omega_0 = -\gamma H_0 \quad (6.71)$$

(le signe $-$ est introduit parce que γ est négatif pour les électrons qui portent le moment magnétique, de sorte que ω_M et ω_0 sont positifs). Le symbole \mathbb{I} désigne la matrice identité.

C Montrez que les ondes se propageant dans cette direction ont des vitesses différentes selon leur état de polarisation circulaire, et qu'on peut définir deux perméabilités μ_+ et μ_- , données par

$$\mu_+ = 1 - \frac{\omega_M}{\omega - \omega_0} \quad \mu_- = 1 + \frac{\omega_M}{\omega + \omega_0} \quad (6.72)$$

D Faites un schéma de ces perméabilités en fonction de la fréquence, en indiquant bien le rôle de ω_M et ω_0 . Dans quel domaine de fréquence la propagation est-elle interdite pour l'une des polarisations circulaires ?

E Une onde de fréquence ω polarisée linéairement entre dans une ferrite. On suppose que la ferrite a une constante diélectrique ε à cette fréquence, en plus des perméabilités trouvées plus haut. Au bout d'une distance d , la polarisation de cette onde aura tourné de 90 degrés. Exprimez d en fonction de μ_+ , μ_- et d'autres paramètres pertinents.

a. Les aimants sont généralement des métaux, alors que les ferrites ne sont pas des métaux.

CHAPITRE 7

Réflexion et réfraction

Considérons deux milieux linéaires avec constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 et perméabilités μ_1 et μ_2 , séparés par le plan $z = 0$. Les indices de réfraction sont $n_1 = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ et $n_2 = \sqrt{\epsilon_2\mu_2}$. Soit une onde plane incidente sur l'interface, en provenance du milieu 1. En général, cette onde sera partiellement réfractée dans l'autre milieu et partiellement réfléchi. Nous trouverons ici la relation exacte qui existe entre les ondes incidente, réfractée et réfléchi. Nous procéderons simplement en appliquant les conditions de continuité appropriées à ces trois ondes : les quantités

$$\mathbf{E}_{\parallel} , \mathbf{D}_{\perp} , \mathbf{B}_{\perp} , \mathbf{H}_{\parallel} \quad (7.1)$$

sont continues à l'interface. Ces conditions aux limites sont appliquées ici aux cas où aucun courant superficiel libre ou charge surfacique libre n'existent.

A Incidence normale

Supposons pour commencer que l'onde incidente est plane et normale à l'interface, de même que les ondes réfractée et réfléchie. On écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{x} E e^{i(kz-\omega t)} && \text{(onde incidente)} \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{x} E'' e^{i(-kz-\omega t)} && \text{(onde réfléchie)} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{x} E' e^{i(k'z-\omega t)} && \text{(onde réfractée)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

où les amplitudes E , E'' et E' décrivent respectivement les ondes incidente, réfléchie et réfractée. On a supposé une polarisation linéaire suivant \mathbf{x} . La fréquence est la même pour les trois ondes, mais le vecteur d'onde est différent dans les deux milieux, car la discontinuité est dans l'espace, non dans le temps : on a posé $k = \omega n_1/c$ et $k' = \omega n_2/c$.

À ces champs électriques correspondent les champs magnétiques suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{y} \frac{1}{\eta_1} E e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{H}'' &= -\mathbf{y} \frac{1}{\eta_1} E'' e^{i(-kz-\omega t)} \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{y} \frac{1}{\eta_2} E' e^{i(k'z-\omega t)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

où on a défini l'impédance caractéristique η :

$$\eta = \frac{\mu}{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (7.4)$$

Notons tout de suite que la perméabilité μ est en pratique égale à l'unité dans tout le domaine optique. En effet, la réponse magnétique d'un matériau est relativement lente et inexistante à ces fréquences. Nous conserverons cependant le facteur μ dans ce qui suit, afin que nos conclusions puissent être applicables à plus basse fréquence, notamment dans le domaine des micro-ondes.

L'application des conditions aux limites donne

$$\begin{aligned} E + E'' &= E' \quad (\text{continuité de } \mathbf{E}_{\parallel}) \\ \frac{1}{\eta_1}(E - E'') &= \frac{1}{\eta_2} E' \quad (\text{continuité de } \mathbf{H}_{\parallel}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

La solution à ces contraintes est

$$E'' = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E \quad E' = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} E \quad (7.6)$$

Remarques :

- ◆ Si $\eta_1 > \eta_2$, alors E'' est de signe opposé à E , ce qui signifie que les ondes incidentes et réfléchies sont déphasées de π (réflexion dure). Si, au contraire, $\eta_1 < \eta_2$, alors les ondes incidentes et réfléchies sont en phase (réflexion molle).

- ◆ Si $\eta_1 = \eta_2$, c'est-à-dire si les impédances caractéristiques sont les mêmes dans les deux milieux, alors $E'' = 0$ et $E' = E$, comme on s'y attend.

Le flux d'énergie incident est

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) = \frac{c}{8\pi\eta_1} |E|^2 \quad (7.7)$$

Les flux d'énergie réfléchi et réfracté sont respectivement

$$\langle \mathbf{S}'' \rangle = \frac{c}{8\pi\eta_1} |E''|^2 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{S}' \rangle = \frac{c}{8\pi\eta_2} |E'|^2 \quad (7.8)$$

On définit le *coefficient de réflexion* R comme le rapport du flux réfléchi au flux incident :

$$R = \frac{|\langle \mathbf{S}'' \rangle|}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right)^2 \quad (7.9)$$

Le coefficient de transmission T est le rapport du flux réfracté au flux incident :

$$T = \frac{|\langle \mathbf{S}' \rangle|}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} = \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_2 + \eta_1)^2} \quad (7.10)$$

On vérifie que la somme des deux est égale à l'unité : $R + T = 1$, ce qui est bien sûr évident en raison de la conservation de l'énergie.

B Incidence oblique

Refaisons le même calcul, mais avec des vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté dénotés respectivement \mathbf{k} , \mathbf{k}'' et \mathbf{k}' , où \mathbf{k} n'est plus nécessairement selon \mathbf{z} , mais a aussi une composante selon \mathbf{x} . Les champs électriques des trois ondes sont

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_0' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\end{aligned}\quad (7.11)$$

et les champs magnétiques correspondants sont

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{\eta_1 k} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{H}'' &= \frac{1}{\eta_1 k''} \mathbf{k}'' \wedge \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{H}' &= \frac{1}{\eta_2 k'} \mathbf{k}' \wedge \mathbf{E}_0' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\end{aligned}\quad (7.12)$$

Lois de la réflexion et de la réfraction

Il est important que les conditions aux limites soient satisfaites partout sur l'interface. Pour ce faire il faut que les différents champs aient la même périodicité le long de l'interface (c.-à-d. à $z = 0$). Autrement dit, les facteurs de phase $\exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ doivent être les mêmes pour les trois ondes à $z = 0$. Cette condition se traduit par

$$k_x = k_x' = k_x'' \quad \text{et} \quad k_y = k_y' = k_y'' \quad (7.13)$$

Si on choisit l'orientation des axes x et y de manière à ce que $k_y = 0$, ce qui est toujours possible, on est alors forcé d'admettre que k_y' et k_y'' sont également nuls, ce qui signifie que les trois vecteurs d'ondes \mathbf{k} , \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' sont tous dans le même plan ($y = 0$). Ce plan, perpendiculaire à l'interface, est appelé *plan d'incidence*. On définit alors les angles θ , θ'' et θ' que font respectivement \mathbf{k} , \mathbf{k}'' et \mathbf{k}' avec \mathbf{z} dans le plan d'incidence. Ce sont respectivement les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction. La première des équations (7.13) peut ensuite s'écrire ainsi :

$$k \sin \theta = k \sin \theta'' = k' \sin \theta' \quad (7.14)$$

Mais on sait, à partir de la relation de dispersion, que $k/n_1 = k'/n_2$. Il s'ensuit que

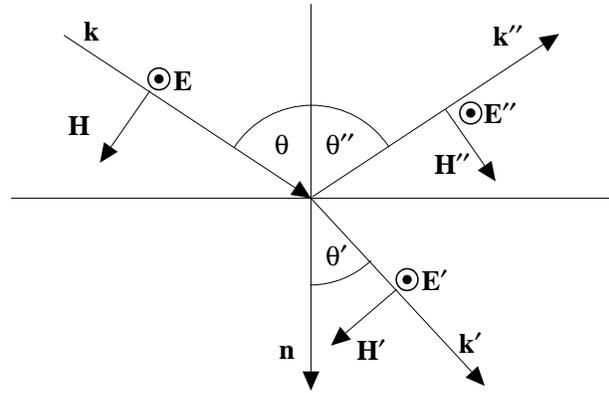
$$\boxed{\theta = \theta''} \quad \boxed{n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'} \quad (7.15)$$

La première équation stipule que les angles de réflexion et d'incidence sont égaux, alors que la deuxième relation est la loi de Descartes¹ pour l'angle de réfraction.

Une onde générale peut être considérée comme une superposition de deux polarisations : une polarisation linéaire avec \mathbf{E}_0 perpendiculaire au plan d'incidence et une autre avec \mathbf{E}_0 dans ce plan. Nous allons traiter ces deux polarisations séparément et résoudre dans chaque cas les conditions de continuité de \mathbf{E}_{\parallel} et \mathbf{H}_{\parallel} à l'interface.

1. Les Anglo-Saxons l'appellent *Snell's law*.

FIGURE 7.1
Angles de réflexion et de réfraction et orientation des champs dans la polarisation perpendiculaire.



Polarisation perpendiculaire au plan d'incidence

Dans le premier cas, nous supposons que les champs électriques des trois ondes sont perpendiculaires au plan d'incidence. L'existence d'une solution aux conditions aux limites soutiendra cette hypothèse. La continuité de E_{\parallel} implique

$$E_0 + E_0'' = E_0' \quad (7.16)$$

alors que la continuité de H_{\parallel} implique

$$\frac{1}{\eta_1}(E_0 - E_0'') \cos \theta = \frac{1}{\eta_2} E_0' \cos \theta' \quad (7.17)$$

La combinaison de cette équation avec (7.16) donne

$$\begin{aligned} E_0'' &= \frac{\cos \theta - (\eta_1/\eta_2) \cos \theta'}{\cos \theta + (\eta_1/\eta_2) \cos \theta'} E_0 \\ &= \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta + \theta')} E_0 \quad (\mu_1 = \mu_2) \\ E_0' &= \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + (\eta_1/\eta_2) \cos \theta'} E_0 \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} E_0 \quad (\mu_1 = \mu_2) \end{aligned} \quad (\mathbf{E}_{\perp}) \quad (7.18)$$

La deuxième ligne de chaque équation est obtenue en utilisant la loi de Descartes pour le rapport n_2/n_1 et les formules d'addition trigonométriques.

Polarisation parallèle au plan d'incidence

Dans le deuxième cas, les conditions de continuité sont

$$\begin{aligned} (E_0 - E_0'') \cos \theta &= E_0' \cos \theta' \\ \frac{1}{\eta_1}(E_0 + E_0'') &= \frac{1}{\eta_2} E_0' \end{aligned} \quad (7.19)$$

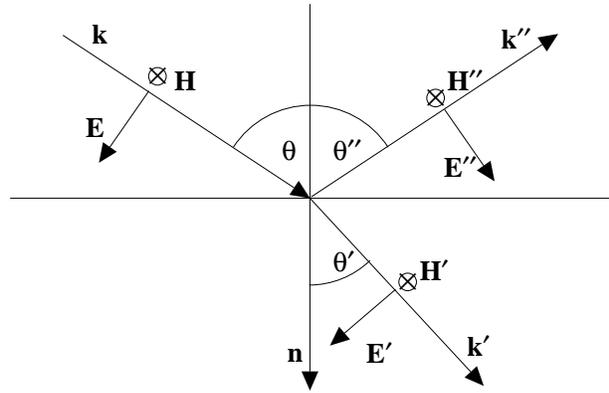


FIGURE 7.2
Angles de réflexion et de réfraction et orientation des champs dans la polarisation parallèle.

dont la solution est ²

$$\begin{aligned}
 E''_0 &= \frac{\cos \theta - (\eta_2/\eta_1) \cos \theta'}{\cos \theta + (\eta_2/\eta_1) \cos \theta'} E_0 \\
 &= \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta' + \theta)} E_0 \quad (\mu_1 = \mu_2) \\
 E'_0 &= \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta' + (\eta_1/\eta_2) \cos \theta} E_0 \\
 &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta' - \theta)} E_0 \quad (\mu_1 = \mu_2)
 \end{aligned}
 \tag{E_{\parallel}} \tag{7.20}$$

Les équations (7.18) et (7.20) sont les *relations de Fresnel*. On vérifie que les résultats pour l'incidence normale ($\theta = \theta' = 0$) sont reproduits, par l'une ou l'autre équation.

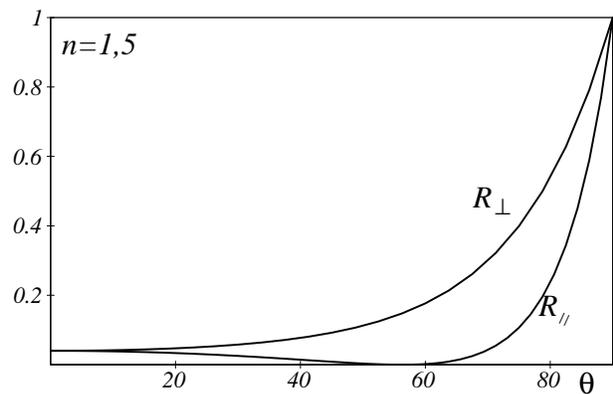


FIGURE 7.3
Coefficients de réflexion pour les polarisations perpendiculaire (haut) et parallèle (bas). L'indice de réfraction est 1.5.

2. Pour démontrer les relations à $\mu_1 = \mu_2$, on se sert de la loi de Descartes et des identités trigonométriques $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ et $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x \pm y) \cos \frac{1}{2}(x \mp y)$.

C Angle de Brewster

Supposons que $\mu_1 = \mu_2$, comme dans la plupart des situations pratiques. L'équation (7.20) indique que l'onde réfléchie est nulle si $\theta' + \theta = \pi/2$ (la tangente devient infinie). L'angle incident qui satisfait cette contrainte est l'*angle de Brewster* ou de *polarisation totale* θ_p . On a

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_p}{\sin(\pi/2 - \theta_p)} = \tan \theta_p \quad (7.21)$$

Dans le cas du verre commun, $n \sim 1.5$ et $\theta_p = 56^\circ$. Pour cette valeur d'angle d'incidence, seule la polarisation normale au plan d'incidence est réfléchie : il s'agit d'une façon simple de polariser la lumière.

Relation avec le rayonnement dipolaire

L'existence d'un tel angle peut être comprise par l'argument suivant : lorsqu'une onde électromagnétique est incidente sur un diélectrique, les électrons du matériau se mettent à osciller dans la direction du champ électrique réfracté. Cette oscillation des électrons cause un rayonnement qui produit les ondes réfractée et réfléchie. Ce rayonnement ne peut se produire dans la direction du mouvement (il y a dépendance angulaire en $\sin^2 \theta$). Donc il ne saurait y avoir d'onde réfléchie si la direction de cette onde fait un angle de 90° avec celle de l'onde réfractée. Notons que l'onde réfractée ne peut pas être polarisée de cette façon.

D Coefficients de réflexion et transmission

À partir des relations de Fresnel, on trouve facilement les coefficients de réflexion et de transmission pour les polarisations perpendiculaire (\perp) et parallèle (\parallel) au plan d'incidence :

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{|E_0''|^2}{|E_0|^2} = \frac{\sin^2(\theta' - \theta)}{\sin^2(\theta + \theta')} \\ R_{\parallel} &= \frac{\tan^2(\theta' - \theta)}{\tan^2(\theta + \theta')} \end{aligned} \quad (7.22)$$

(on a supposé que $\mu_1 = \mu_2$ pour alléger la notation) Les coefficients de transmission peuvent être calculés de même, à partir de

$$T_{\perp} = \frac{\langle \mathbf{S}' \rangle_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S} \rangle_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad T_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{S}' \rangle_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S} \rangle_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (7.23)$$

Cependant, il suffit de se rappeler que $T_{\perp} + R_{\perp} = 1$ et $T_{\parallel} + R_{\parallel} = 1$ pour obtenir T à partir de R sans faire de calcul séparé. On définit le coefficient de réflexion moyen $R_M = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel})$, adéquat pour une onde non polarisée. On vérifie que le flux d'énergie moyen pour une polarisation arbitraire est justement la somme des flux moyens pour les deux polarisations considérées ici.

Comme $R_{\perp} \geq R_{\parallel}$, la lumière réfléchie est donc toujours partiellement polarisée, si la lumière incidente est non polarisée (c'est-à-dire naturelle).

E Réflexion totale interne

Considérons maintenant le cas $n_1 > n_2$, c'est-à-dire où le milieu incident est le plus 'dense'. Il y a alors un angle critique θ_c au-delà duquel l'onde réfractée ne semble plus exister. Selon la loi de Snell-Descartes, on trouve

$$\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1) \quad (7.24)$$

Même si l'onde réfractée ne se propage pas, le champ pénètre tout de même dans le milieu 2 sur une certaine profondeur. En effet, en fonction de l'angle de transmission, l'onde réfractée s'écrit ainsi :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 \exp i(k'_x x + k'_z z - \omega t) \quad (7.25)$$

où

$$k_x'^2 + k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2, \quad k_x' = k_x \quad \text{et} \quad k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \quad (7.26)$$

Par conséquent, si

$$\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 < k_x^2 < \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2, \quad (7.27)$$

ce qui correspond à $\theta > \theta_c$, alors $k_z'^2 < 0$. La composante k_z' étant imaginaire, il est alors préférable de définir $k_z' = ik'\gamma$. L'onde réfractée se propage alors comme

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{-k'\gamma z} e^{i(k_x' x - \omega t)} \quad (7.28)$$

c'est-à-dire que l'onde réfractée se propage le long de l'interface et est atténuée dans le milieu avec une longueur caractéristique $1/(k'\gamma)$.

Les relations de Fresnel sont encore valables dans ce cas. Il nous suffit alors d'interpréter $\cos \theta'$ comme étant $k_z'/k' = i\gamma$. On trouve alors :

$$(E''_0)_\perp = \frac{\cos \theta - i\gamma(\eta_1/\eta_2)}{\cos \theta + i\gamma(\eta_1/\eta_2)} (E_0)_\perp \quad (E''_0)_\parallel = \frac{\cos \theta - i\gamma(\eta_2/\eta_1)}{\cos \theta + i\gamma(\eta_2/\eta_1)} (E_0)_\parallel \quad (7.29)$$

On voit tout de suite que les valeurs absolues sont les mêmes :

$$|(E''_0)_\perp| = |(E_0)_\perp| \quad |(E''_0)_\parallel| = |(E_0)_\parallel| \quad (7.30)$$

Ce qui confirme que le coefficient de réflexion est égal à un.

F Réflexion et réfraction sur les conducteurs

Considérons maintenant la réflexion et la transmission d'une onde à l'interface entre un diélectrique de constante ε_1 et un conducteur avec constante diélectrique ε_2 et conductivité σ . Nous allons nous limiter au cas d'incidence normale. Il n'est pas nécessaire de répéter les calculs précédents, qui sont directement applicables ici : rien ne supposait dans ces calculs que les indices de réfraction étaient réels. Il suffit d'appliquer les relations

$$E'' = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E \quad E' = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E \quad (7.31)$$

au cas où l'impédance caractéristique η_2 est complexe et donnée par

$$\eta_2^{-2} = \frac{1}{\mu_2} (\varepsilon_2 + 4\pi i \sigma / \omega) \quad (7.32)$$

Considérons premièrement le cas d'un conducteur idéal : $\sigma \rightarrow \infty$. Dans ce cas, $\eta_2 = 0$ et donc $E'' = -E$ et $E' = 0$. Il y a réflexion complète avec déphasage de π entre les ondes incidente et réfléchie.

Si la conductivité σ est grande sans être infinie ($\sigma \gg \omega$), alors l'impédance caractéristique η_2 est très petite (sans être nulle) et on peut utiliser l'approximation suivante :

$$\frac{E''}{E} = -\frac{1 - \eta_2/\eta_1}{1 + \eta_2/\eta_1} \approx -\left(1 - \frac{2\eta_2}{\eta_1}\right) \quad (7.33)$$

En négligeant ε_2 devant σ/ω , on trouve

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} \approx \sqrt{\frac{\mu_2 \omega \varepsilon_1}{4\pi i \sigma \mu_1}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{c}{\sqrt{2\pi \omega \sigma \mu_2}} \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2i}} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{2\pi \delta}{\lambda} \frac{1}{2} (1 - i) \quad (7.34)$$

où δ est la longueur de pénétration et λ la longueur d'onde de l'onde incidente (dans le premier milieu). Comme le rapport η_2/η_1 est complexe, le coefficient de réflexion est donné, à cet ordre d'approximation, par

$$R = \left| \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right|^2 \approx 1 - 4 \operatorname{Re} \frac{\eta_2}{\eta_1} = 1 - 4\pi \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\delta}{\lambda} \quad (7.35)$$

Essentiellement, cela signifie qu'un matériau ayant une grande capacité à atténuer une onde qui s'y propage (σ élevé) réfléchira une onde incidente d'autant : une bonne absorption entraîne une bonne réflexion.

Problèmes

Problème 7.1

Démontrez que si une onde polarisée linéairement (dans une direction quelconque) est incidente sur un métal, alors l'onde réfléchie est en général à polarisation elliptique. Faites un graphique du déphasage γ entre les composantes parallèle et perpendiculaire du champ électrique réfléchi, en fonction de l'angle d'incidence θ . Il vous est conseillé de faire l'approximation de bonne conductivité ($\sigma \gg \omega$).

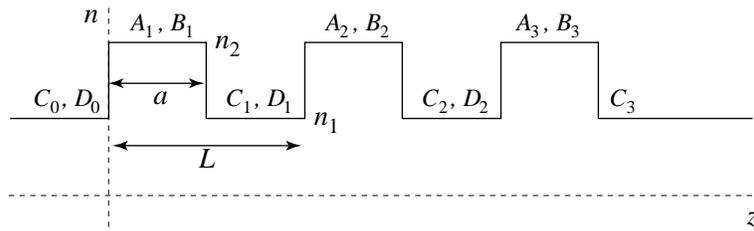
Problème 7.2

Dans ce problème nous allons étudier la transmission d'une onde incidente sur un réseau de Bragg, c'est-à-dire un milieu dans lequel l'indice de réfraction varie de manière périodique dans l'espace, comme illustré sur la figure. Spécifiquement, on considère un milieu composé de plusieurs couches superposées dans la direction z . Le milieu de base a un indice n_1 et des couches d'épaisseur a ont été aménagées avec un indice $n_2 \neq n_1$. Ces couches sont au nombre de N ($N = 3$ sur la figure) et sont régulièrement espacées d'une distance $L - a$ (L est la période de répétition des couches dans l'espace). On suppose qu'une onde incidente à $z = 0$ (position de la première couche) produit une onde réfléchie, et aussi une onde transmise à la sortie de la dernière couche ($z = (N - 1)L + a$). Le but du problème est de calculer le coefficient de transmission T de l'onde en fonction du nombre d'onde incident $k = \omega n_1 / c$.

Dans chaque section du matériau, il faut supposer que deux ondes se propagent, dans les directions $\pm z$, avec des amplitudes à déterminer. Spécifiquement, on pose la solution suivante pour la composante en x du champ électrique :

$$E_x = \begin{cases} A_n e^{ikrz} + B_n e^{-ikrz} & \text{si } (n-1)L < z < (n-1)L + a \\ C_n e^{ikz} + D_n e^{-ikz} & \text{si } (n-1)L + a < z < nL \end{cases} \quad (7.36)$$

où on a défini le rapport $r = n_2/n_1$. En particulier, l'amplitude de l'onde incidente peut être prise comme $C_0 = 1$ et l'amplitude de l'onde réfléchie est D_0 . L'amplitude de l'onde transmise est C_N et, bien sûr, $D_N = 0$.



A En appliquant les conditions de continuité à chacune des interfaces, obtenez des relations

(i) entre les coefficients (A_n, B_n) et (C_n, D_n) et (ii) entre les coefficients (C_n, D_n) et (A_{n+1}, B_{n+1}) . Exprimez ces contraintes sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = N_n \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

où M_n et N_n sont des matrices d'ordre 2.

B Démontrez la relation directe suivante :

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = Q_n \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

où

$$Q_n = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} i e^{-ika} [(1+r^2) \sin(akr) - 2ir \cos(akr)] & i e^{-ik(2Ln+a)}(r^2-1) \sin(akr) \\ -i e^{ik(2Ln+a)}(r^2-1) \sin(akr) & -i e^{ika} [(1+r^2) \sin(akr) + 2ir \cos(akr)] \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

C Obtenez la forme analytique du coefficient de transmission dans le cas d'une seule couche ($N = 1$) et faites-en un schéma en fonction de k . Pour quelles valeurs de k l'onde est-elle entièrement transmise ?

D Montrez que, pour une valeur générale de N , les amplitudes C_N et D_0 sont reliées par une expression du type

$$\begin{pmatrix} C_N \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ D_0 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

où Q est une matrice d'ordre 2 (n'essayez pas de la calculer explicitement). Exprimez le coefficient de transmission en fonction des composantes de cette matrice Q .

E En vous servant d'un logiciel tel Mathematica, Maple, MathCad ou l'équivalent, faites un graphique du coefficient de transmission T en fonction de k , de $k = 0$ à $k = \pi/(ar)$, pour $N = 1, 2, 10$ et 20 , avec les paramètres suivants : (i) $L = 1, a = 0.5, r = 1, 3$ et (ii) $L = 1, a = 0.5, r = 0, 7$ (8 graphiques demandés). Que remarquez-vous quand N est grand ?

F À partir de l'expression de Q_n en **B**, montrez qu'il y a des valeurs de k pour lesquelles le coefficient de transmission est toujours l'unité ($T = 1$), quel que soit le nombre de couches.

G (facultatif) Montrez que les matrices Q_n et la matrice Q ont la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad (7.41)$$

et que les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de ces matrices sont soit (i) des nombres complexes de module unité, conjugués complexes l'un de l'autre, soit (ii) deux nombres réels dont le produit est l'unité.

Problème 7.3

Nous allons, dans ce problème, étudier la propagation des ondes dans un milieu formé d'une succession périodique de couches d'indices de réfraction différents, régulièrement espacées. Il s'agit d'un réseau de Bragg, également étudié au problème précédent. Considérons ici une succession infinie de deux types de matériaux : une épaisseur a de matériau avec indice de réfraction n_2 , suivie d'une épaisseur $L - a$ d'un autre matériau d'indice n_1 , suivie d'une autre épaisseur a d'indice n_2 , et ainsi de suite. Le but du problème est de trouver les modes et fréquences de propagation d'une onde électromagnétique dans un tel milieu, dans le cas le plus simple : celui où l'onde se propage dans la direction perpendiculaire aux couches (selon l'axe des z).

Mathématiquement, il s'agit d'étudier la propagation d'une onde à travers une structure périodique de période L . Plus spécifiquement, la composante en x du champ électrique obéit à l'équation suivante si l'onde est monochromatique :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{n^2(z)\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (7.42)$$

où l'indice $n(z)$ est une fonction périodique : $n(z + L) = n(z)$. Dans le cas présent, $n(z)$ est en fait une fonction constante par morceaux. Ce type de problème est l'objet du théorème de Floquet, qui stipule que l'onde a la propriété suivante :

$$E_x(z + L) = e^{ikL} E_x(z) \quad \text{où} \quad \frac{-\pi}{L} < k < \frac{\pi}{L} \quad (7.43)$$

Le vecteur d'onde k est donc limité à un intervalle fini, appelé *zone de Brillouin*. Ce théorème s'applique aussi à la propagation des ondes d'électrons dans les cristaux (qui sont des structures périodiques) et est appelé dans ce contexte le *théorème de Bloch*.

A La propriété de quasipériodicité (7.43) nous permet de ne résoudre l'onde que dans l'intervalle $z \in [0, L]$. Montrez que la solution à l'équation (7.42) est

$$E_x(z) = \begin{cases} A e^{i\gamma r z} + B e^{-i\gamma r z} & 0 < z < a \\ C e^{i\gamma z} + D e^{-i\gamma z} & a < z < L \end{cases} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{\omega n_1}{c} \quad \text{et} \quad r = \frac{n_2}{n_1} \quad (7.44)$$

A, B, C et D sont des constantes à déterminer.

B Montrez que les conditions de continuité des champs électrique et magnétique ($\mu = 1$) aux interfaces entre les couches, ainsi que la propriété (7.43), impose les contraintes suivantes aux coefficients :

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma r a} & e^{-i\gamma r a} & -e^{i\gamma a} & -e^{-i\gamma a} \\ r e^{i\gamma r a} & -r e^{-i\gamma r a} & -e^{i\gamma a} & e^{-i\gamma a} \\ e^{ikL} & e^{ikL} & -e^{i\gamma L} & -e^{-i\gamma L} \\ r e^{ikL} & -r e^{ikL} & -e^{i\gamma L} & e^{-i\gamma L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (7.45)$$

C Expliquez pourquoi le déterminant de cette matrice – appelons-la M – doit être nul, afin que la solution (7.44) soit non triviale. Montrez que ce déterminant est

$$\det M = 4 e^{ikL} \{ 2r \cos(kL) - 2r \cos(\gamma a r) \cos(\gamma(L - a)) + (1 + r^2) \sin(\gamma a r) \sin(\gamma(L - a)) \} \quad (7.46)$$

D Démontrez que la contrainte $\det M = 0$ interdit la propagation dans certains domaines de fréquence, les *bandes interdites*. Vous pouvez vous aider d'un logiciel graphique et considérer des valeurs particulières des paramètres a et r (L peut être fixé à 1 sans perte de généralité).

E Obtenez, dans les unités $L = 1$ et à l'aide d'un logiciel approprié, le graphique de la fréquence en fonction du vecteur d'onde k , pour $a = 1/2$, $r = 0,7$ et $0 < \omega < \omega n_1/c < 11$.

CHAPITRE 8

Propagation dans un diélectrique anisotrope

Ce chapitre se veut une introduction à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique linéaire, mais anisotrope. L'anisotropie peut être intrinsèque (c'est-à-dire causée par la structure cristalline du milieu) ou extrinsèque (c'est-à-dire causée par l'imposition d'un champ électrique ou magnétique externe). Nous supposons partout dans cette section que le milieu est non magnétique, c'est-à-dire que $\mathbf{H} = \mathbf{B}$.

A Tenseur diélectrique et systèmes cristallins

Dans un milieu diélectrique linéaire anisotrope, la relation entre l'induction électrique \mathbf{D} et le champ électrique \mathbf{E} est la suivante :

$$D_a = \varepsilon_{ab} E_b \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (8.1)$$

où ε_{ab} est un tenseur de rang 2 appelé *tenseur diélectrique*. Les composantes de ce tenseur dépendent généralement de la fréquence. On montre que ce tenseur est symétrique : $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ba}$. En effet, dans un milieu linéaire, la densité d'énergie électrique est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ab} E_a E_b \quad (8.2)$$

et donc une définition alternative du tenseur diélectrique est la suivante :

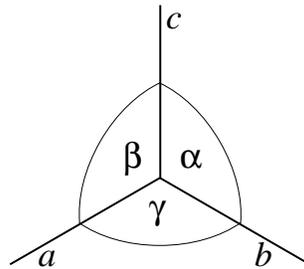
$$\varepsilon_{ab} = 4\pi \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial E_a \partial E_b} \quad (8.3)$$

Comme les dérivées partielles secondes sont indépendantes de l'ordre de différentiation, il est manifeste que $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ba}$.

Chapitre 8. Propagation dans un diélectrique anisotrope

Comme ε_{ab} est symétrique, il est possible de le diagonaliser par une transformation orthogonale, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir trois axes mutuellement perpendiculaires, appelés *axes principaux*, tels que le tenseur diélectrique est diagonal selon ces axes. Autrement dit, si on désigne par x, y, z les axes principaux, le tenseur diélectrique prend la forme

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (8.4)$$



système	définition	axes	caractère
triclinique	$a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma$	CCC	biaxe
monoclinique	$a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	CCF	biaxe
orthorhombique	$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	FFF	biaxe
trigonal (rhomboédrique)	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ, < 120^\circ$	FRR	uniaxe
tétragonal (quadratique)	$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	FRR	uniaxe
hexagonal	$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	FRR	uniaxe
cubique	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	RRR	isotrope

TABLE 8.1

Les sept systèmes cristallographiques et les propriétés des axes principaux du tenseur diélectrique dans chaque cas.

Il est en pratique difficile de calculer ε_{ab} à partir de principes microscopiques. Cependant, les axes principaux peuvent parfois être déterminés par symétrie. Par exemple, si une structure cristalline comporte un plan de symétrie (un plan par rapport auquel une réflexion laisse la structure cristalline inchangée), alors deux axes principaux sont contenus dans ce plan et le troisième y est perpendiculaire. Si la structure cristalline possède un axe de symétrie (un axe par rapport auquel une rotation de 90° , 120° ou de 180° laisse la structure inchangée), alors cet axe coïncide avec l'un des axes principaux. Le tableau 8.1 donne une liste des sept systèmes cristallins possibles, leur définition et le caractère des axes principaux du tenseur diélectrique dans chaque cas. Expliquons les paramètres figurant dans ce tableau : un système cristallin peut être spécifié en donnant les dimensions et la forme d'un prisme de base (maille élémentaire) qui est répété dans les trois dimensions pour former l'ensemble du réseau cristallin. Les trois côtés de ce prisme ont des longueurs a, b, c et les angles entre ces trois côtés sont notés α, β, γ , tel qu'indiqué sur la figure accompagnant le tableau. Il ne faut

pas confondre les axes cristallographiques a, b, c avec les axes principaux du tenseur diélectrique, car ils peuvent être très différents. Ces derniers peuvent être de trois types :

1. Le type C n'est déterminé par aucune symétrie cristalline et dépend du détail des composantes du tenseur diélectrique. Comme celles-ci dépendent en général de la fréquence, la direction précise d'un axe diélectrique de type C dépend aussi de la fréquence. Une telle dépendance porte le nom de *dispersion des axes*.
2. Le type F est fixé par les symétries du cristal. Par exemple, dans le système orthorhombique, les trois axes cristallins sont mutuellement perpendiculaires et chacun définit un plan de symétrie. Les trois axes diélectriques doivent donc être contenus chacun dans un de ses plans et par conséquent ils coïncident avec les trois axes cristallographiques, peu importe la fréquence.
3. Le type R est libre, ou arbitraire. Par exemple, dans la structure tétragonale (ou quadratique), une rotation de 90° par rapport à l'axe c ne change pas la structure cristallographique, ni le tenseur diélectrique. L'un des axes diélectriques doit donc coïncider avec l'axe c et est de type F. Les deux autres sont perpendiculaires à ce dernier, mais leur orientation précise dans le plan ab est sans importance (type R), puisque les deux constantes diélectriques associées (disons ε_x et ε_y) sont identiques. Une rotation arbitraire de ces deux axes dans ce plan ne modifie pas le tenseur diélectrique. Autrement dit, on a affaire ici à un sous-espace propre de dimension deux du tenseur diélectrique (la valeur propre $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ est dégénérée).

On distingue trois caractères différents de systèmes cristallins selon le degré de dégénérescence du tenseur diélectrique :

1. Dans un cristal *isotrope*, tous les axes principaux sont arbitraires. Les trois valeurs propres du tenseur diélectriques sont égales. C'est le cas du système cubique seulement. Même si un cristal cubique n'est pas du tout isotrope dans l'espace, ses propriétés diélectriques le sont entièrement, comme si le milieu était un liquide ou un verre.
2. Dans un cristal *uniaxe*, deux des valeurs propres du tenseur diélectrique sont égales. Il existe un axe de symétrie par rapport auquel une rotation des axes ne change pas le tenseur diélectrique. Les systèmes trigonal, tétragonal et hexagonal sont de ce type (axes diélectriques de type FRR).
3. Dans un cristal *biaxe*, les trois valeurs propres sont distinctes et le tenseur diélectrique ne comporte aucun axe de symétrie. C'est le cas des systèmes triclinique, monoclinique et orthorhombique.

B Surface des indices

Même si le milieu est *anisotrope*, il peut tout de même être *homogène* et permettre la propagation d'une onde plane avec un vecteur d'onde quelconque. Considérons donc une onde plane de fréquence ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} se propageant dans un tel milieu. Chaque champ (\mathbf{B} , \mathbf{D} ou \mathbf{E}) est alors exprimé comme une amplitude vectorielle complexe multipliée par un facteur de phase $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$. Les équations de Maxwell appliquées à ces champs ont donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= 0 & \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} &= \mathbf{B} & \mathbf{n} &= \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{n} \wedge \mathbf{B} &= -\mathbf{D} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nous avons introduit le vecteur \mathbf{n} , dont la direction est celle du vecteur d'onde et dont la grandeur est celle de l'indice de réfraction dans une direction donnée. Des équations (8.5) on déduit les remarques suivantes :

1. Les vecteurs \mathbf{n} , \mathbf{D} et \mathbf{B} forment un trièdre orienté, avec $\mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{D}$.
2. Le champ \mathbf{E} est bien perpendiculaire à \mathbf{B} , mais pas à \mathbf{n} . Il est dans le plan \mathbf{D} - \mathbf{n} , mais fait un certain angle α avec le champ \mathbf{D} .
3. Les vecteurs $\mathbf{S} = (c/4\pi)\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, \mathbf{E} et \mathbf{B} forment un autre trièdre orienté, partageant le champ \mathbf{B} avec le trièdre précédent, mais en rotation de α par rapport à lui.
4. Le vecteur de Poynting n'étant pas parallèle à \mathbf{k} , l'énergie de l'onde ne se propage pas dans la direction de \mathbf{k} . Autrement dit, un paquet d'onde (ou un rayon optique) ne se propage pas dans la direction du vecteur d'onde (voir Fig. 8.1), sauf exception.

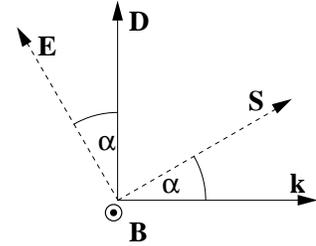


FIGURE 8.1

Orientation relative des vecteurs \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{S} dans une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} dans un diélectrique anisotrope.

Déterminons maintenant les relations de dispersion, c'est-à-dire la relation entre la fréquence et le vecteur d'onde. En combinant les équations (8.5), on trouve

$$\mathbf{D} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) = n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \quad \text{ou} \quad D_a = \varepsilon_{ab} E_b = (n^2 \delta_{ab} - n_a n_b) E_b \quad (8.6)$$

ce qui revient à l'équation homogène

$$(n^2 \delta_{ab} - n_a n_b - \varepsilon_{ab}) E_b = 0 \quad (8.7)$$

Pour que cette équation ait une solution non nulle, il faut que le déterminant associé s'annule :

$$\det |n^2 \delta_{ab} - n_a n_b - \varepsilon_{ab}| = 0 \quad (8.8)$$

Dans le système des axes diélectriques principaux, l'équation ci-haut devient

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & \varepsilon_y - n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & \varepsilon_z - n_x^2 - n_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.9)$$

Cette équation est appelée *équation de Fresnel* et permet de trouver, pour une direction donnée, la valeur de l'indice n (ou du nombre d'onde k) en fonction de la fréquence ω . En développant le déterminant, on trouve

$$n^2(\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2) - n_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) - n_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) - n_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0 \quad (8.10)$$

Notons que, pour une direction (θ, φ) donnée (en coordonnées sphériques), on peut exprimer les composantes n_a en fonction de la grandeur n et des angles (θ, φ) , de sorte que l'équation ci-haut est du second degré en n^2 , ce qui donne généralement deux solutions distinctes de n^2 . Ainsi, à une fréquence donnée et dans une direction donnée, il existe généralement deux nombres d'ondes possibles. Les valeurs permises de \mathbf{n} forment donc une surface à deux feuillet dans l'espace, appelée *surface des indices* ou *surfaces des vecteurs d'ondes*. Cette surface donne la grandeur de l'indice de réfraction en fonction de la direction du vecteur d'onde (ne pas confondre avec la direction de propagation, qui est donnée par le vecteur de Poynting).

Remarquons que, dans le cas d'un milieu isotrope, les trois valeurs propres sont égales ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$) et l'équation (8.10) se réduit à

$$\varepsilon(n^2 - \varepsilon)^2 = 0 \quad (8.11)$$

ce qui mène aux relations habituelles $n = \sqrt{\varepsilon}$ et $k = \sqrt{\varepsilon}\omega/c$.

Milieu uniaxe

Rappelons qu'un milieu est qualifié d'*uniaxe* si deux des constantes diélectriques (disons ε_x et ε_y) coïncident. L'axe z est alors particulier et porte le nom d'*axe optique*. Le milieu est symétrique par rapport à une rotation autour de l'axe optique. Dans un tel milieu, l'équation de Fresnel (8.10) se factorise (on pose $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_\perp$) :

$$(n^2 - \varepsilon_\perp) \left[\varepsilon_z n_z^2 + \varepsilon_\perp (n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_z \varepsilon_\perp \right] = 0 \quad (8.12)$$

Cette équation se réduit à une paire d'équations du second degré :

$$n^2 = \varepsilon_\perp \quad \frac{n_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_z} = 1 \quad (8.13)$$

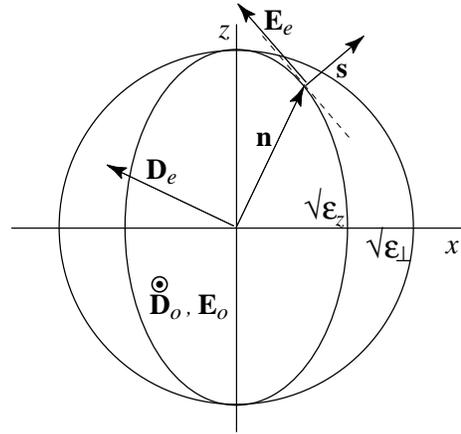
L'une ou l'autre de ces équations doit être satisfaite par le vecteur \mathbf{n} . On voit que la première équation détermine une sphère de rayon $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ et la seconde un ellipsoïde dont deux des trois axes sont de longueur $\sqrt{\varepsilon_z}$ et le troisième axe (dans la direction de l'axe optique) a une longueur $\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Si $\varepsilon_\perp < \varepsilon_z$, la sphère est contenue à l'intérieur de l'ellipsoïde et le milieu est qualifié de *positif*. Au contraire, si $\varepsilon_\perp > \varepsilon_z$, la sphère englobe l'ellipsoïde et le milieu est qualifié de *néгатif*. La sphère et l'ellipsoïde se touchent en un point : $\mathbf{n} = (0, 0, \sqrt{\varepsilon_\perp})$, ce qui signifie qu'une onde se propageant le long de l'axe optique n'a qu'un seul vecteur d'onde. Ce dernier point est assez évident, puisque dans le plan perpendiculaire à l'axe optique, le milieu est isotrope de constante diélectrique ε_\perp . Comme les champs pointent dans ce plan si \mathbf{n} est le long de l'axe optique, l'onde se comporte dans ce cas comme si le milieu était isotrope.

Milieus biaxes

Dans un milieu biaxe, la surface des indices est plus complexe qu'un ensemble sphère-ellipsoïde. On peut avoir une idée de sa forme en considérant les courbes d'intersection entre cette surface et les

FIGURE 8.2

Coupe dans le plan xz de la surface des indices dans le cas d'un matériau uniaxe négatif. On a indiqué un vecteur \mathbf{n} particulier pour l'onde extraordinaire et le vecteur radial \mathbf{s} correspondant, normal à la surface des indices en ce point. On a aussi indiqué les directions des polarisations des ondes ordinaire et extraordinaire.



nom	n_o	n_e
calcite	1,6584	1,4864
tourmaline	1,669	1,638
quartz	1,5443	1,5534
glace	1,309	1,313

TABLE 8.2

Quelques cristaux uniaxes communs.

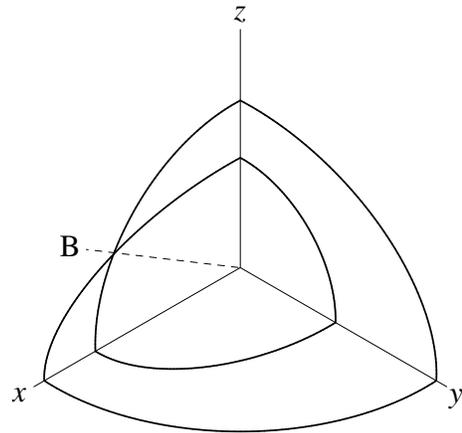
plans perpendiculaires aux axes principaux. Par exemple, posons $n_z = 0$ dans l'équation de Fresnel (8.10). On trouve

$$(n_x^2 + n_y^2 - \epsilon_z)(n_x^2 \epsilon_x + n_y^2 \epsilon_y - \epsilon_x \epsilon_y) = 0 \quad (8.14)$$

La solution à cette équation est une courbe double : un cercle de rayon $\sqrt{\epsilon_z}$ dans le plan xy et une ellipse de demi-axes $(\sqrt{\epsilon_y}, \sqrt{\epsilon_x})$. De même, les courbes d'intersection avec les plans yz et zx s'obtiennent par les substitutions appropriées. Supposons, en toute généralité, que $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$. Ces courbes d'intersections sont représentées sur la Fig. 8.3, dans le premier octet. La caractéristique principale de la surface des indices est l'existence d'un point singulier (passant par l'axe B sur la figure) où les deux surfaces se croisent. Trois autres points singuliers du même type existent dans le plan xz , disposés symétriquement par rapport aux axes x et z . Ces points déterminent deux axes (l'axe B et son image par rapport au plan xy), appelés *axes optiques* du matériau, ou *binormales*.

FIGURE 8.3

Intersections de la surface des indices avec les plans perpendiculaires aux axes principaux. Cette représentation laisse deviner la forme générale de la surface et sa singularité le long de l'axe B, l'une des binormales.



C Vecteur radial et surface des rayons

Vitesse de groupe et vecteur de Poynting

Une fois déterminée la fréquence $\omega(\mathbf{k})$ en fonction du vecteur d'onde par résolution de l'équation (8.10), on peut en principe calculer la vitesse de groupe du milieu :

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \quad (8.15)$$

Cette vitesse dépend de la direction, n'est en général pas parallèle à \mathbf{k} et est la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique et des rayons lumineux en optique géométrique. Le vecteur de Poynting \mathbf{S} est donc parallèle à \mathbf{v}_g .

Cette dernière affirmation peut être démontrée en deux étapes. D'une part, le milieu étant linéaire, la densité d'énergie électromagnétique a l'expression suivante :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \quad (8.16)$$

En substituant dans cette expression la forme de \mathbf{B} et \mathbf{D} tirée des équations (8.5), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} (-\mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{c} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Donc, en fonction du vecteur d'onde et de la fréquence,

$$\boxed{\mathcal{E}\omega = \mathbf{S} \cdot \mathbf{k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{E}c = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}} \quad (8.18)$$

Autrement dit, le vecteur de Poynting, projeté sur la direction du vecteur d'onde, est la densité d'énergie multipliée par la vitesse de phase de l'onde. D'autre part, procédons à une variation des

équations (8.5) par rapport au vecteur d'onde et à la fréquence :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D} &\implies \delta \mathbf{k} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{k} \wedge \delta \mathbf{B} = -\frac{\delta \omega}{c} \mathbf{D} - \frac{\omega}{c} \delta \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B} &\implies \delta \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} + \mathbf{k} \wedge \delta \mathbf{E} = \frac{\delta \omega}{c} \mathbf{B} + \frac{\omega}{c} \delta \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Soustrayons la deuxième de ces équations, multipliée par \mathbf{B} , de la première multipliée par \mathbf{E} . On trouve, en permutant certains produits triples, que

$$-2\delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{k} \cdot \delta (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = -\frac{\delta \omega}{c} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - \frac{\omega}{c} (\delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}) \quad (8.20)$$

En fonction de la densité d'énergie et du vecteur de Poynting, cette relation s'écrit

$$\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{S} + 2\delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} = 2\mathcal{E} \delta \omega + \omega \delta \mathcal{E} \quad (8.21)$$

où le caractère linéaire du milieu nous permet d'écrire ¹

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}) \quad (8.22)$$

Prenons maintenant la variation de l'éq. (8.18) :

$$\delta \mathcal{E} \omega + \mathcal{E} \delta \omega = \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{k} \quad (8.23)$$

En combinant avec l'éq. (8.21), on trouve immédiatement

$$\delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} = \mathcal{E} \delta \omega \implies \frac{\delta \omega}{\delta \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{S}}{\mathcal{E}} \quad (8.24)$$

La vitesse de groupe est donc parallèle au vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \mathcal{E} \mathbf{v}_g \quad (8.25)$$

Vecteur radial

On appelle *vecteur radial* ou *vecteur de rayon* le vecteur \mathbf{s} dont la direction coïncide avec celle de \mathbf{v}_g (ou de \mathbf{S}) et dont la norme est fixée par la condition

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1 \quad (8.26)$$

On voit tout de suite, d'après les éqs (8.18) et (8.25), que

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{S}}{c\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{v}_g}{c} \quad (8.27)$$

Le vecteur radial est donc la vitesse de groupe, normalisée à la vitesse de la lumière dans le vide. Imaginons une onde provenant d'une source ponctuelle située à l'intérieur du milieu, à l'origine. La phase de cette onde à $t = 0$ est $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (\omega/c) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$. On conclut que les points situés sur la surface définie par $\mathbf{r} = A\mathbf{s}$ (A étant une constante) ont tous la même phase. Le vecteur \mathbf{s} définit donc une surface (elle aussi à deux feuillets) dont le sens physique est la forme des fronts d'onde émanant d'un point. C'est la *surface des rayons* ou *surface radiale*.

1. Ceci n'est vrai que si le milieu est non dispersif, car nous avons négligé la dépendance en fréquence des constantes diélectriques. N'oublions pas que les variations $\delta \mathbf{D}$ et $\delta \mathbf{B}$ ne résultent pas de la construction progressive de l'onde, mais d'une variation arbitraire $\delta \mathbf{k}$ du vecteur d'onde.

Relation de dualité entre \mathbf{s} et \mathbf{n}

Comme \mathbf{s} est parallèle à \mathbf{S} et que $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 1$, on a les relations suivantes, qu'on peut comparer aux équations (8.5) :

$$\begin{aligned} l\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} &= 0 & \mathbf{s} \wedge \mathbf{D} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{s} \wedge \mathbf{B} &= -\mathbf{E} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Les deux équations de gauche sont évidentes et celles de droite se démontrent en substituant les expressions de \mathbf{B} et \mathbf{D} tirées des équations (8.5). Il existe manifestement une relation de dualité entre les vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{n} , par laquelle les vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{D} sont échangés :

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{D} \quad \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \quad (8.29)$$

En appliquant cette relation de dualité à l'équation de Fresnel (8.10), on trouve une équation déterminant la surface radiale :

$$s^2(\varepsilon_y \varepsilon_z s_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_z s_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y s_z^2) - s_x^2(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - s_y^2(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - s_z^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 1 = 0 \quad (8.30)$$

Encore une fois, pour une direction donnée, cette équation possède généralement deux solutions pour s^2 , ce qui signifie que deux rayons de vecteurs d'onde différents peuvent se propager dans une même direction.

Calcul de \mathbf{s}

En pratique, il est utile de pouvoir relier le vecteur \mathbf{s} au vecteur \mathbf{n} correspondant, c'est-à-dire de savoir dans quelle direction se propage une onde de vecteur d'onde donné. Cette liaison entre \mathbf{s} et \mathbf{n} est en quelque sorte le lien entre une quantité observable (la direction d'un faisceau, \mathbf{s}) et une quantité théorique (\mathbf{n}) figurant dans la description mathématique de l'onde et très importante dans les problèmes de réflexion et de réfraction en raison de son rôle dans les conditions aux limites. Nous allons maintenant démontrer que le vecteur \mathbf{s} associé à un vecteur \mathbf{n} donné est perpendiculaire à la surface des indices au point précis déterminé par \mathbf{n} . En termes mathématiques, cette affirmation est équivalente à la suivante : si la surface des indices est déterminée par l'équation implicite $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, alors le vecteur \mathbf{s} associé à une valeur de \mathbf{n} est parallèle au gradient $\partial f / \partial \mathbf{n}$ précisément à ce point (il est notoire que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces de valeur constante de cette fonction, comme la surface des indices). Pour démontrer cette deuxième assertion, retournons à l'équation de Fresnel (8.10), qui a la forme $f(\mathbf{n}) = 0$, et exprimons-la en fonction du vecteur d'onde et de la fréquence. On obtient alors une relation de dispersion sous forme implicite :

$$g(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad \text{où} \quad g(\mathbf{k}, \omega) = f(c\mathbf{k}/\omega) \quad (8.31)$$

La différentielle de la fonction g est évidemment nulle si on doit respecter les conditions de propagation :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} + \frac{\partial g}{\partial \omega} d\omega = 0 \implies \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{k}}}{\frac{\partial g}{\partial \omega}} \quad (8.32)$$

mais justement, par la règle d'enchaînement,

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{k}} = \frac{c}{\omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \omega} = -\frac{c}{\omega^2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \quad (8.33)$$

Donc

$$\frac{d\omega}{dk} = c \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{s} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}} \quad (8.34)$$

Cette relation nous permet de calculer précisément \mathbf{s} en fonction de la surface des indices.

Milieu uniaxe : ondes ordinaire et extraordinaire

Retournons maintenant au cas d'un milieu uniaxe, pour lequel la surface des indices nous est connue. La solution associée à la sphère de l'éq. (8.13) est appelée onde *ordinaire*. Pour cette onde, l'indice n est indépendant de la direction de propagation et le milieu se comporte en quelque sorte comme un milieu isotrope. En particulier, le vecteur radial \mathbf{s} est toujours parallèle à \mathbf{n} : $\mathbf{s} = \mathbf{n}/n^2$. Par contraste, la solution associée à l'ellipsoïde de l'éq. (8.13) est appelée onde *extraordinaire*. Les vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{n} de l'onde extraordinaire ne sont pas parallèles, sauf quand ils coïncident avec l'axe optique ou lui sont exactement perpendiculaires. L'équation du feuillet de la surface des indices décrivant l'onde extraordinaire est

$$f(\mathbf{n}) = \frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_z} - 1 = 0 \quad (8.35)$$

le vecteur radial est donc

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \left(\frac{n_x}{\varepsilon_z}, \frac{n_y}{\varepsilon_z}, \frac{n_z}{\varepsilon_{\perp}} \right) \quad (8.36)$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ a été ajouté pour respecter la condition $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 1$). Par exemple, considérons un vecteur d'onde dans le plan xz , faisant un angle θ avec l'axe optique, de sorte que $\tan \theta = n_x/n_z$. Le vecteur radial correspondant sera dans le même plan xz et fera un angle θ' avec l'axe optique, tel que

$$\tan \theta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{\varepsilon_{\perp} n_x}{\varepsilon_z n_z} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_z} \tan \theta \quad (8.37)$$

Réfraction dans un milieu uniaxe

L'onde extraordinaire est appelée ainsi en raison de ses propriétés de réfraction inusitées. Les conditions aux limites imposées dans une situation de réflexion et de réfraction mènent à la condition (7.13) sur les vecteurs d'ondes, valables aussi dans un milieu anisotrope. Donc les vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté sont tous dans le même plan (le plan d'incidence). Cependant, comme la direction de propagation de l'onde extraordinaire (déterminée par le vecteur \mathbf{s}) n'est pas parallèle à \mathbf{k} (sauf en des points particuliers), l'onde extraordinaire est réfractée hors du plan d'incidence, à moins que le plan d'incidence contienne l'axe optique ou lui soit perpendiculaire.² Voir les problèmes 8.1 et 8.2 à cet effet.

Milieux biaxes : cône de réfraction interne

Dans un milieu biaxe, la singularité de la surface des indices le long des binormales signifie que le vecteur radial, normalement perpendiculaire à la surface des indices, est indéfini à cet endroit. En fait, si on considère un petit voisinage de la singularité, les vecteurs radiaux correspondants dessinent un cône dans l'espace, appelé *cône de réfraction interne*. Si un rayon est incident sur un cristal biaxe dont la surface est taillée perpendiculairement à l'un de ses axes optiques, le rayon

2. Ce phénomène, observé la première fois dans le spath d'Islande (calcite) au XVII^e siècle, a été l'une des premières pierres d'achoppement de l'ancienne théorie corpusculaire de la lumière, bien avant les expériences de Young et Fresnel.

réfracté ‘explosera’ en un cône (creux) de rayons. Ce phénomène, l’une des manifestations les plus spectaculaires de l’optique des cristaux, a été prédit par W.R. Hamilton en 1832 et observé par Llyod un an plus tard. Cette observation a grandement contribué à l’acceptation générale de la théorie ondulatoire de Fresnel.

D Polarisation

Déterminons maintenant les polarisations possibles pour un vecteur d’onde donné. Pour ce faire, retournons aux équations (8.5), dans un système d’axes différents des axes diélectriques principaux. Fixons le vecteur \mathbf{n} et choisissons deux axes perpendiculaires à \mathbf{n} . Le vecteur \mathbf{D} est dans le plan formé par ces deux axes. L’équation $\mathbf{D} = n^2\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})$ devient, quand on en prend les composantes perpendiculaires à \mathbf{n} ,

$$D_\alpha = n^2 E_\alpha = n^2 (\epsilon^{-1})_{\alpha\beta} D_\beta, \tag{8.38}$$

où les indices α et β prennent les valeurs 1 et 2 et désignent les composantes le long des deux axes perpendiculaires à \mathbf{n} . Cette équation peut se récrire

$$\left[\frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - (\epsilon^{-1})_{\alpha\beta} \right] D_\beta = 0 \tag{8.39}$$

et n’a des solutions non nulles que si le déterminant associé est nul. Dans ce cas, les solutions (\mathbf{D} et \mathbf{D}') sont dans les directions des axes principaux du tenseur symétrique bidimensionnel $(\epsilon^{-1})_{\alpha\beta}$. L’interprétation géométrique de cette solution est la suivante : le tenseur diélectrique inverse $(\epsilon^{-1})_{ab}$ ($a, b = 1, 2, 3$) détermine un ellipsoïde défini par l’équation

$$(\epsilon^{-1})_{ab} x_a x_b = \frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \tag{8.40}$$

Si on coupe cet ellipsoïde par un plan perpendiculaire à \mathbf{n} passant par son centre, on obtient une ellipse. Les axes principaux de cette ellipse sont précisément les axes principaux du tenseur bidimensionnel $(\epsilon^{-1})_{\alpha\beta}$ et sont les directions des deux polarisations possibles \mathbf{D} et \mathbf{D}' (cf Fig. 8.4).

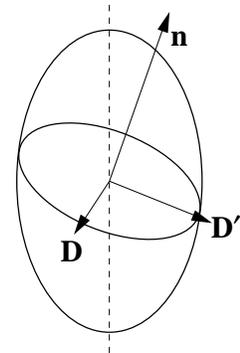


FIGURE 8.4
Polarisations linéaires possibles de \mathbf{D} dans une onde de vecteur d’onde $(\omega/c)\mathbf{n}$.

En particulier, si \mathbf{n} est parallèle à l’un des trois axes diélectriques principaux (x , y ou z), alors les axes principaux de l’ellipse découpée par la construction ci-haut (et les polarisations de \mathbf{D} permises)

sont aussi des axes diélectriques principaux. Dans ce cas, le vecteur radial est parallèle au vecteur d'onde.

En vertu de la dualité (8.29), les polarisations permises du vecteur \mathbf{E} peuvent être déterminées de manière similaire, mais cette fois en considérant l'intersection de l'ellipsoïde tensoriel (ou *ellipsoïde de Fresnel*)

$$\varepsilon_{ab}x_ax_b = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1 \quad (8.41)$$

avec le plan perpendiculaire au vecteur radial \mathbf{s} . Il s'agit du même raisonnement géométrique que ci-haut, auquel on a appliqué la relation de dualité (8.29).

Remarquons que la polarisation d'une onde électromagnétique se propageant dans un cristal anisotrope est en général linéaire. Une polarisation elliptique ou circulaire n'est possible que si les deux solutions à l'équation de Fresnel modifiée (8.30) associées à une direction de propagation \mathbf{s} ont la même fréquence. Dans ce cas, les deux polarisations linéaires sont dégénérées et peuvent se combiner en polarisations elliptiques. Ceci ne se produit qu'accidentellement.

Cas d'un milieu uniaxe

La discussion ci-dessus peut être considérablement simplifiée dans le cas d'un milieu uniaxe. Dans ce cas, le plan qui contient l'axe optique et le vecteur \mathbf{n} est appelé *section principale* de \mathbf{n} . D'après l'éq. (8.36), la section principale contient les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{s} . Dans le cas de l'onde extraordinaire, les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{s} ne sont pas parallèles, sauf exception. Ils déterminent alors un plan et ce plan doit coïncider avec la section principale de \mathbf{n} . D'autre part, d'après la Fig. 8.1, ce plan contient aussi les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} . On en conclut que la polarisation associée à l'onde extraordinaire est contenue dans la section principale.³ L'autre polarisation, perpendiculaire à la première et à \mathbf{n} , est donc perpendiculaire à la section principale et appartient à l'onde ordinaire.⁴ Il est facile de comprendre pourquoi la polarisation de l'onde ordinaire est perpendiculaire à l'axe optique : le milieu est en fait isotrope dans le plan perpendiculaire à l'axe optique. L'onde dont la polarisation est contenue dans ce plan se comportera donc comme si le milieu était isotrope, quelle que soit la direction du vecteur \mathbf{n} : c'est l'onde ordinaire. Ces polarisations sont illustrées à la figure 8.2.

En conclusion :

1. L'onde ordinaire est polarisée perpendiculairement à la section principale. Dans ce cas les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{s} sont parallèles, ainsi que les vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{D} .
2. L'onde extraordinaire est polarisée dans la section principale, avec \mathbf{D} perpendiculaire à \mathbf{n} et \mathbf{E} perpendiculaire à \mathbf{s} .

Prisme polariseur

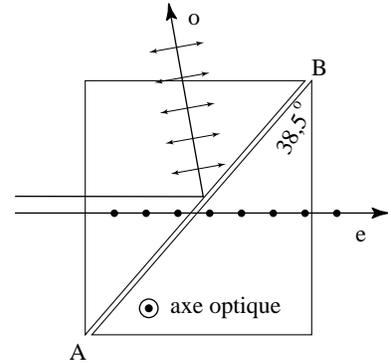
Les propriétés des cristaux uniaxes permettent la mise au point de dispositifs particuliers pouvant servir à extraire une polarisation précise d'un faisceau lumineux non polarisé ou partiellement polarisé.

3. Dans les cas où l'onde extraordinaire se propage perpendiculairement à l'axe optique, on sait que \mathbf{n} est parallèle à \mathbf{s} . Dans ce cas, par continuité, la polarisation est encore dans la section principale, ce qui signifie plus particulièrement que les champs \mathbf{E} et \mathbf{D} sont tous les deux parallèles à l'axe optique. On voit immédiatement pourquoi l'indice de réfraction est $\sqrt{\varepsilon_z}$ dans ce cas.

4. Géométriquement, ceci se manifeste de la manière suivante : dans le cas d'un milieu uniaxe, l'ellipsoïde de la Fig. 8.4 est symétrique par rapport aux rotations autour de l'axe optique (pointillé) et donc l'un des axes principaux de l'ellipse indiquée est contenu dans la section principale. La polarisation associée (\mathbf{D}') est celle de l'onde extraordinaire, car alors l'induction électrique n'est pas parallèle au champ électrique. L'autre polarisation (indiquée \mathbf{D} sur la figure) est celle de l'onde ordinaire et est parallèle au champ électrique correspondant.

FIGURE 8.5

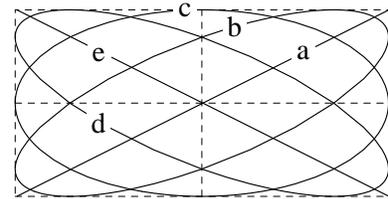
Schéma du prisme de Glan-Thomson. On a indiqué le rayon ordinaire subissant une réflexion totale interne, dont la polarisation est dans le plan du schéma. Le rayon extraordinaire, lui, traverse le prisme avec peu de déviation latérale. L'axe optique sort du plan de la page.



L'un de ces dispositifs est le *prisme de Glan-Thomson*,⁵ illustré à la Fig. 8.5, dont le fonctionnement est le suivant. Un cristal de calcite (à structure trigonale) est coupé selon la droite AB et recollé en interposant une mince couche d'un milieu d'indice intermédiaire entre l'indice ordinaire n_o (1,66) et l'indice extraordinaire n_e (1,49). le rayon ordinaire subit une réflexion totale interne à l'interface AB et est séparé du rayon extraordinaire qui, lui, traverse le prisme en entier en raison de la petitesse relative de n_e . La polarisation du faisceau transmis est contenue dans la section principale et est facilement identifiable par l'orientation du prisme. L'avantage de ce dispositif sur une feuille de polaroïd est l'absence de pertes et la pureté de la polarisation obtenue.

FIGURE 8.6

Schéma de polarisation d'un faisceau émergent d'une lame biréfringente. L'axe optique est vertical. La droite (a) représente le parcours du champ électrique dans le faisceau incident. En (b), les deux composantes du faisceau incident ont été déphasées de $\pi/4$; en (c), de $\pi/2$; en (d), de $3\pi/4$ et en (e) de π (l'une des composantes a changé de signe).



Lames minces

Des lames biréfringentes sont aussi utilisées pour modifier la polarisation d'un faisceau incident (linéarisée au préalable par un prisme polariseur). En effet, si la polarisation du faisceau incident n'est pas contenue dans la section principale de la lame, le faisceau se décompose en partie ordinaire et partie extraordinaire, les deux composantes acquérant une différence de phase relative proportionnelle à leur parcours dans la lame (l'épaisseur ℓ de la lame). Cette différence de phase détermine la polarisation nette du faisceau recombinaé à la sortie de la lame et permet d'en changer l'orientation ou le type. Le déphasage des deux composantes du faisceau est $(n_o - n_e)\omega\ell/c$. Par exemple, si ce déphasage est de $\pi/2$ et que la polarisation incidente est orientée à 45° de l'axe optique, on génère ainsi une onde à polarisation circulaire à partir d'une onde à polarisation linéaire.

5. Un modèle plus ancien de prisme polariseur est le prisme de Nicol, aujourd'hui beaucoup moins utilisé.

Problèmes

Problème 8.1

Un cristal uniaxe est coupé perpendiculairement à son axe optique et un rayon passe du vide vers ce cristal.

A Exprimez l'angle de réfraction θ' en fonction de l'angle d'incidence θ , pour les rayons ordinaire et extraordinaire.

B Indiquez la direction des polarisations associées.

Problème 8.2

Une onde plane (dans le vide ou l'air) est incidente sur un milieu anisotrope uniaxe. Le cristal est coupé de telle sorte que l'axe optique fait un angle α avec la normale à l'interface. Supposez que le rayon incident est parallèle à la normale (incidence normale). Montrez que l'angle de réfraction θ' du rayon extraordinaire est donné par la relation suivante :

$$\tan \theta' = \frac{(\varepsilon_z - \varepsilon_{\perp}) \sin 2\alpha}{(\varepsilon_z + \varepsilon_{\perp}) + (\varepsilon_z - \varepsilon_{\perp}) \cos 2\alpha} \quad (8.42)$$

Problème 8.3

Un cristal uniaxe est coupé de sorte que l'axe optique est dans le plan de l'une des faces du cristal. Une onde plane (dans le vide ou l'air) est incidente sur cette face, mais le plan d'incidence ne contient pas l'axe optique et sous-tend un angle α avec celui-ci. Montrez que le rayon réfracté dans le cristal ne sera pas contenu dans le plan d'incidence. Plus précisément, montrez que si on projette le rayon réfracté sur le plan de l'interface, alors il fait un angle β avec le plan d'incidence, tel que

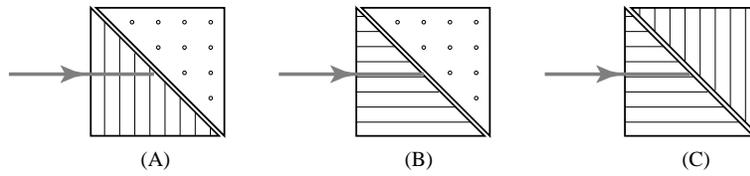
$$\cos \beta = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_z - \varepsilon_{\perp}) \cos(2\alpha)}{\sqrt{2(\varepsilon_z^2 + \varepsilon_{\perp}^2) + 2(\varepsilon_z^2 - \varepsilon_{\perp}^2) \cos(2\alpha)}} \quad (8.43)$$

Dans quelles conditions cet angle β est-il nul ?

Problème 8.4

Les trois dispositifs ci-dessous portent respectivement les noms de Wollatson (A), Rochon (B) et Sénarmont(C). Ils sont construits en raccordant deux prismes d'un cristal uniaxe (la direction de l'axe optique étant indiquée par des rayures (ou des points, quand il sort de la page). Ils ont tous les trois la propriété de séparer les deux polarisation d'un faisceau incident. En supposant qu'un faisceau de lumière non polarisée entre dans chacun des prismes par la gauche, indiquez

qualitativement dans quelle direction est déviée chacune des polarisation en sortant du prisme. Supposez que le cristal utilisé est positif (comme le quartz), c'est-à-dire que $n_o < n_e$. N'oubliez pas d'indiquer la direction de la polarisation de chaque faisceau sortant.



CHAPITRE 9

Guides d'ondes et cavités

Les applications pratiques des ondes électromagnétiques dans le domaine des communications ou du radar requièrent souvent un guidage des ondes, à la fois pour empêcher les interférences et pour canaliser l'énergie de façon à minimiser l'atténuation de l'onde. Ce guidage est causé par la présence d'une structure conductrice ou diélectrique (ou une combinaison des deux) qui permet des modes de propagation privilégiés dans une direction. Nous allons supposer que cette structure a une symétrie de translation dans une direction, qu'on choisit comme axe des z . On pense par exemple à un cylindre infini, fait entièrement de conducteur (ex. un fil), de diélectrique (ex. une fibre optique) ou de diélectrique entouré de conducteur, etc. Un objet en apparence aussi banal qu'un fil ou un ensemble de fils formant une ligne de transmission constitue en fait un guide d'onde, tout comme un câble coaxial. En particulier et contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, le signal porté par un câble coaxial se propage non pas dans la partie métallique du fil mais dans le milieu diélectrique qui sépare le fil central de l'enveloppe conductrice ; en tout cas, c'est là que se situe l'énergie en propagation.

A Équation de Helmholtz

Commençons par établir une équation de propagation générale, qui s'applique à toutes les ondes monochromatiques, planes ou non. Sauf pour de très rares circonstances, la constante diélectrique et la perméabilité magnétique ne dépendent que de la fréquence et non du vecteur d'onde. Considérons donc le cas où tous les champs ont une dépendance harmonique dans le temps, mais sans présumer de leur dépendance spatiale :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (9.1)$$

et pareillement pour \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H} . En l'absence de sources libres, les équations de Maxwell (4.18) se réduisent à

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & (a) \\ \nabla \wedge \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} &= 0 & (b) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (c) \\ \nabla \wedge \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{D} &= 0 & (d) \end{aligned} \quad (9.2)$$

auxquelles il faut ajouter les relations $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathbf{H}$.

En prenant le rotationnel de la loi de Faraday (9.2b) et en substituant la loi d'Ampère (9.2d), on trouve

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \frac{i\omega}{c} \nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (9.3)$$

Enfin, en substituant la loi de Gauss, on trouve

$$(\nabla^2 + \gamma^2)\mathbf{E} = 0 \quad \gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \quad (9.4)$$

Il s'agit de l'équation de Helmholtz, qui surgit naturellement dans l'étude des ondes monochromatiques. Une équation identique s'obtient pour le champ magnétique.

B Réduction aux composantes longitudinales

Dans cette sous-section nous allons exprimer les équations de Maxwell en séparant explicitement les composantes parallèles à la direction du guide (E_z et B_z) des composantes perpendiculaires (\mathbf{E}_\perp et \mathbf{B}_\perp) et en séparant la dépendance en z , que nous allons supposer sinusoïdale, de la dépendance en (x, y) . On considère une onde monochromatique qui se propage selon \mathbf{z} comme une onde plane :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}^0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}\quad (9.5)$$

Le problème sera de résoudre les équations de Maxwell pour les amplitudes $\mathbf{E}^0(x, y)$ et $\mathbf{B}^0(x, y)$ qui dépendent des coordonnées transverses : le problème sera réduit de 3 à 2 dimensions.

Commençons par décomposer les champs en composantes transverse et longitudinale :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{z} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + B_z \mathbf{z} \quad (9.6)$$

où \mathbf{E}_\perp et \mathbf{B}_\perp sont perpendiculaires à \mathbf{z} . On définit aussi le gradient transverse

$$\nabla_\perp = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} = \nabla - \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.7)$$

On veut montrer ici que la composante transverse $\mathbf{E}_\perp(x, y)$ est déterminée, une fois connue la solution pour $E_z(x, y)$. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= (\nabla_\perp + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z}) \wedge (\mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{z}) \\ &= \nabla_\perp \wedge \mathbf{E}_\perp + \mathbf{z} \wedge \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} - \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp E_z\end{aligned}\quad (9.8)$$

Le premier terme est orienté suivant \mathbf{z} , les deux autres sont transverses. Ensuite, écrivons les équations de Maxwell appliquées à la forme (9.5), en séparant les composantes transverses et longitudinales. Par exemple, la loi de Faraday est

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla_\perp \wedge \mathbf{E}_\perp + ik\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_\perp - \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp E_z - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_\perp - \frac{i\omega}{c} B_z \mathbf{z} = 0 \quad (9.9)$$

La séparation de cette équation en composantes donne

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \wedge \mathbf{E}_\perp - i(\omega/c) B_z \mathbf{z} &= 0 \\ \mathbf{z} \wedge (ik\mathbf{E}_\perp - \nabla_\perp E_z) - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_\perp &= 0\end{aligned}\quad (9.10)$$

En multipliant cette dernière équation par \mathbf{z} (produit vectoriel) on obtient la loi de Faraday telle qu'exprimée dans les équations suivantes, en compagnie des autres équations de Maxwell dans un milieu linéaire :

$$ik\mathbf{E}_\perp + i(\omega/c)\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}_\perp = \nabla_\perp E_z \quad (9.11)$$

$$ik\mathbf{B}_\perp - i(\varepsilon\mu\omega/c)\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp B_z \quad (9.12)$$

$$\mathbf{z} \cdot (\nabla_{\perp} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) = i(\omega/c)\mathbf{B}_z \quad (9.13)$$

$$\mathbf{z} \cdot (\nabla_{\perp} \wedge \mathbf{B}_{\perp}) = -i(\varepsilon\mu\omega/c)\mathbf{E}_z \quad (9.14)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = -ik\mathbf{E}_z \quad (9.15)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} = -ik\mathbf{B}_z \quad (9.16)$$

Ces équations permettent d'exprimer \mathbf{E}_{\perp} et \mathbf{B}_{\perp} en fonction de E_z et B_z . Par exemple, on peut prendre le produit vectoriel de \mathbf{z} avec l'éq.(9.11) et substituer (9.12) dans le résultat. On obtient

$$ik \left\{ \frac{ic}{\varepsilon\mu\omega} [\nabla_{\perp} B_z - ik\mathbf{B}_{\perp}] \right\} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{z} \wedge \nabla_{\perp} E_z \quad (9.17)$$

En isolant \mathbf{B}_{\perp} on obtient

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{1}{\omega^2 - v^2 k^2} (ic\omega\mathbf{z} \wedge \nabla_{\perp} E_z + ikv^2 \nabla_{\perp} B_z) \quad v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \quad (9.18)$$

ou encore

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\varepsilon\mu\omega}{c} i\mathbf{z} \wedge \nabla_{\perp} E_z + ik\nabla_{\perp} B_z \right) \quad \gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.19)$$

En répétant l'exercice différemment, on isole \mathbf{E}_{\perp} :

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{\omega^2 - v^2 k^2} \left(-i \frac{c\omega}{\varepsilon\mu} \mathbf{z} \wedge \nabla_{\perp} B_z + ikv^2 \nabla_{\perp} E_z \right) \quad (9.20)$$

ou encore

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{\omega}{c} i\mathbf{z} \wedge \nabla_{\perp} B_z + ik\nabla_{\perp} E_z \right) \quad (9.21)$$

Évidemment, ces équations sont applicables à la fois aux champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de la forme (9.5) ou aux amplitudes $\mathbf{E}^0(x, y)$ et $\mathbf{B}^0(x, y)$ d'où on a retiré la dépendance en z et en t .

Concentrons-nous donc sur E_z et B_z . Ces composantes satisfont naturellement à l'équation de Helmholtz (9.4), comme toutes les autres composantes d'ailleurs :

$$\left(\nabla^2 + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} E_z \\ B_z \end{pmatrix} = 0 \quad (9.22)$$

En substituant la forme $E_z = E_z^0(x, y) e^{ikz}$, on trouve

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2) \begin{pmatrix} E_z^0 \\ B_z^0 \end{pmatrix} = 0 \quad \gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.23)$$

On doit résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites sur le plan xy provenant de la présence des parois conductrices ou des frontières entre deux milieux diélectriques. C'est dans ce type de problème que l'équation de Helmholtz est particulièrement utile.

Modes TE, TM et TEM

Les ondes électromagnétiques guidées, à la différence des ondes se propageant dans le vide, ne sont pas toujours transverses, c'est-à-dire que les champs électrique et magnétique ne sont pas nécessairement perpendiculaires à la direction de propagation (l'axe des z). Il faut considérer différents modes de propagation pour une valeur donnée de la fréquence ω . On distingue les cas suivants :

1. Mode TEM (transverse électrique et magnétique) : les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} sont perpendiculaires à la direction de propagation, comme si l'onde se propageait dans le vide. On verra que ce type de propagation est impossible dans un guide d'onde fermé.
2. Mode TM (transverse magnétique) : le champ \mathbf{B} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $E_z \neq 0$. On doit alors résoudre l'éq. (9.23) pour E_z . Ce mode est aussi appelé onde de *type E* (car E_z est non nul).
3. Mode TE (transverse électrique) : le champ \mathbf{E} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $B_z \neq 0$. On doit alors résoudre l'éq. (9.23) pour B_z . Ce mode est aussi appelé onde de *type H* (car H_z est non nul).

Les modes TE et TM ont ceci de particulier que la relation entre k et ω fait généralement intervenir une fréquence de coupure ω_c , en deçà de laquelle la propagation est impossible.

C Modes TEM

Un mode de propagation dans lequel les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont tous les deux transverses (c.-à-d. $E_z = B_z = 0$) est dit *transverse électrique et magnétique* (TEM). On voit à partir de (9.11–9.16) que l'amplitude $\mathbf{E}^0(x, y)$ satisfait alors à

$$\nabla_{\perp} \wedge \mathbf{E}^0 = 0 \quad \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}^0 = 0 \quad (9.24)$$

Ce sont les équations de l'électrostatique en deux dimensions, en l'absence de charges. Des équations identiques sont satisfaites par l'amplitude magnétique $\mathbf{B}^0(x, y)$. On constate, d'après les équations (9.19) et (9.21), que la vitesse de phase de ces modes est forcément égale à v ($\omega = vk$), puisque $E_z = B_z = 0$. D'après l'éq. (9.12), ceci implique que

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{\varepsilon\mu\omega}{kc} \mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_{\perp} = n\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_{\perp} \quad (9.25)$$

où n est l'indice de réfraction du milieu. Autrement dit, les lignes du champ \mathbf{B} sont perpendiculaires à celles du champ \mathbf{E} . Bref, les caractéristiques de propagation d'un mode TEM coïncident avec celle d'une onde se propageant sans guidage.

Une autre conséquence des éq. (9.24) est qu'un mode TEM ne peut se propager à l'intérieur d'un guide d'onde creux entouré de conducteur, car le champ électrostatique est toujours nul à l'intérieur d'un conducteur. Par contre, de tels modes existent à l'extérieur d'un guide conducteur, ou en présence de plusieurs composantes conductrices (juxtaposées ou concentriques). Si les conducteurs sont parfaits, alors les conditions de continuité font que la composante normale de \mathbf{B} et la composante tangentielle de \mathbf{E} doivent s'annuler à la surface des conducteurs. Ainsi, les lignes de \mathbf{B} entourent les conducteurs de manière concentrique et les lignes de \mathbf{E} émanent des conducteurs et y aboutissent de manière perpendiculaire à leur surface, ainsi qu'illustré à la figure 9.1.

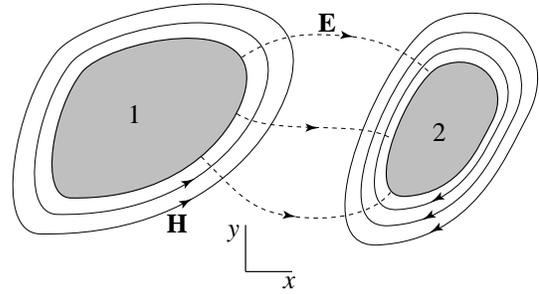


FIGURE 9.1
Schéma de la section d'un guide à deux conducteurs (1 et 2) avec les lignes du champ \mathbf{H} et du champ \mathbf{E} .

Inductance et capacité d'un guide

Attardons-nous à l'étude d'un guide d'onde formé de deux structures conductrices dans un milieu linéaire. Par exemple, un câble coaxial, ou un câble de transmission à deux fils. La Fig. 9.1 illustre un tel système à deux conducteurs. Nous allons montrer comment on peut définir pour un tel système une inductance par unité de longueur \mathcal{L} , ainsi qu'une capacité par unité de longueur \mathcal{C} , qui permettent de relier le courant I circulant dans ces conducteurs à la différence de potentiel V qui les sépare.

En raison de l'éq. (9.24), on peut exprimer le champ électrique comme le gradient transverse d'une fonction : $\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \Phi$. La tension V entre les deux conducteurs est alors naturellement définie comme

$$V = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(2) - \Phi(1) \quad (9.26)$$

où l'intégrale est prise sur un chemin qui va du conducteur 1 au conducteur 2. Cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi pour la calculer (pourvu qu'il soit contenu entièrement dans le même plan perpendiculaire à \mathbf{z}) car $\nabla_{\perp} \wedge \mathbf{E} = 0$. Cependant, la tension V dépend de z et de t , comme le champ \mathbf{E} , par un facteur oscillant $e^{i(kz - \omega t)}$. D'autre part, le courant I que porte un conducteur peut être relié à la circulation du champ \mathbf{H} autour de ce conducteur, en vertu de la loi d'Ampère :

$$I = \frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.27)$$

Calculons la dérivée de la tension par rapport à z :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \int_1^2 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dy \right) \quad (9.28)$$

La loi de Faraday appliquée au mode TEM stipule que

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (9.29)$$

On trouve donc

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 (-B_y dx + B_x dy) \quad (9.30)$$

Si on définit un élément de longueur $dr' = (dx', dy') = (dy, -dx)$, obtenu de $dr = (dx, dy)$ par une rotation de 90° dans le sens horaire, on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 (B_x dx' + B_y dy') \quad (9.31)$$

Or, l'intégrale n'est autre que le flux magnétique Φ_B (par unité de longueur en z) traversant une courbe qui relie les deux conducteurs (il faut supposer ici que les deux conducteurs sont en contact à $z = \pm\infty$ et qu'ils forment ainsi une boucle). Comme la définition de l'inductance (dans le système gaussien) est $\Phi_B = cLI$, l'inductance par unité de longueur \mathcal{L} intervient alors comme

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (9.32)$$

Calculons ensuite la dérivée par rapport à z du courant :

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{c}{4\pi} \oint \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} dx + \frac{\partial H_y}{\partial z} dy \right) \quad (9.33)$$

Or, la loi d'Ampère appliquée au mode TEM stipule que

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad (9.34)$$

et donc

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint (D_y dx - D_x dy) \quad (9.35)$$

Cette intégrale est le flux de l'induction électrique (par unité de longueur en z) traversant une courbe entourant complètement le conducteur. Par le théorème de Gauss, c'est donc la charge par unité de longueur établie sur le conducteur, soit la capacité par unité de longueur \mathcal{C} , fois la tension V entre les deux conducteurs, qui doivent porter des charges opposées :

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.36)$$

Les équations (9.32) et (9.36) peuvent être combinées et produisent une équation d'onde pour la tension V :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \mathcal{L}\mathcal{C} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (9.37)$$

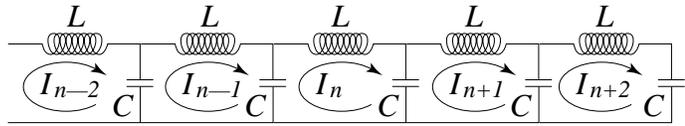
dont la solution est une onde se propageant à la vitesse de phase $v = 1/\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}$. Comme cette vitesse doit coïncider avec la vitesse de phase dans le milieu diélectrique situé entre les conducteurs, on trouve la relation suivante entre l'inductance \mathcal{L} et la capacité \mathcal{C} :

$$\mathcal{L}\mathcal{C} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \quad (9.38)$$

Cette analyse est une version plus exacte de l'étude des *lignes de transmission*, généralement effectuée à l'aide d'éléments de circuits discrets. Considérons à cet effet la figure 9.2. Dans la boucle n circule

FIGURE 9.2

Schéma d'une ligne de transmission constituée d'éléments discrets identiques. Chaque boucle élémentaire comporte un courant I_n .



un courant I_n et la charge accumulée sur le condensateur no n est Q_n . En appliquant les lois de Kirchhoff, on trouve

$$-L\dot{I}_n = \frac{1}{C}(Q_n - Q_{n-1}) \quad \text{et} \quad \dot{Q}_n = I_n - I_{n+1} \quad (9.39)$$

En prenant la dérivée de l'équation de gauche et en substituant celle de droite, on trouve

$$LC\ddot{I}_n = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1} \quad (9.40)$$

Maintenant, si on considère que les éléments discrets de la ligne de transmission deviennent de plus en plus rapprochés, on peut considérer le courant comme une fonction continue $I(z)$ plutôt que comme une suite discrète. Dans ce cas, le membre de droite devient $a^2 I''(z)$, où a est la distance séparant deux éléments. En divisant par LC , on trouve

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (9.41)$$

Or, dans ce cas, L/a et C/a sont respectivement l'inductance et la capacité par unité de longueur et on retrouve bien l'équation différentielle ci-haut pour le courant (ou pour la tension).

D Modes TE et TM dans un guide conducteur creux

Considérons maintenant un guide d'onde creux entouré complètement d'une paroi conductrice. Dans ce cas, les modes TEM n'existent pas (comme mentionné plus haut) et seuls les modes TM et TE sont possibles. En pratique, ces dispositifs sont utilisés dans le transport d'énergie micro-onde et le vide (ou l'air) à l'intérieur est utile pour minimiser les pertes. Nous allons donc supposer que $\varepsilon = \mu = 1$ dans toutes les sous-sections traitant de guides creux.

Conditions aux limites

Soit \mathbf{n} la normale (intérieure) à la paroi conductrice du guide d'onde. À travers cette paroi la composante tangentielle de \mathbf{E} doit être continue, ainsi que la composante normale de \mathbf{B} . En supposant que la paroi conductrice a une conductivité très grande, sinon infinie, on peut poser que les champs sont nuls dans la paroi. Donc, par continuité, $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ doivent être nuls sur le côté intérieur de la paroi.¹ En fonction des composantes en z des champs, ceci entraîne que

$$E_z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \quad (9.42)$$

sur la paroi. La première de ces conditions est évidente. La deuxième l'est moins ; pour la démontrer, calculons le produit scalaire de l'éq.(9.12) avec \mathbf{n} :

$$ik\mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{n} - i\frac{\varepsilon\mu\omega}{c}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}_\perp) = \mathbf{n} \cdot \nabla_\perp B_z \quad (9.43)$$

Le premier terme est nul sur la paroi, car c'est la composante de \mathbf{B} normale à la paroi. Le produit triple du deuxième terme peut aussi s'écrire comme $\mathbf{E}_\perp \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{z})$, qui est en fait une composante de \mathbf{E} parallèle à la paroi, et donc nul par continuité. Donc le membre de droite de l'équation, qui est la dérivée de B_z dans la direction \mathbf{n} , doit être nul lui aussi, ce qui constitue précisément la deuxième des conditions (9.42).

Le problème est donc de résoudre l'équation de Helmholtz (9.23) en tenant compte des conditions aux limites ci-dessus. Celles-ci étant différentes pour E_z et B_z , les solutions et les valeurs propres seront en général différentes pour les modes TM et pour les modes TE.

1. Notons que les composantes normales de \mathbf{E} et parallèle de \mathbf{B} ne sont pas continues sur la paroi, car la paroi conductrice peut porter une densité surfacique de charge ρ_s et une densité linéaire de courant \mathbf{K} . Or la composante normale de \mathbf{E} sera discontinue par $4\pi\rho_s$, alors que la composante parallèle de \mathbf{B} sera discontinue par $(4\pi/c)\mathbf{n} \wedge \mathbf{K}$.

E Guide d'onde rectangulaire

Modes TE

Considérons un guide d'onde de section rectangulaire, de largeur a et de hauteur b . On suppose que l'intérieur du guide est borné par les droites $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$. Considérons tout d'abord les modes TE. L'équation de Helmholtz s'écrit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) B_z^0 = 0 \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.44)$$

Les conditions aux limites sont

$$\left. \frac{\partial B_z^0}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0 \quad \left. \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (9.45)$$

La solution s'obtient par séparation des variables. Expliquons brièvement de quelle façon. On suppose que la fonction cherchée se factorise en fonctions de x et de y :

$$B_z^0(x, y) = X(x)Y(y) \quad (9.46)$$

En substituant dans l'équation de Helmholtz, on trouve

$$X''Y + XY'' + \gamma^2 XY = 0 \quad (9.47)$$

En divisant par XY , on trouve

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \gamma^2 = 0 \quad (9.48)$$

Dans cette équation, le premier terme dépend que de x , le second ne dépend que de y et le troisième est constant. Il faut donc que les trois termes soient en fait constants pour que l'équation soit respectée pour toutes les valeurs de x et y . On pose donc

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \quad \text{où} \quad k_x^2 + k_y^2 = \gamma^2 \quad (9.49)$$

Les solutions à ces équations sont

$$X(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad Y(y) = A_3 e^{ik_y y} + A_4 e^{-ik_y y} \quad (9.50)$$

où $A_{1,2,3,4}$ sont des constantes. Appliquons maintenant les conditions aux limites, qui sont devenues

$$X'(0) = X'(a) = 0 \quad \text{et} \quad Y'(0) = Y'(b) = 0 \quad (9.51)$$

Pour respecter ces conditions à $x = 0$ et $y = 0$, il faut que $A_1 = A_2$ et $A_3 = A_4$, de manière à obtenir des cosinus :

$$X(x) = A \cos(k_x x) \quad Y(y) = A' \cos(k_y y) \quad (9.52)$$

(A et A' sont des constantes).

Pour respecter ces conditions à $x = a$ et $y = b$, il faut que k_x et k_y soient quantifiés ainsi :

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (9.53)$$

où m et n sont des entiers positifs ou nuls. La solution recherchée est donc

$$B_z^0 = B_{mn} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{m\pi}{a} \\ k_y = \frac{n\pi}{b} \end{array} \right. \quad (9.54)$$

où B_{mn} est une constante complexe. Les relations (9.19) et (9.21) permettent de calculer les autres composantes des champs :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\perp &= \frac{ik}{k_x^2 + k_y^2} \nabla_\perp B_z \\ \mathbf{E}_\perp &= -\frac{i\omega/c}{k_x^2 + k_y^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp B_z = -\frac{\omega}{ck} \mathbf{z} \wedge \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9.55)$$

Explicitement, on trouve

$$\begin{aligned} B_x &= -iB_{mn} \frac{kk_x}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ B_y &= -iB_{mn} \frac{kk_y}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ E_x &= -\frac{\omega}{ck} B_y \\ E_y &= \frac{\omega}{ck} B_x \end{aligned} \quad (9.56)$$

On désigne cette configuration des champs électromagnétiques par le symbole TE_{mn} . Notons que les entiers (m, n) prennent toutes les valeurs positives ou nulles, sauf qu'ils ne peuvent être tous les deux nuls.²

Relation de dispersion

La relation de dispersion entre k et ω est

$$\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k^2 \quad \text{où} \quad \omega_{mn} = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (9.57)$$

On constate tout de suite que chaque mode possède une *fréquence de coupure* ω_{mn} en deçà de laquelle k est imaginaire, ce qui correspond à une atténuation de l'onde dans le guide. Les modes excités à une fréquence inférieure à leur fréquence de coupure ne se propagent donc pas, mais sont quand même présents sur une certaine distance à proximité du point où le guide est excité.³

2. En effet, dans le cas $m = n = 0$, les expressions (9.56) sont mal définies. En résolvant l'équation de Helmholtz directement pour les composantes transverses, on voit que les conditions aux limites sur les parois forcent des solutions nulles pour \mathbf{E}_\perp et \mathbf{B}_\perp dans le cas où $\omega = vk$, semblables en ce sens aux modes TEM, qui ne peuvent exister dans un guide creux. Pourtant, l'éq. (9.16) montre clairement qu'une valeur de B_z indépendante de x et y (comme ce serait le cas si la solution $m = n = 0$ avait un sens) est incompatible avec une valeur nulle de \mathbf{B}_\perp . Il y a donc contradiction. Le cas $m = n = 0$ est donc interdit.

3. Il faut noter la ressemblance entre cette relation de dispersion et celle d'un plasma, ou même celle des ondes de matière associées à des particules relativistes. Pour ces dernières, $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ou, en fonction de la fréquence et du nombre d'onde, $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_0^2$, où $\hbar\omega_0 = mc^2$.

Un guide d'onde creux offre un exemple particulièrement simple de propagation dispersive, semblable à celle d'un plasma (sauf pour la présence de plusieurs fréquences de coupure au lieu d'une seule fréquence de plasma). La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont données par

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} \end{aligned} \quad (9.58)$$

Comme dans un plasma, la vitesse de phase est plus grande que c , tandis que la vitesse de groupe est inférieure à c .⁴

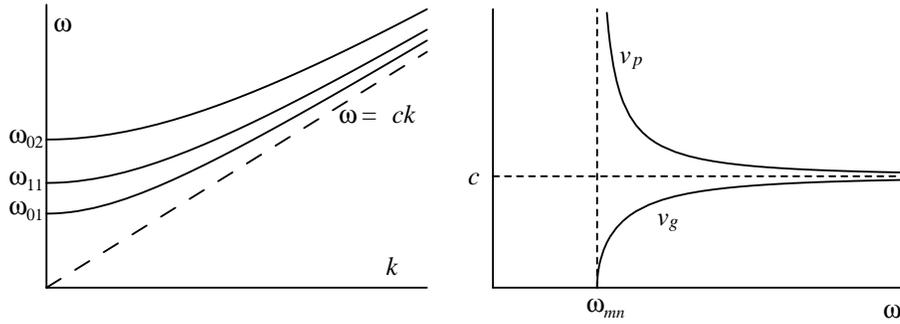


FIGURE 9.3

À gauche : Relations de dispersion pour quelques modes du guide d'onde rectangulaire. À droite : vitesse de phase et vitesse de groupe pour un mode particulier d'un guide d'onde rectangulaire

Modes TM

Les modes TM sont obtenus de façon similaire. Cette fois, E_z doit s'annuler sur les parois et donc les sinus remplacent les cosinus :

$$E_z^0 = E_{mn} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (9.59)$$

où les constantes k_x et k_y prennent les mêmes valeurs que pour les modes TE, avec les mêmes fréquences de coupure. Notons cependant que, dans ce cas, m et n doivent être tous deux non nuls, sinon la solution est triviale. D'après les relations (9.19) et (9.21), les autres composantes sont

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \frac{ikc^2}{\omega_{mn}^2} \nabla_\perp E_z \\ \mathbf{B}_\perp &= \frac{i\omega c}{\omega_{mn}^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp E_z = \frac{\omega}{ck} \mathbf{z} \wedge \mathbf{E} \end{aligned} \quad (9.60)$$

4. Notons cependant que les relations ci-haut ne sont valables que pour les modes TE et TM d'un guide d'onde à symétrie de translation selon z . On utilise aussi des guides et des cavités crénelés qui ne possèdent pas cette symétrie, mais ont plutôt un profil périodique en z .

ou, de manière plus explicite,

$$\begin{aligned}
 E_x &= iE_{mn} \frac{kk_x}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
 E_y &= iE_{mn} \frac{kk_y}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
 B_x &= \frac{\omega}{ck} E_y \\
 B_y &= -\frac{\omega}{ck} E_x
 \end{aligned} \tag{9.61}$$

Mode dominant

En général, une onde de fréquence ω est une superposition d'ondes appartenant à des modes différents. En fait, les solutions générales à l'équation de Helmholtz (9.4) dans le guide sont les séries suivantes :

$$\begin{aligned}
 B_z(\mathbf{r}) &= \sum_{m,n} B_{mn} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(ik_{mn}z) \\
 E_z(\mathbf{r}) &= \sum_{m,n} E_{mn} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(ik_{mn}z)
 \end{aligned} \tag{9.62}$$

où $\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k_{mn}^2$. Les champs transverse sont ensuite obtenus en appliquant les relations (9.56) et (9.61). Chaque mode possède une constante de propagation k_{mn} particulière, déterminée par la fréquence d'excitation ω . Cette constante est imaginaire si la fréquence est inférieure à la fréquence de coupure correspondante.

Si $a > b$, la fréquence critique la plus basse est $\omega_{10} = \pi c/a$. Le mode TE_{10} est alors qualifié de *dominant*. Si le guide est excité à une fréquence $\omega < \omega_{10}$, aucune onde durable n'est générée. Si la fréquence ω se situe entre ω_{10} et la fréquence de coupure suivante, alors seul le mode dominant se propage. En pratique, on choisit les dimensions d'un guide de telle façon que seul le mode dominant soit présent à une fréquence choisie. L'avantage est qu'on contrôle alors la configuration des champs à l'intérieur du guide et qu'on peut choisir le raccordement entre différents guides de manière à optimiser le transfert d'énergie. En effet, le coefficient de transmission d'une onde à la jonction de deux guides dépend du mode particulier qui s'y propage.

D'après les éq. (9.56), les composantes des champs dans le mode dominant sont :

$$\begin{aligned}
 B_z &= B_{10} \cos(k_x x) & B_y &= 0 \\
 B_x &= -iB_{10} \frac{k}{k_x} \sin(k_x x) & E_x &= 0 \\
 E_y &= iB_{10} \frac{\omega}{ck_x} \sin(k_x x) & k_x &= \frac{\pi}{a}
 \end{aligned} \tag{9.63}$$

Le vecteur de Poynting dans ce mode est

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{10} = \mathbf{z} \frac{k\omega |B_{10}|^2}{8\pi k_x^2} \sin^2 k_x x \tag{9.64}$$

On constate que l'énergie est concentrée au centre du guide et non près des parois.

Guides d'ondes et ondes planes

Notons que, dans les deux cas (TE et TM), les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{z} ne sont pas tous orthogonaux. La relation $\mathbf{B} = n\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}$ obtenue pour les ondes planes dans un milieu infini ne peut donc pas être appliquée ici (dans le cas présent $n = 1$). En fait, les modes de propagation le long d'un guide d'onde ne sont pas des ondes planes, mais plutôt des combinaisons d'ondes planes avec des vecteurs d'onde différents. Par exemple, les modes TE_{mn} et TM_{mn} sont des combinaisons de quatre vecteurs d'ondes :

$$\mathbf{k} = \pm \frac{m\pi}{a} \mathbf{x} \pm \frac{n\pi}{b} \mathbf{y} + k\mathbf{z} \quad (9.65)$$

Par exemple, le mode TE_{mn} peut s'écrire ainsi :

$$\mathbf{B}_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \mathbf{B}_{mn} \left\{ e^{i(m\pi x/a + n\pi y/b + kz)} + e^{i(-m\pi x/a + n\pi y/b + kz)} + e^{i(m\pi x/a - n\pi y/b + kz)} + e^{i(-m\pi x/a - n\pi y/b + kz)} \right\} \quad (9.66)$$

C'est fondamentalement pour cette raison que la relation $\mathbf{B} = n\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}$ n'est plus applicable à l'onde totale, même si elle s'applique séparément à chacune des quatre ondes planes qui composent chaque mode de propagation.

F Guides d'ondes à section circulaire

9.F.1 Guide d'onde creux à section circulaire

Considérons un guide d'onde conducteur creux de section circulaire et de rayon a . On utilise les coordonnées cylindriques, centrées sur l'axe du guide. L'analyse est très similaire à celle de la section E. On suppose qu'à l'intérieur du guide $\varepsilon = \mu = 1$.

Modes TM

Considérons tout d'abord les modes TM. L'équation de Helmholtz s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 E_z = 0 \quad \left(\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \quad (9.67)$$

Les conditions aux limites sont

$$E_z(r = a, \varphi) = 0 \quad (9.68)$$

La solution s'obtient par séparation des variables et implique les fonctions de Bessel (voir le complément E) :

$$E_z(r, \varphi) \propto J_m(\gamma r) \cos(m\varphi + \alpha) \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9.69)$$

où α est une phase quelconque. (nous avons exclu les fonctions de Neumann, puisqu'elles sont singulières à $r = 0$). La condition aux limites à $r = a$ équivaut alors à

$$J_m(\gamma a) = 0 \implies \gamma = x_{mn}/a, \quad \text{où } J_m(x_{mn}) = 0 \quad (9.70)$$

À chaque racine x_{mn} des fonctions de Bessel correspond donc un mode de propagation dans le guide d'onde. La relation de dispersion de ce mode est

$$\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k^2 \quad \omega_{mn} = \frac{cx_{mn}}{a} \quad (m \geq 0, n \geq 1) \quad (9.71)$$

et on écrit alors

$$E_z(r, \varphi) = E_{mn} J_m(x_{mn} r/a) \cos(m\varphi + \alpha_{mn}) \quad (9.72)$$

Modes TE

Considérons ensuite les modes TE. L'équation de Helmholtz s'écrit de la même manière qu'auparavant, cette fois pour B_z . La condition aux limites est cependant

$$\left. \frac{\partial B_z^0}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (9.73)$$

La solution est encore du type

$$B_z^0 \propto J_m(\gamma r) \cos(m\varphi + \beta) \quad (9.74)$$

sauf que la condition à $r = a$ équivaut maintenant à

$$J'_m(\gamma a) = 0 \implies \gamma = y_{mn}/a, \quad \text{où } J'_m(y_{mn}) = 0 \quad (9.75)$$

où y_{mn} est la n^e racine de la dérivée de J_m . On écrit donc

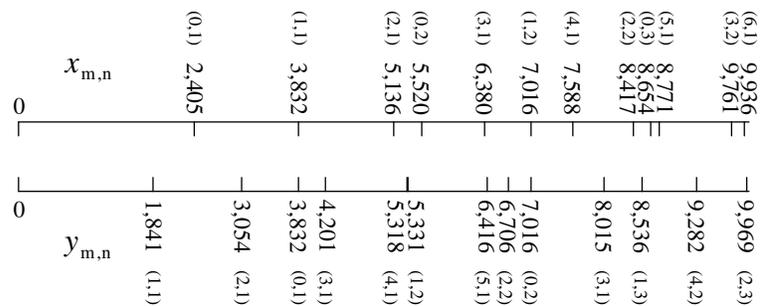
$$B_z(r, \varphi) = B_{mn} J_m(y_{mn} r/a) \cos(m\varphi + \beta_{mn}) \quad (9.76)$$

et la relation de dispersion est

$$\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k^2 \quad \omega_{mn} = \frac{cy_{mn}}{a} \quad (m \geq 0, n \geq 1) \quad (9.77)$$

FIGURE 9.4

Racines des fonctions de Bessel et de leurs dérivées : $J_m(x_{mn}) = 0$ et $J'_m(y_{mn}) = 0$.



Dans les deux cas (TE et TM), il y a dégénérescence double de chaque mode avec $m > 0$. Autrement dit, on peut considérer des modes en $\cos m\varphi$ ($\alpha_{mn} = \beta_{mn} = 0$) ou des modes en $\sin m\varphi$ ($\alpha_{mn} = \beta_{mn} = \pi/2$).⁵ Le mode dominant est TE₁₁ ($\omega_c = 1,841c/a$), suivi de TM₀₁ ($\omega_c = 2,405c/a$).

5. Cette dégénérescence se produit aussi dans le guide rectangulaire si $a = b$ (section carrée).

Les autres composantes de \mathbf{E} et de \mathbf{B} se calculent en principe à partir des relations (9.19) et (9.21). On trouve

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ i \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + ik \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\} \\ E_\varphi &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -i \frac{\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial r} + ik \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right\} \\ B_r &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + ik \frac{\partial B_z}{\partial r} \right\} \\ B_\varphi &= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ i \frac{\omega \varepsilon \mu}{c} \frac{\partial E_z}{\partial r} + ik \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \right\} \end{aligned} \quad (9.78)$$

où, comme plus haut,

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.79)$$

Par exemple, pour le mode dominant TE_{11} , on trouve $B_z = B_{11} J_1(y_{11} r/a) \cos \varphi$ et donc

$$\begin{aligned} E_r &= -i \frac{a^2 \omega}{c y_{11}^2} \frac{B_{11}}{r} J_1(y_{11} r/a) \sin \varphi \\ E_\varphi &= -i \frac{a \omega}{c y_{11}} B_{11} J_1'(y_{11} r/a) \cos \varphi \\ B_r &= i \frac{ka}{y_{11}} B_{11} J_1'(y_{11} r/a) \cos \varphi \\ B_\varphi &= -i \frac{ka^2}{y_{11}^2} \frac{B_{11}}{r} J_1(y_{11} r/a) \sin \varphi \end{aligned} \quad (9.80)$$

9.F.2 Distribution du courant dans un fil conducteur

Dans cette sous-section nous allons étudier comment la densité de courant se distribue dans un fil conducteur de section circulaire lorsqu'un courant de haute fréquence y circule. On trouvera que la densité de courant est maximale à la surface du fil et décroît vers l'intérieur, avec une longueur caractéristique δ , la longueur de pénétration (cf. Eq. (6.60)). Nous allons aussi calculer l'impédance d'un tel fil, pour le mode de propagation le plus simple.

Considérons un mode TM ($E_z \neq 0$) à l'intérieur d'un fil conducteur de rayon a et de conductivité σ . Supposons que E_z ne dépend que de la coordonnée radiale r . L'éq. (9.23) devient alors

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \gamma^2 E_z = 0 \quad (9.81)$$

Notons que, d'après les expressions (6.53), (6.60) et (9.23), la constante γ^2 est

$$\gamma^2 = \frac{4\pi i \sigma \mu \omega}{c^2} - k^2 = \frac{2i}{\delta^2} - k^2 \quad (9.82)$$

(nous supposons le rapport σ/ω assez grand pour négliger le premier terme de (6.53)). D'autre part, en supposant que $k \sim \omega/c$ dans ce genre de structure, on peut aussi négliger k en comparaison de $1/\delta$ et alors $\gamma \approx \sqrt{2i}/\delta$.

La solution à l'équation différentielle est $E_z(r) = E_z(0)J_0(\gamma r)$, où J_0 est une fonction de Bessel. Cependant, l'argument de cette fonction de Bessel est complexe, car γ^2 a une partie imaginaire. Or, la fonction de Bessel $J_0(z)$ croît avec $|z|$ si z possède une partie imaginaire non nulle. Comme la densité de courant est proportionnelle au champ ($J_z = \sigma E_z$), la distribution radiale de la densité de courant dans le fil, normalisée par la valeur de J_z à la périphérie du fil, est donnée par

$$\left| \frac{J_z(r)}{J_z(a)} \right| = \left| \frac{J_0(\gamma r)}{J_0(\gamma a)} \right| \quad \gamma = \frac{1}{\delta}(1+i) \quad (9.83)$$

Notons que nous prenons le module du courant : la phase du courant varie aussi en fonction de r . La dépendance en r de la densité de courant est illustrée sur la Fig. 9.5.

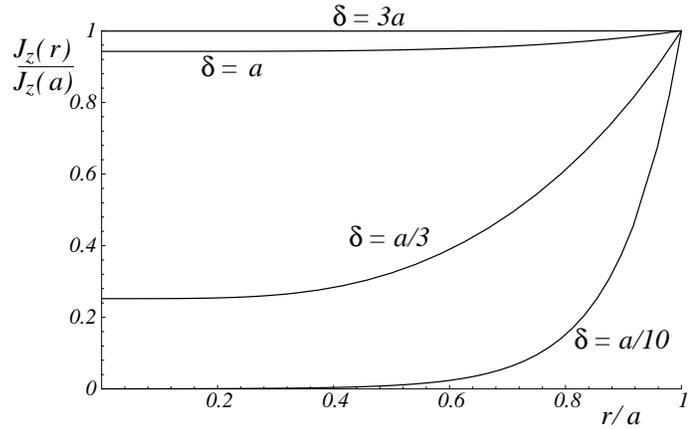


FIGURE 9.5

Dépendance en r du module de la densité de courant dans un fil conducteur cylindrique, normalisée à sa valeur à $r = a$, le rayon du fil, dans le régime $\omega \ll \sigma$ ou $k\delta \ll 1$. On a illustré quatre valeurs différentes de la longueur de pénétration δ .

Calcul de l'impédance

Le courant total circulant dans le fil est

$$I = 2\pi \int_0^a dr r J_z(r) = 2\pi J_z(0) \int_0^a dr r J_0(\gamma r) = \frac{2\pi a}{\gamma} J_z(0) J_1(\gamma a) \quad (9.84)$$

où on a utilisé la relation $(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$. Notons que cette intégrale tient compte du fait que la phase de la densité de courant varie en fonction de r . La tension du fil, mesurée entre deux points de la surface séparés par une distance ℓ (supposée très courte), est

$$V = E_z(a)\ell = \frac{J_z(a)\ell}{\sigma} = \frac{J_z(0)J_0(\gamma a)\ell}{\sigma} \quad (9.85)$$

L'impédance par unité de longueur du fil est alors $Z = V/I\ell$:

$$Z = \frac{\gamma}{2\pi a \sigma} \frac{J_0(\gamma a)}{J_1(\gamma a)} \quad (9.86)$$

Évaluons cette impédance dans la limite des petites fréquences – et donc pour $k = 0$. Dans ce cas, $|\gamma| \ll 1$ et on peut utiliser le développement en série :

$$\frac{J_0(x)}{J_1(x)} \approx \frac{2}{x} \left(1 - \frac{x^2}{8} \right) \quad (9.87)$$

On trouve alors

$$Z \approx \frac{1}{\pi a^2 \sigma} - i \frac{\mu \omega}{2c^2} \quad (9.88)$$

La partie réelle est alors la résistance par unité de longueur, naturellement égale à l'inverse de la section du fil fois l'inverse de la conductivité (la résistivité). Comme $Z = R - i\omega L$, la réactance permet d'évaluer l'inductance par unité de longueur du fil : $L = \mu/2c^2$. Cette inductance est reliée au flux magnétique interne au fil. En général, elle est petite en comparaison du flux généré par une boucle ou une autre structure externe au fil. Cependant, la méthode précédente permet de la définir rigoureusement, en tant que réactance.

9.F.3 Fibre optique à saut d'indice

Dans cette sous-section nous étudierons les modes de propagation les plus simples dans un guide d'onde à section circulaire composé entièrement de matériau diélectrique. On supposera qu'un cylindre infini de rayon a est fait d'un matériau diélectrique de constante ε_1 et qu'il est entouré d'un milieu diélectrique de constante $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. On supposera que ces milieux sont non magnétiques ($\mu = 1$). Ce genre de système modélise une *fibre optique à saut d'indice*. Le premier milieu (ε_1) constitue le coeur de la fibre et le deuxième milieu (ε_2) la gaine. En réalité, la gaine ne s'étend pas à l'infini mais, pour les modes de propagation utilisés, les champs décroissent exponentiellement dans la gaine et ont peut en pratique considérer celle-ci comme infinie car les champs sont suffisamment faibles sur la périphérie de la gaine.

À la différence du guide d'onde entouré de conducteur, nous devons considérer à la fois les champs dans le coeur et dans la gaine et appliquer les conditions de continuité de E_z , E_φ , et \mathbf{B} à l'interface ($r = a$). Ces conditions de continuité sont plus complexes que pour une paroi conductrice, ce qui fait qu'en général les modes TM et TE n'existent pas séparément, mais sont couplés en modes qu'on appelle HE et EH (dans le premier cas, B_z est dominant ($B_z > E_z$) alors que dans le deuxième cas, E_z est dominant ($E_z > B_z$)). L'exception à cette règle sont les modes sans dépendance en φ , qui se séparent encore en modes TE et TM.

Dans chacun des deux milieux, E_z et B_z sont régis par l'équation de Helmholtz (9.23), mais avec des constantes γ_1 et γ_2 différentes. Afin que les champs soient finis quand $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$, les solutions à cette équation dans les deux milieux doivent être

$$r < a : \quad \begin{cases} E_z = A_1 J_m(\gamma_1 r) e^{im\varphi} \\ B_z = B_1 J_m(\gamma_1 r) e^{im\varphi} \end{cases} \quad r > a : \quad \begin{cases} E_z = A_2 H_m(\gamma_2 r) e^{im\varphi} \\ B_z = B_2 H_m(\gamma_2 r) e^{im\varphi} \end{cases} \quad (9.89)$$

Rappelons que la fonction de Hankel est la seule qui ne diverge pas à l'infini pour une valeur complexe de γ_2 . Si $\text{Im } \gamma_2 > 0$, on choisit $H^{(1)}$, alors que si $\text{Im } \gamma_2 < 0$, on choisit $H^{(2)}$. Comme γ_1^2 et γ_2^2 sont tous les deux réels dans les diélectriques sans pertes, on doit se résoudre à choisir γ_1 réel et γ_2 purement imaginaire. Posons donc $\gamma_1 = \gamma$ et $\gamma_2 = i\beta$, avec

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} - k^2 \quad \beta^2 = k^2 - \frac{\varepsilon_2 \omega^2}{c^2} \quad (9.90)$$

De cette expression on voit la nécessité d'avoir $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. D'autre part, la constante de propagation k est soumise à la condition

$$\frac{\varepsilon_2 \omega^2}{c^2} < k^2 < \frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} \quad (9.91)$$

Dans ce cas, on peut utiliser la fonction de Bessel modifiée $K_m(\beta r)$ au lieu de $H^{(1)}(\gamma_2 r)$ et écrire

$$r < a : \begin{cases} E_z = A_1 J_m(\gamma r) e^{im\varphi} \\ B_z = B_1 J_m(\gamma r) e^{im\varphi} \end{cases} \quad r > a : \begin{cases} E_z = A_2 K_m(\beta r) e^{im\varphi} \\ B_z = B_2 K_m(\beta r) e^{im\varphi} \end{cases} \quad (9.92)$$

Ce choix assure que l'onde ne propage pas d'énergie vers l'extérieur de la fibre, car les champs diminuent exponentiellement avec r dans la gaine.

Modes à symétrie azimutale

Concentrons-nous d'abord sur les modes de propagation sans dépendance azimutale ($m = 0$). Les solutions à l'équation de Helmholtz pour E_z et B_z et les autres composantes des champs obtenus des relations (9.78) sont

$$r < a : \begin{aligned} lE_z &= A_1 J_0(\gamma r) & lB_z &= B_1 J_0(\gamma r) \\ E_r &= -\frac{ik}{\gamma} A_1 J_1(\gamma r) & B_r &= -\frac{ik}{\gamma} B_1 J_1(\gamma r) \\ B_\varphi &= -\frac{i\omega\varepsilon_1}{\gamma c} A_1 J_1(\gamma r) & E_\varphi &= \frac{i\omega}{\gamma c} B_1 J_1(\gamma r) \end{aligned} \quad (9.93)$$

$$r > a : \begin{aligned} lE_z &= A_2 K_0(\beta r) & lB_z &= B_2 K_0(\beta r) \\ E_r &= \frac{ik}{\beta} A_2 K_1(\beta r) & B_r &= \frac{ik}{\beta} B_2 K_1(\beta r) \\ B_\varphi &= \frac{i\omega\varepsilon_2}{\beta c} A_2 K_1(\beta r) & E_\varphi &= -\frac{i\omega}{\beta c} B_2 K_1(\beta r) \end{aligned} \quad (9.94)$$

On constate que les modes TE et TM se séparent bien dans ce cas et nous traiterons les deux possibilités séparément.

Les conditions de continuité à $r = a$ de B_z et E_φ pour les modes TE mènent aux équations couplées suivantes :

$$B_1 J_0(\gamma a) = B_2 K_0(\beta a) \quad \frac{1}{\gamma} B_1 J_1(\gamma a) = -\frac{1}{\beta} B_2 K_1(\beta a) \quad (9.95)$$

Pour les modes TM, la continuité de E_z et B_φ impose plutôt

$$A_1 J_0(\gamma a) = A_2 K_0(\beta a) \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} A_1 J_1(\gamma a) = -\frac{\varepsilon_2}{\beta} A_2 K_1(\beta a) \quad (9.96)$$

Posons $A_1 = 1$ et $B_1 = 1$, ce qui équivaut à fixer la normalisation globale de l'onde. En isolant ensuite A_2 et B_2 , les conditions de continuité peuvent être réécrites ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma a} \frac{J_1(\gamma a)}{J_0(\gamma a)} &= -\frac{1}{\beta a} \frac{K_1(\beta a)}{K_0(\beta a)} & (\text{TE}) \\ \frac{\varepsilon_1}{\gamma a} \frac{J_1(\gamma a)}{J_0(\gamma a)} &= -\frac{\varepsilon_2}{\beta a} \frac{K_1(\beta a)}{K_0(\beta a)} & (\text{TM}) \end{aligned} \quad (9.97)$$

Ces équations peuvent être résolues de manière graphique, en tenant compte de la contrainte

$$\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (9.98)$$

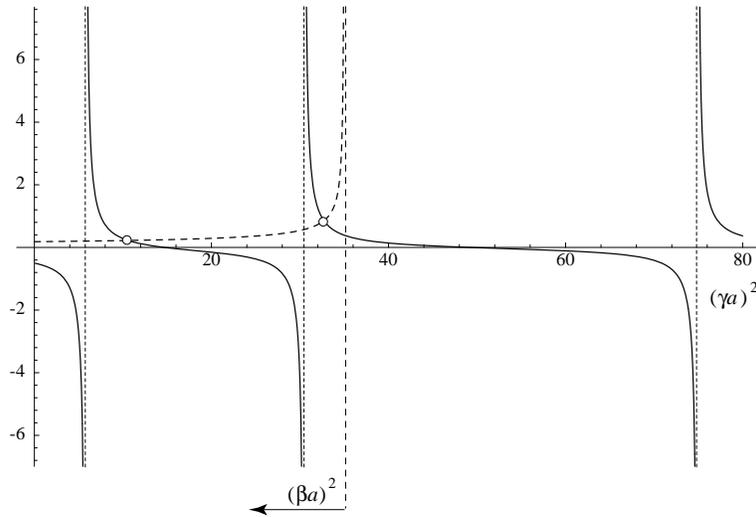


FIGURE 9.6

Solution graphique des équations (9.97) et (9.98). La fonction $J_1(x)/(xJ_0(x))$ apparaît en trait continu et la fonction $K_1(y)/(yK_0(y))$ apparaît en trait discontinu et à rebours, à partir de $(\gamma a)^2 = 35$. Les intersections sont marquées d'un cercle.

La solution graphique se fait de la manière suivante (cf. Fig. 9.6) dans le cas des modes TE : on porte sur un graphique la fonction $f(x) = J_1(x)/(xJ_0(x))$ en fonction de x^2 ($x = \gamma a$). Sur le même graphique, on trace la fonction $g(y) = K_1(y)/(yK_0(y))$ ($y = \beta a$), en fonction de $x^2 = -y^2 + (\omega a/c)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Les intersections des deux courbes correspondent aux solutions des équations (9.97) et (9.98). La fonction $g(y)$ est toujours positive et décroît rapidement avec y , avec une asymptote à $y = 0$. La fonction $f(x)$ possède des asymptotes aux racines de J_0 , c'est-à-dire aux valeurs $x = x_{0n}$. Si ω est trop petit, aucune intersection n'est possible. La première intersection se produit quand

$$\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) = x_{01}^2 \implies \omega_{01} = \frac{c x_{01}}{a \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}} \quad (9.99)$$

Il existe donc une fréquence de coupure. Immédiatement à cette fréquence, on a $\beta = 0$ et donc $\omega_{01} = ck/\sqrt{\epsilon_2}$: l'onde se propage dans la gaine comme en l'absence de guidage. Quand la fréquence augmente au-delà de ω_{01} , β croît beaucoup plus rapidement que γ si $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$, ce qui signifie que l'onde diminue rapidement en fonction de r dans la gaine. À chaque fois que x passe une racine de J_0 , un nouveau mode apparaît, avec fréquence de coupure

$$\omega_{0n} = \frac{c x_{0n}}{a \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}} \quad (9.100)$$

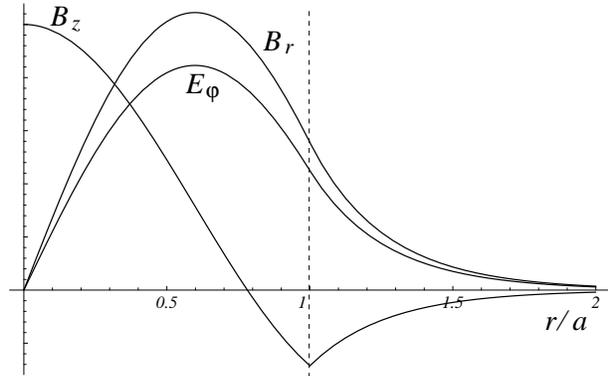
Ces modes plus élevés présentent des oscillations radiales dans le coeur de la fibre.

Remarques :

- ◆ Si la fibre est excitée à une fréquence inférieure à ω_{01} , cela revient à dire que β est imaginaire. Dans ce cas, l'onde propage de l'énergie vers l'extérieur de la fibre et celle-ci agit comme une antenne et non comme un guide d'onde.
- ◆ En pratique, dans une fibre optique, plusieurs modes sont excités en même temps : à une valeur donnée de ω correspondent plusieurs valeurs de k , une pour chaque mode admis. Ces modes

FIGURE 9.7

Tracé de l'amplitude des champs dans le mode TE_{01} d'une fibre à saut d'indice. Nous avons choisi $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\omega a/c = 4,472$. Il s'ensuit que $\gamma a = 3,077$, $\beta a = 3,245$, $\omega a/c = 4,472$ et $ka = 5,525$. Notons que $\partial B_z/\partial n$ n'est pas continu dans ce cas, car la constante diélectrique est discontinue et l'équation (9.12) prévoit alors une discontinuité dans $\partial B_z/\partial n$.



ont cependant des relations de dispersion différentes, car leurs fréquences de coupure sont différentes en général.

Modes avec dépendance azimutale

Comme mentionné plus haut, les modes à dépendance azimutale ne se découpent pas en modes TE et TM, mais plutôt en modes hybrides (EH et HE) présentant une valeur non nulle à la fois de B_z et E_z . En particulier, on montre que le mode HE_{11} est dominant et ne possède pas de fréquence de coupure. Voyons cela en plus de détails. On suppose la forme suivante pour les différentes composantes des champs :

$$r < a \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = A_1 J_m(\gamma r) e^{im\varphi} \\ E_r = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -\frac{\omega m}{cr} B_1 J_m(\gamma r) + ik\gamma A_1 J'_m(\gamma r) \right\} e^{im\varphi} \\ E_\varphi = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -\frac{i\omega\gamma}{c} B_1 J'_m(\gamma r) - \frac{km}{r} A_1 J_m(\gamma r) \right\} e^{im\varphi} \\ B_z = B_1 J_m(\gamma r) e^{im\varphi} \\ B_r = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -\frac{\omega\varepsilon_1 m}{cr} A_1 J_m(\gamma r) + ik\gamma B_1 J'_m(\gamma r) \right\} e^{im\varphi} \\ B_\varphi = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{i\omega\varepsilon_1\gamma}{c} A_1 J'_m(\gamma r) - \frac{km}{r} B_1 J_m(\gamma r) \right\} e^{im\varphi} \end{array} \right. \quad (9.101)$$

$$r > a \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = A_2 K_m(\beta r) e^{im\varphi} \\ E_r = -\frac{1}{\beta^2} \left\{ -\frac{\omega m}{cr} B_2 K_m(\beta r) + ik\beta A_2 K'_m(\beta r) \right\} e^{im\varphi} \\ E_\varphi = -\frac{1}{\beta^2} \left\{ -\frac{i\omega\beta}{c} B_2 K'_m(\beta r) - \frac{km}{r} A_2 K_m(\beta r) \right\} e^{im\varphi} \\ B_z = B_2 K_m(\beta r) e^{im\varphi} \\ B_r = -\frac{1}{\beta^2} \left\{ -\frac{\omega\varepsilon_2 m}{cr} A_2 K_m(\beta r) + ik\beta B_2 K'_m(\beta r) \right\} e^{im\varphi} \\ B_\varphi = -\frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{i\omega\varepsilon_2\beta}{c} A_2 K'_m(\beta r) - \frac{km}{r} B_2 K_m(\beta r) \right\} e^{im\varphi} \end{array} \right. \quad (9.102)$$

Imposer la continuité de E_z , E_φ , B_z et B_φ à l'interface $r = a$ revient à imposer le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} J_m(\gamma a) & -K_m(\beta a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\gamma a) & -K_m(\beta a) \\ \frac{mk}{\gamma^2 a} J_m(\gamma a) & \frac{mk}{\beta^2 a} K_m(\beta a) & \frac{i\omega}{c\gamma} J'_m(\gamma a) & \frac{i\omega}{c\beta} K'_m(\beta a) \\ \frac{i\omega\varepsilon_1}{\gamma c} J'_m(\gamma a) & \frac{i\omega\varepsilon_2}{\beta c} K'_m(\beta a) & -\frac{mk}{\gamma^2 a} J_m(\gamma a) & -\frac{mk}{\beta^2 a} K_m(\beta a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.103)$$

Pour que ce système d'équations possède une solution non triviale, le déterminant de la matrice doit s'annuler. On montre que l'équation qui en résulte est

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma a} \frac{J'_m}{J_m} + \frac{\varepsilon_2}{\beta a} \frac{K'_m}{K_m} \right) \left(\frac{1}{\gamma a} \frac{J'_m}{J_m} + \frac{1}{\beta a} \frac{K'_m}{K_m} \right) = \frac{m^2 k^2 \omega^2}{c^2 a^4 \gamma^4 \beta^4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \quad (9.104)$$

Cette équation établit une contrainte qui lie la constante de propagation k et la fréquence ω . Ses solutions fournissent donc les relations de dispersions des différents modes possibles. Une fois cette contrainte résolue, on peut alors exprimer les constantes A_2 , B_1 et B_2 en fonction de A_1 et trouver l'expression explicite des composantes des champs dans chacun des modes de propagation.

Dans le cas $m = 0$, on retrouve bien les contraintes (9.97), car le membre de droite de l'éq. (9.104) est alors nul et l'un ou l'autre des deux facteurs doit s'annuler. Ceci a comme conséquence que les modes TE et TM ne sont pas couplés, ce qui se voit aussi bien de l'équation matricielle (9.103) quand $m = 0$. Quand la différence d'indice entre le coeur et la gaine est faible, on peut négliger $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ en première approximation et on se retrouve avec un ensemble d'équations similaire :

$$\frac{1}{\beta a} \frac{K'_m(\beta a)}{K_m(\beta a)} = -\frac{1}{\gamma a} \frac{J'_m(\gamma a)}{J_m(\gamma a)} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon_2}{\beta a} \frac{K'_m(\beta a)}{K_m(\beta a)} = -\frac{\varepsilon_1}{\gamma a} \frac{J'_m(\gamma a)}{J_m(\gamma a)} \quad (9.105)$$

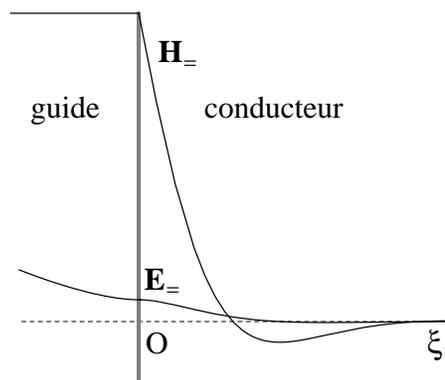
La solution graphique de ces équations ne montre aucune fréquence de coupure pour $m > 1$, car $J_m(0) = 0$ si $m > 0$. Bien sûr, l'effet du membre de droite de (9.104) négligé ici est de coupler les solutions TM et TE, de sorte qu'on se retrouve avec des modes de type EH (où $E_z \gg B_z$) et des modes HE (où $E_z \ll B_z$).

Quand la différence d'indice est faible, on montre aussi que les relations de dispersion pour $m + 1$ et $m - 1$ sont très semblables, de sorte qu'on peut envisager de combiner les modes $(m + 1, p)$ et $(m - 1, p)$ [p est un indice de mode pour un m donné] en des modes hybrides qu'on dénote LP_{mp}^x et LP_{mp}^y . Ces modes hybrides, comme leur notation l'indique, sont polarisés linéairement dans les directions transverses. C'est une caractéristique du cas $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \ll 1$ que les composantes transverses des champs sont beaucoup plus grandes que les composantes longitudinales, car dans ce cas la capacité de la fibre à guider les ondes est beaucoup moins grande et les modes sont plus semblables à ce qu'on retrouve dans l'espace indéfini.

G Pertes d'énergie dans les guides d'onde à parois conductrices

Une onde se propageant dans un guide est atténuée s'il y a, sur les parois de la cavité, un flux d'énergie vers l'intérieur du matériau conducteur. Si la conductivité σ de la paroi est infinie, alors le champ électrique s'annule dans la paroi et la continuité de la composante parallèle à cette paroi force la condition $E_{\parallel} = 0$ à la surface. Par conséquent, le vecteur de Poynting n'a pas de composante normale sur la paroi et aucune énergie n'est transmise au conducteur.

FIGURE 9.8
Pénétration des champs magnétique et électrique à l'intérieur de la paroi conductrice d'un guide d'onde.



Si la conductivité est grande sans être infinie, alors les champs sont non nuls dans le conducteur sur une épaisseur caractéristique δ (la longueur de pénétration). Supposons que les dimensions du guide sont grandes par rapport à δ et appelons ξ la coordonnée qui mesure la distance entre un point dans le conducteur et la surface intérieure du guide. On sait que le champ magnétique varie en fonction de ξ :

$$\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}(0) e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta} \quad (9.106)$$

On sait aussi que la composante de \mathbf{E} perpendiculaire à \mathbf{H} et tangentielle à la paroi est beaucoup plus petite que \mathbf{H} par un facteur $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}$ et déphasée par $\pi/4$ (voir la fig. 9.8). Le vecteur de Poynting moyen entrant dans la paroi a donc comme valeur

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} = -\frac{\omega\mu\delta}{16\pi} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} \quad (9.107)$$

(ici σ et μ caractérisent la paroi et non le milieu à l'intérieur du guide). La perte d'énergie par unité de temps et de surface dans le guide est

$$\frac{dP}{dA} = \frac{\omega\mu\delta}{16\pi} |\mathbf{B}|^2 \quad (9.108)$$

où \mathbf{B} est pris sur la surface du guide ($\mathbf{B} = \mathbf{H}$ à l'intérieur du guide). La quantité d'intérêt ici est la fraction de son énergie que l'onde perd à l'intérieur d'une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Ceci s'obtient en intégrant dP/dA sur les parois du guide sur une distance λ selon l'axe z . Si on multiplie le résultat par la période $2\pi/\omega$ de l'onde on obtient l'énergie dissipée par les parois dans le temps que l'onde prend à se propager sur une distance λ . Si on divise par l'énergie contenue dans l'onde sur une distance λ , on obtient un rapport (sans unités), plus petit que 1, qu'on peut écrire comme

$\exp -\lambda/\xi$, où ξ est une distance d'atténuation. On s'attend alors que l'amplitude de l'onde diminue exponentiellement lors de sa propagation, avec une atténuation $\exp -z/2\xi$ (la densité d'énergie varie comme le carré de l'amplitude).

H Cavités électromagnétiques

Une cavité électromagnétique est un conducteur fermé de tous les côtés dans lequel le champ électromagnétique peut osciller à certaines fréquences. En général toute enceinte conductrice fermée peut faire office de cavité électromagnétique. Leur propriété générale est que des ondes progressives monochromatiques ne peuvent s'y propager : seules des ondes stationnaires existent, avec des fréquences discrètes, qu'on affuble généralement de trois indices : ω_{mnr} . Mathématiquement, le problème est de trouver explicitement les fréquences propres de la cavité ainsi que la configuration des champs constituant chaque mode d'oscillation. Ceci revient à résoudre l'équation de Helmholtz pour une des composantes de \mathbf{E} et de \mathbf{B} et à utiliser une généralisation des éq (9.19) et (9.21) pour trouver les autres composantes.

Concentrons-nous sur un type spécial de cavité, obtenu en ajoutant des parois planes aux deux extrémités d'un guide d'onde creux de longueur finie. Des ondes progressives ne peuvent plus se propager selon \mathbf{z} , mais seulement des ondes stationnaires. Pour une valeur donnée de la fréquence, on doit superposer deux ondes progressives se propageant dans les directions z et $-z$ (c.-à-d. avec des nombres d'onde $k = q$ et $k = -q$) et obtenir une onde stationnaire satisfaisant aux conditions aux limites sur les parois situées à $z = 0$ et à $z = \ell$ (ℓ est la longueur de la cavité). Ces conditions aux limites sont $B_z = 0$ et $E_x = E_y = 0$ sur les nouvelles parois. Dans ce qui suit nous supposons que la cavité est vide ($\epsilon = \mu = 1$).

Considérons premièrement les modes TE ($E_z = 0$). Les équations (9.19) et (9.21) deviennent alors

$$\mathbf{B}_\perp = \frac{ikc^2}{\omega_{mn}^2} \nabla_\perp B_z \quad \mathbf{E}_\perp = \frac{-ic\omega}{\omega_{mn}^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp B_z \quad (9.109)$$

Pour obtenir une onde stationnaire respectant les conditions aux limites à $z = 0$ et $z = \ell$, on doit combiner les deux ondes suivantes :

$$B_z^{(+)} = B_z^0(x, y) e^{iqz} \quad B_z^{(-)} = B_z^0(x, y) e^{-iqz} \quad (9.110)$$

Notons que la fonction $B_z^0(x, y)$ est commune aux deux solutions ($k = q$ et $k = -q$) car seul $k^2 = q^2$ figure dans l'équation de Helmholtz. En particulier, pour que B_z s'annule à $z = 0$, on doit adopter la combinaison

$$\frac{1}{2i} (B_z^{(+)} - B_z^{(-)}) = B_z^0(x, y) \sin(qz) \quad (9.111)$$

Pour que B_z s'annule à $z = \ell$, q doit être quantifié : $q = r\pi/\ell$ où r est un entier positif. Les autres composantes sont ensuite obtenues en appliquant les relations (9.109) à $B_z^{(+)}$ et $B_z^{(-)}$ séparément et en combinant le résultat de la même manière que pour B_z :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \frac{1}{2i} \frac{-ic\omega}{\omega_{mn}^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp (B_z^{(+)} - B_z^{(-)}) = \frac{-i\omega c}{\omega_{mn}^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp B_z^0(x, y) \sin qz \\ \mathbf{B}_\perp &= \frac{1}{2i} \frac{iqc^2}{\omega_{mn}^2} \nabla_\perp (B_z^{(+)} + B_z^{(-)}) = \frac{qc^2}{\omega_{mn}^2} \nabla_\perp B_z^0(x, y) \cos qz \end{aligned} \quad (\text{TE}) \quad (9.112)$$

On remarque que \mathbf{E}_\perp s'annule à $z = 0$, comme requis.

Dans le cas des modes TM ($B_z = 0$), on doit combiner les ondes suivantes :

$$\mathbf{E}_z^{(+)} = E_z^0(x, y) e^{iqz} \quad \mathbf{E}_z^{(-)} = E_z^0(x, y) e^{-iqz} \quad (9.113)$$

Pour respecter les conditions aux limites, on prend plutôt la combinaison

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E}_z^{(+)} + \mathbf{E}_z^{(-)}) = E_z^0(x, y) \cos(qz) \quad (9.114)$$

Les autres composantes sont alors

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\perp &= \frac{i\omega c}{\omega_{mn}^2} \mathbf{z} \wedge \nabla_\perp E_z^0(x, y) \cos qz \\ \mathbf{E}_\perp &= -\frac{qc^2}{\omega_{mn}^2} \nabla_\perp E_z^0(x, y) \sin qz \end{aligned} \quad (\text{TM}) \quad (9.115)$$

Les conditions aux limites à $z = 0$ et $z = \ell$ sont satisfaites, car $q = r\pi/\ell$ et \mathbf{E}_\perp s'annule à ces endroits.

Les fréquences d'oscillation sont maintenant quantifiées. Si ω_{mn} est la fréquence de coupure dans un mode (m, n) du guide d'onde correspondant ayant la même coupe transversale que la cavité, alors les fréquences d'oscillations permises sont

$$\omega_{mnr} = \sqrt{\omega_{mn}^2 + (c\pi r/\ell)^2} \quad (9.116)$$

Jusqu'ici nous avons considéré une cavité dont la section a une forme arbitraire. Concentrons-nous maintenant sur une cavité rectangulaire de dimensions $a \times b \times \ell$. Dans ce cas, il est utile d'introduire la notation suivante :

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad k_z = \frac{r\pi}{\ell} \quad \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (9.117)$$

Dans les modes TE, on montre, à l'aide des relations ci-haut, que les différentes composantes des champs sont les suivantes :

$$B_z = B \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad (9.118)$$

$$B_x = -\frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} B \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \quad (9.119)$$

$$B_y = -\frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} B \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad (9.120)$$

$$E_z = 0 \quad (9.121)$$

$$E_x = -i \frac{\omega}{c} \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} B \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad (9.122)$$

$$E_y = i \frac{\omega}{c} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} B \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad (9.123)$$

où r doit être non nul, afin que B_z soit aussi non nul. Dans les modes TM, on trouve plutôt

$$B_z = 0 \quad (9.124)$$

$$B_x = -i \frac{\omega}{c} \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} E \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \quad (9.125)$$

$$B_y = i \frac{\omega}{c} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} E \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad (9.126)$$

$$E_z = E \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad (9.127)$$

$$E_x = -\frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} E \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad (9.128)$$

$$E_y = -\frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} E \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad (9.129)$$

où m et n doivent être tous les deux non nuls, afin que E_z soit non nul et que la solution soit non triviale.

Évidemment, la distinction entre modes TE et TM est artificielle dans une cavité rectangulaire, car n'importe lequel des trois axes cartésiens peut être choisi comme axe du guide, dans ce cas. Les modes les plus simples sont obtenus quand deux des indices (m, n, r) sont l'unité et l'autre est nul : (1,1,0), (1,0,1) et (0,1,1). Dans chaque cas, une seule des composantes de \mathbf{E} est non nulle (respectivement E_z , E_y et E_x) et la composante correspondante du champ \mathbf{B} s'annule (le champ \mathbf{B} circule autour de \mathbf{E}).

I Facteur de qualité

On définit le *facteur de qualité* Q d'une cavité comme le rapport de l'énergie moyenne contenue dans la cavité sur la perte d'énergie par cycle d'oscillation :

$$Q = \omega_0 \frac{\text{Énergie}}{\text{Puissance perdue}} \quad (9.130)$$

où ω_0 est la fréquence du mode d'oscillation considéré. Étant donné que l'énergie U de la cavité (moyennée sur une fréquence) et la puissance dissipée sont toutes les deux proportionnelles au carré de l'amplitude des champs, le facteur Q ainsi défini est indépendant de l'amplitude et ne dépend que de la forme de la cavité, du mode d'oscillation considéré et de la conductivité des parois (ou d'autres substances contenues dans la cavité). La variation dans le temps de U est alors

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}U \Rightarrow U(t) = U_0 \exp -\omega_0 t / Q \quad (9.131)$$

Comme l'énergie varie comme le carré du champ, ce dernier (électrique ou magnétique) ne varie plus de manière purement oscillatoire dans le temps, mais diminue exponentiellement :

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t / 2Q} e^{-i\omega_0 t} \quad (9.132)$$

Le spectre en fréquences correspondant s'obtient par transformation de Fourier :

$$E(\omega) = \int_0^{\infty} dt E_0 e^{-\omega_0 t / 2Q} e^{i(\omega - \omega_0)t} \quad (9.133)$$

Cette expression mène au spectre suivant :

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0 / 2Q)^2} \quad (9.134)$$

Il s'agit d'une courbe de type Lorentzien, dont la largeur à mi-hauteur est $\Gamma = \omega_0 / Q$. Plus le facteur de qualité est grand, plus le spectre autour d'une fréquence propre donnée ressemble à une fonction delta.

La perte d'énergie peut provenir de plusieurs sources : la plus évidente et la plus simple à calculer est la dissipation ohmique dans les parois, mais ce n'est pas la plus importante. Des pertes plus importantes sont dues aux orifices pratiqués dans la cavité, soit dans le but de l'exciter (par exemple à l'aide d'un câble coaxial), soit dans le but précis d'émettre du rayonnement à partir de la cavité. Des fissures non intentionnelles sont aussi une cause de dissipation d'énergie. Enfin, on utilise des cavités en physique expérimentale dans le but de soumettre un échantillon de matériau à des champs électrique ou magnétique de haute fréquence dans des directions bien déterminées (résonance paramagnétique ou paraélectrique). L'échantillon qu'on introduit dans la cavité cause alors une dissipation additionnelle d'énergie et c'est cette dissipation additionnelle qu'on désire mesurer pour caractériser le matériau.

Pour calculer la contribution ohmique au facteur Q , il faut calculer U et la perte ohmique en se servant de la formule

$$U = \frac{1}{16\pi} \int d^3r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) \quad (9.135)$$

pour U et de (9.108), intégré sur la surface de la cavité, pour la puissance dissipée P . Sans faire un calcul détaillé, on devine que le facteur de qualité devrait être de l'ordre de L/δ , où L est la dimension linéaire de la cavité et δ est la longueur de pénétration. En effet, le volume dans lequel se produit la dissipation d'énergie est de l'ordre de $L^2\delta$, grosso modo la surface de la paroi multipliée par δ , alors que le volume contenant l'énergie de la cavité est de l'ordre de L^3 . Si \mathcal{E} est la densité d'énergie moyenne à l'intérieur de la cavité, il se dissipe une quantité d'énergie $\sim \mathcal{E}\delta L^2$ dans une période d'oscillation, alors que l'énergie de la cavité est $\sim \mathcal{E}L^3$, d'où $Q \sim L/\delta$.

En plus d'élargir les pics de résonance de la cavité, la dissipation produit un léger déplacement de la fréquence propre. Ceci peut être attribué à l'élargissement effectif de la cavité associé à une longueur de pénétration δ . Considérons par exemple une cavité cubique de côté L . La fréquence d'un mode particulier varie comme L^{-1} , de sorte qu'une augmentation $L \rightarrow L + \delta$ de la largeur produit un déplacement de la fréquence $\Delta\omega = -\omega\delta/L \sim -\omega/Q$. Un calcul plus détaillé (basé sur des principes plus rigoureux) produit plutôt le déplacement suivant :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2Q} \quad (9.136)$$

Une formule plus générale du déplacement de la fréquence de résonance due à une perturbation de la cavité est due à Slater :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta U_H - \Delta U_E}{U_{\text{tot.}}}$$

où ΔU_H est la variation d'énergie magnétique introduite par la perturbation, ΔU_E la variation correspondante dans l'énergie électrique, et $U_{\text{tot.}}$ l'énergie totale.

Problèmes

Problème 9.1

Considérez un guide d'onde creux de forme quelconque. En raison de la conductivité finie des parois, l'intensité de l'onde diminue exponentiellement le long du guide : $I(z) = I(0)e^{-2\alpha z}$, où α est le coefficient d'atténuation.

A Montrez que

$$\alpha = \frac{\omega\zeta}{ck} \frac{\int_{\partial S} |\mathbf{B}|^2}{\int_S (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)} \quad (9.137)$$

où \int_S signifie une intégrale (double) sur la section du guide et $\int_{\partial S}$ signifie une intégrale (simple) sur la paroi du guide à z fixe. Ici $\zeta = \omega\mu\delta/2c$.

B Considérons maintenant un mode TE. Montrez que l'expression ci-haut se réduit à

$$\alpha = \frac{\zeta\gamma^2 c}{2k\omega} \frac{\int_{\partial S} (|\mathbf{B}_z|^2 + (k^2/\gamma^4)|\nabla_t \mathbf{B}_z|^2)}{\int_S |\mathbf{B}_z|^2} \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (9.138)$$

Une intégration par parties est nécessaire au dénominateur.

C Calculez α dans le cas du mode TE_{mn} d'un guide circulaire de rayon a , pour lequel $\mathbf{B}_z = AJ_m(\gamma r)\cos(m\varphi)$, où $J'_m(\gamma a) = 0$. Réponse :

$$\alpha = \frac{\zeta\gamma^2 c}{k\omega a} \left[1 + \frac{\omega^2}{c^2\gamma^2} \frac{m^2}{\gamma^2 a^2 - m^2} \right] \quad (9.139)$$

L'intégrale suivante est nécessaire :

$$\int dx x J_m^2(bx) = \frac{1}{2} x^2 [J_m^2(bx) - J_{m-1}(bx)J_{m+1}(bx)] \quad (9.140)$$

ainsi que les relations

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x) \quad J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x) \quad (9.141)$$

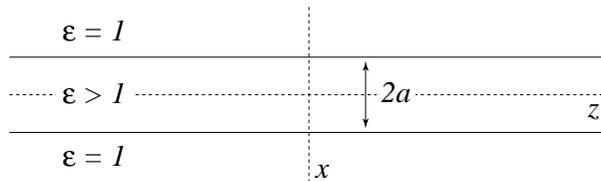
Problème 9.2

Calculez explicitement toutes les composantes des champs dans le mode TM_{01} d'un guide d'onde circulaire et illustrez les lignes de champ magnétique et électrique dans une coupe à z constant et une coupe à φ constant.

Problème 9.3

Considérons un guide d'onde fait d'une plaque diélectrique de constante ϵ , d'épaisseur $2a$ dans la direction x et infinie dans les deux autres directions. La plaque est entourée des deux côtés d'un milieu de constante diélectrique unité, sans aucun conducteur. On place l'origine au milieu de la plaque et on considère uniquement des ondes se propageant dans la direction z , sans aucune dépendance en y (le problème est donc effectivement bidimensionnel).

On s'intéresse ici aux modes de propagation de type TE et TM qui sont confinés à proximité de la plaque, c'est-à-dire qui décroissent (exponentiellement) à l'extérieur de la plaque. On cherche une expression analytique des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dans les différents modes de propagation.



A Trouvez l'expression des modes TE possibles. Comme le problème possède une symétrie miroir par rapport au plan $x = 0$, certains modes sont pairs ($B_z(-x, z) = B_z(x, z)$) et d'autres sont impairs ($B_z(-x, z) = -B_z(x, z)$). Il faut traiter ces deux cas séparément et vous limiter au domaine $x > 0$. Il vous faut trouver des solutions dans les domaines $0 < x < a$ et $x > a$ et raccorder ces solutions à $x = a$ à l'aide des conditions de continuité appropriées.

B Montrez que la solution n'est possible que si la relation suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \tan(\gamma a) &= -\frac{\gamma}{\delta} & \text{(cas pair)} \\ \cotan(\gamma a) &= \frac{\gamma}{\delta} & \text{(cas impair)} \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \gamma^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \\ \delta^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \end{cases} \quad (9.142)$$

k étant la constante de propagation selon z . En analysant ces contraintes graphiquement, obtenez l'expression des différentes fréquences de coupure.

C Dans le cas $\omega = 2c/a$ et $\epsilon = 2$, obtenez numériquement la solution aux contraintes et faites un graphique de B_z et E_y en fonction de x pour les modes pair et impair. Aidez-vous d'un ordinateur.

D Faites un schéma des lignes de champ du mode TE (pair et impair). Le schéma n'a pas à être exact, mais doit être qualitativement correct.

E Calculez le vecteur de Poynting dans un mode TE pair général. Vérifiez qu'il pointe bien dans la direction z . Calculez la fraction du flux énergétique effectivement contenue dans la plaque.

F Recommencez les parties (a) et (b) pour les modes TM.

Problème 9.4

Nous allons étudier dans ce problème la propagation d'un mode TM dans une fibre optique à gradient d'indice, le type de fibre le plus utilisé. Nous supposons que l'indice de réfraction a la forme suivante :

$$n(r) = n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (9.143)$$

où a est une distance caractéristique de la fibre et n_0 est l'indice au centre de la fibre. Nous supposons que le rayon de la fibre est suffisamment grand pour négliger les effets de bord, comme s'il était infini. Dans un milieu à indice variable, le champ électrique obéit à l'équation suivante :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} \right) \quad (9.144)$$

Nous allons négliger le membre de droite de cette équation ; l'effet de la variation de l'indice de réfraction se fera sentir dans le terme en $\omega^2 \varepsilon(r)/c^2$ seulement. Ceci revient à supposer que le gradient de ε est petit, ou encore que a est grand en comparaison de la longueur d'onde utilisée.

A Dans les conditions ci-haut, écrivez l'équation différentielle pour E_z et séparez les variables en coordonnées cartésiennes :

$$E_z = X(x)Y(y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.145)$$

Démontrez que X et Y satisfont aux équations suivantes :

$$X'' - u^2 X + \alpha^2 X = 0 \quad Y'' - v^2 Y + \beta^2 Y = 0 \quad (9.146)$$

en fonction des variables

$$u = \frac{\sqrt{2}x}{\ell} \quad \text{et} \quad v = \frac{\sqrt{2}y}{\ell} \quad \text{où} \quad \ell^2 = \frac{2ac}{\omega n_0} \quad (9.147)$$

et où α et β sont des constantes.

B Démontrez que la fonction

$$X(u) = e^{-u^2/2} \quad (9.148)$$

est une solution à l'équation ci-haut et trouvez la forme correspondante de $E_z(x, y)$. Calculez ensuite les autres composantes de \mathbf{E} et de \mathbf{B} . Quelle est la relation de dispersion $\omega(k)$ de ce mode de propagation ? Faites-en un schéma. Y a-t-il une fréquence de coupure ?

C Calculez le vecteur de Poynting associé à cette solution en faites un schéma de la façon dont il varie en fonction de r .

D Passons maintenant aux modes plus élevés. Démontrez que les fonctions

$$X_m(u) = (-1)^m e^{u^2/2} \frac{d^m}{du^m} e^{-u^2} \quad (9.149)$$

sont aussi des solutions à l'équation (9.146). Pour ce faire, il vous est conseillé de suivre les étapes suivantes : (i) démontrer que $X'_m = uX_m - X_{m+1}$ et que $X''_m = X_m + u^2X_m - 2uX_{m+1} + X_{m+2}$. (ii) démontrer que $X_{m+2} = 2uX_{m+1} - 2(m+1)X_m$ en vous servant de la relation

$$\frac{d^{m+1}}{du^{m+1}}(uf) = (m+1)\frac{d^m f}{du^m} + u\frac{d^{m+1}}{du^{m+1}}f \quad (9.150)$$

pour une fonction quelconque $f(u)$ (vous n'avez pas à démontrer cette dernière relation). (iii) substituez ces résultats dans l'équation différentielle pour X .

Un mode plus général peut donc s'écrire comme

$$E_z = X_m(u)Y_n(v)e^{i(kz-\omega t)} \quad (9.151)$$

Trouvez pour ce mode la relation entre ω et k et identifiez les fréquences de coupure ω_{mn} , s'il y a lieu.

CHAPITRE 10

Rayonnement d'ondes électromagnétiques

A Rayonnement par une source monochromatique

Dans cette section nous étudions le rayonnement par une source monochromatique quelconque, dans l'approximation où la distance r au point d'observation est beaucoup plus grande que la longueur d'onde du rayonnement ou que la taille des sources. Considérons un système de charges et de courants tel que les densités ρ et \mathbf{J} ont une dépendance harmonique dans le temps :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (10.1)$$

Ceci n'est pas une restriction véritable, car une densité quelconque, qui ne respecte généralement pas ce critère, peut toujours être exprimée comme une transformée de Fourier dans le temps, et chaque composante de Fourier respecte alors séparément cette condition. Il suffirait alors de déterminer le rayonnement par une source monochromatique pour ensuite, par transformée inverse de Fourier, obtenir le rayonnement produit par la source originale.

Concentrons-nous sur la densité de courant et le potentiel vecteur. Le champ magnétique est alors obtenu par $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et le champ électrique par la loi d'Ampère-Maxwell : $\mathbf{E} = (i/k)\nabla \wedge \mathbf{B}$ où $k = \omega/c$. D'après l'éq. (2.28), le potentiel vecteur retardé est

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{c} \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (10.2)$$

et l'intégration est prise sur la région qui contient les charges en mouvement.

Il y a ici deux longueurs caractéristiques : la dimension ℓ du système radiant (la longueur d'une antenne, par exemple) et la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ du rayonnement. Nous allons supposer que le point d'observation est très éloigné : $r \gg \ell$ et $r \gg \lambda$. On dit alors que l'observateur se situe dans la *zone de rayonnement*. Se restreindre à la zone de rayonnement équivaut à l'approximation

de Fraunhofer dans la théorie de la diffraction.¹ Prenons l'origine des coordonnées au centre de la source des courants. Si $\hat{\mathbf{r}}$ est la normale à partir de l'origine et r la distance à l'origine, on peut faire l'approximation suivante suffisamment loin des sources :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \quad (10.3)$$

On utilise donc l'expression approchée suivante de la fonction de Green :

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\exp ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik \cdot \mathbf{r}'} \quad (10.4)$$

où on a introduit le vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$. Il s'agit du premier terme d'un double développement en r'/r et en λ/r . Les termes négligés décroissent comme $1/r^2$ aux grandes distances et n'auront pas de conséquence sur le rayonnement comme tel. On peut finalement écrire

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \mathbf{N}(\mathbf{k}) \quad \mathbf{N}(\mathbf{k}) = \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik \cdot \mathbf{r}'} \quad (10.5)$$

le vecteur $\mathbf{N}(\mathbf{k})$, qui ne dépend que de la direction du point d'observation, est appelé *vecteur de rayonnement*. Notons que, dans les cas où la distribution de courant est portée par un fil dont on peut négliger l'épaisseur, on peut remplacer l'élément de courant $d^3 r \mathbf{J}$ par $I d\mathbf{l}$, où I est le courant porté par le fil et $d\mathbf{l}$ l'élément vectoriel de circuit (l'élément de longueur du circuit, dans la direction du fil). On trouve alors l'expression équivalente

$$\mathbf{N}(\mathbf{k}) = I \int d\mathbf{l}' e^{-ik \cdot \mathbf{r}'} \quad (10.6)$$

où l'intégrale est prise le long du circuit, \mathbf{r}' étant la coordonnée de l'élément $d\mathbf{l}'$.

Une expression semblable existe pour le potentiel électrique :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \quad \tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') e^{-ik \cdot \mathbf{r}'} \quad (10.7)$$

On constate que les potentiels sont des ondes sortantes e^{ikr}/r , modulées selon les directions par la transformée de Fourier de la distribution de courant ou de charge (selon le cas) au vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$. Notons que l'équation de continuité nous permet d'exprimer $\tilde{\rho}$ en fonction de \mathbf{N} . En effet,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} - i\omega \rho = 0 \implies \rho = \frac{-i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (10.8)$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) &= \frac{-i}{\omega} \int d^3 r \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{i}{\omega} \int d^3 r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla e^{-ik \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\omega} \int d^3 r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k} e^{-ik \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (10.9)$$

1. On définit aussi la *zone statique* par la condition $\ell \ll r \ll \lambda$. Dans cette zone l'effet du retard est négligeable et on obtient la même expression pour \mathbf{A} que dans le cas statique, sauf pour une dépendance harmonique dans le temps. Cette zone n'existe bien sûr que pour des systèmes petits par rapport à la longueur d'onde ($\ell \ll \lambda$).

Calculons maintenant les champs, en commençant par le champ magnétique :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla(e^{ikr}/cr) \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k}) + \frac{e^{ikr}}{cr} \nabla \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k}) \quad (10.10)$$

Cependant,

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{cr} = (ikr - 1) \frac{e^{ikr}}{cr^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10.11)$$

Dans la zone de rayonnement, le premier terme de la parenthèse domine et on peut négliger le deuxième. De même, on néglige $\nabla \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k})$ car la partie angulaire du gradient comporte une puissance de $1/r$. On peut donc écrire, dans la zone de rayonnement,

$$\mathbf{B} = \frac{ik}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k}) \quad (10.12)$$

Le champ électrique s'obtient de façon similaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &\approx ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(-\tilde{\rho}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{c} \mathbf{N} \right) \\ &= ik \frac{e^{ikr}}{cr} (\mathbf{N} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{N})) \end{aligned} \quad (10.13)$$

où l'approximation est valable dans la zone de rayonnement ($kr \gg 1$). Cette relation peut aussi s'écrire

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (10.14)$$

et est toute naturelle si on considère que l'onde sphérique devient pratiquement une onde plane se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{r}}$ lorsque $kr \gg 1$.

Le vecteur de Poynting moyenné dans le temps est, quant à lui,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*) = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{B}|^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (10.15)$$

Il est important que le vecteur de Poynting décroisse comme $1/r^2$, car ceci permet au flux d'énergie associé de s'échapper à l'infini. En effet, le flux d'énergie à travers une sphère de rayon R très grand est alors indépendant de R et équivaut à la puissance totale rayonnée par le système. La quantité d'intérêt ici est la puissance rayonnée par angle solide :

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{k^2}{8\pi c} |\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k})|^2 \quad (10.16)$$

Si le vecteur \mathbf{N} est réel (plus précisément, si toutes les composantes de \mathbf{N} ont la même phase), alors cette relation peut s'écrire

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{8\pi c} k^2 |\mathbf{N}(\mathbf{k})|^2 \sin^2 \gamma \quad (10.17)$$

où γ est l'angle entre $\hat{\mathbf{r}}$ et $\mathbf{N}(\mathbf{k})$.

Il est souvent utile dans ce contexte de décomposer le vecteur de rayonnement en composantes sphériques :

$$\mathbf{N}(\mathbf{k}) = N_r \hat{\mathbf{r}} + N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (10.18)$$

En fonction de ces composantes, on voit immédiatement que

$$\mathbf{B} = \frac{ik}{c} \frac{e^{ikr}}{r} (N_\theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} - N_\varphi \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad \mathbf{E} = \frac{ik}{c} \frac{e^{ikr}}{r} (N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (10.19)$$

La puissance rayonnée est alors

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} (|N_\theta|^2 + |N_\varphi|^2) \quad (10.20)$$

B Rayonnement multipolaire

10.B.1 Rayonnement dipolaire électrique

Le vecteur de rayonnement $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ s'obtient en évaluant explicitement l'expression (10.5), lorsque la distribution de courant est connue. Cependant, même pour une distribution compliquée, on peut arriver à certaines conclusions générales lorsque la taille ℓ de la distribution de courant est petite en comparaison avec la longueur d'onde du système. Dans ce cas, l'exposant $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$ est toujours petit et on a avantage à développer l'exponentielle de (10.5) en série. Le terme d'ordre m est donné par

$$\mathbf{N}^{(m)}(\mathbf{k}) = \frac{(-ik)^m}{m!} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^m \quad (10.21)$$

On voit que ce terme est de l'ordre de $(k\ell)^m$. En supposant que $k\ell \ll 1$, seul le premier terme non nul apportera une contribution appréciable.

Le terme $m = 0$ s'écrit

$$\mathbf{N}^{(0)}(\mathbf{k}) = \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (10.22)$$

Dans une situation statique, cette expression est nulle, car dans ce cas $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ et les lignes de densité de courant sont toujours fermées. Au contraire, dans une situation dynamique, on calcule que

$$\int d^3r \mathbf{J}_k(\mathbf{r}) = \int d^3r \mathbf{J}_i(\partial_i x_k) = - \int d^3r (\partial_i \mathbf{J}_i) x_k = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_k \quad (10.23)$$

Rappelons que le moment dipolaire électrique \mathbf{d} d'une distribution a l'expression suivante :

$$\mathbf{d} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad (10.24)$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{N}_{d.\acute{e.}}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = -ikc\mathbf{d} \quad (10.25)$$

Calculons maintenant les champs. Selon (10.12) et (10.13), on a

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{d} \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (10.26)$$

Le vecteur \mathbf{E} se situe donc dans le plan formé par $\hat{\mathbf{r}}$ et \mathbf{d} .

Selon (10.16), la dépendance angulaire de l'intensité du rayonnement est

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4 d^2}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (10.27)$$

où l'angle θ sépare $\hat{\mathbf{r}}$ de \mathbf{d} . Aucun rayonnement n'est émis dans la direction du dipôle ($\theta = 0$) et le rayonnement est maximal dans le plan perpendiculaire au dipôle ($\theta = 90^\circ$). La puissance totale rayonnée est

$$P = \frac{c}{8\pi} k^4 d^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{ck^4}{3} d^2 \quad (10.28)$$

Notons que, en posant $\mathbf{d} = dz$, les composantes sphériques du vecteur de rayonnement sont

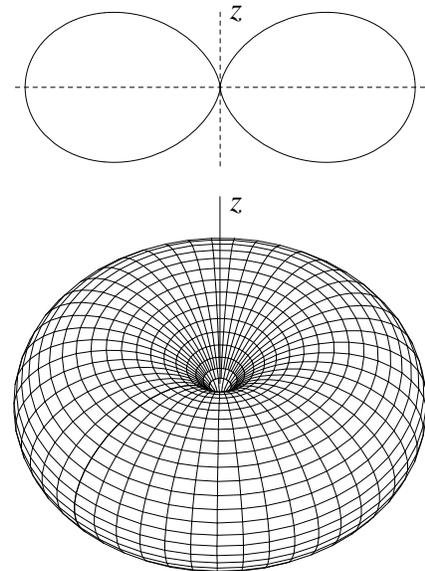
$$N_\theta = ikcd \sin \theta \quad N_\varphi = 0 \quad (10.29)$$

et donc les relations ci-haut peuvent s'exprimer comme

$$\mathbf{B} = -k^2 d \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad \mathbf{E} = -k^2 d \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (10.30)$$

FIGURE 10.1

Patron de rayonnement dipolaire : projection à angle φ fixe et vue tridimensionnelle



Particule en oscillation et rayonnement dipolaire

Considérons maintenant une particule de charge e en oscillation linéaire à une fréquence ω et d'amplitude A autour de l'origine. Une telle particule possède un moment dipolaire oscillant d'amplitude $d = eA$ et une accélération oscillante d'amplitude $a = \omega^2 A$. Il n'est pas évident que la formule (10.27) soit applicable ici, puisque les distributions de charge et de courant associées à cette particule ponctuelle en oscillation ne dépendent pas du temps de manière harmonique si on se place à une position \mathbf{r} bien précise, contrairement à l'hypothèse (10.1). Néanmoins, si on utilise la relation (10.27), on trouve

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{8\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (10.31)$$

Comme l'accélération quadratique moyenne de la particule en oscillation est en fait $\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} a^2$, on peut écrire

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2e^2 \langle a^2 \rangle}{8\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (10.32)$$

Nous retrouverons cette relation, de manière plus rigoureuse et sans la valeur moyenne, dans la section 13 (cf. éq. (13.29)).

10.B.2 Rayonnement dipolaire magnétique

Considérons maintenant le terme $m = 1$ dans l'éq. (10.21) :

$$\mathbf{N}^{(1)}(\mathbf{k}) = -ik \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \quad (10.33)$$

Utilisons ensuite la décomposition suivante, qu'on démontre simplement en développant le double produit vectoriel :

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} = \frac{1}{2} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}' + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{J}) \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (10.34)$$

Le second terme est égal à $c\mathbf{M} \wedge \hat{\mathbf{r}}$, où \mathbf{M} est l'aimantation associée à la distribution de courant, définie par

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2c} \mathbf{r}' \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (10.35)$$

En intégrant, on trouve $c\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}}$, où \mathbf{m} est le moment dipolaire magnétique de la distribution :

$$\mathbf{m} = \int d^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (10.36)$$

On écrit donc

$$\mathbf{N}_{\text{d.m.}}(\mathbf{k}) = -ikc\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (10.37)$$

Nous verrons plus tard quelle est la contribution du premier terme. Rappelons que le moment dipolaire magnétique produit par une boucle plane de courant I est perpendiculaire à la boucle et que sa grandeur est I/c fois l'aire de la boucle.

Les champs correspondant au potentiel dipolaire magnétique se calculent exactement comme ceux du potentiel dipolaire électrique ci-haut : il suffit de remplacer \mathbf{d} par $\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}}) \quad \mathbf{E} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{m} \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (10.38)$$

Dans ce cas, le champ électrique est perpendiculaire au plan formé par $\hat{\mathbf{r}}$ et \mathbf{m} . Notons que $\mathbf{B} = -\mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{r}}$. On passe donc du rayonnement dipolaire électrique au rayonnement dipolaire magnétique en faisant la substitution $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ et $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{m}$.

En posant $\mathbf{m} = mz$, les composantes sphériques du vecteur de rayonnement sont

$$N_\varphi = -ikcm \sin \theta \quad N_\theta = 0 \quad (10.39)$$

et donc les relations ci-haut peuvent s'exprimer comme

$$\mathbf{B} = -k^2 m \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \mathbf{E} = k^2 m \frac{e^{ikr}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (10.40)$$

La puissance rayonnée est

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4 m^2}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (10.41)$$

10.B.3 Rayonnement quadripolaire électrique

Considérons maintenant le premier terme de (10.34) :

$$\begin{aligned} n_i(J_i x_k + J_k x_i) &= n_i(J_l x_k \partial_l x_i + J_k x_i) \\ &= n_i \partial_l (J_l x_k x_i) - n_i \partial_l J_l x_k x_i \\ &= n_i \partial_l (J_l x_k x_i) - i\omega \rho n_i x_k x_i \end{aligned} \quad (10.42)$$

En intégrant le tout, on obtient la contribution quadripolaire électrique :

$$\mathbf{N}_{\text{q.e.}}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} ck^2 \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (10.43)$$

On peut aussi écrire cette dernière comme

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} ck^2 n_i \tilde{Q}_{ik} \quad \tilde{Q}_{ik} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) x_i x_k \quad (10.44)$$

Pour établir la relation précise avec les moments quadripolaires, il faut d'abord calculer les champs ($kr \gg 1$) :

$$\mathbf{B} = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{2r} \hat{\mathbf{r}} \wedge (\tilde{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{r}}) \quad \text{ou} \quad B_i = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{2r} \varepsilon_{ijk} n_j \tilde{Q}_{kl} n_l \quad (10.45)$$

La notation $\tilde{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{r}}$ signifie un produit de type matriciel : le résultat est un vecteur. On peut manifestement ajouter à \tilde{Q}_{kl} un terme proportionnel à δ_{kl} sans changer le résultat, car $\delta_{kl} \varepsilon_{ijk} n_j n_l = \varepsilon_{ijk} n_j n_k = 0$ en raison de l'antisymétrie de ε_{ijk} . Donc on peut remplacer \tilde{Q}_{kl} par $\frac{1}{3} Q_{kl}$, où Q_{kl} est le tenseur quadripolaire :

$$Q_{kl} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) (3x_k x_l - \delta_{kl} r^2) \quad (10.46)$$

On écrit ensuite le champ :

$$\mathbf{B} = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{6r} \hat{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{r}}) \quad \text{ou} \quad B_i = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{6r} \varepsilon_{ijk} Q_{kl} n_j n_l \quad (10.47)$$

Le champ électrique est alors $\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{r}}$. Le vecteur de Poynting est toujours $\langle \mathbf{S} \rangle = (c/8\pi)|\mathbf{B}|^2 \hat{\mathbf{r}}$, où

$$|\mathbf{B}|^2 = \frac{k^6}{36r^2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} Q_{kl} Q_{nr} n_j n_l n_m n_r \quad (10.48)$$

en utilisant la formule $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ et le fait que $n_j n_j = 1$ on obtient

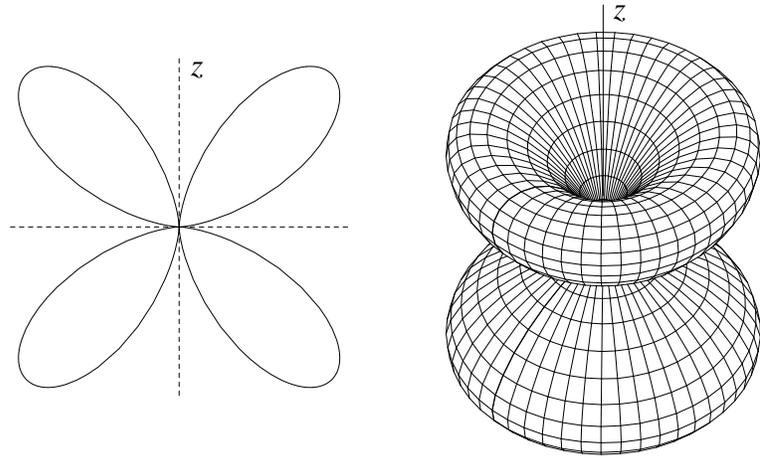
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{288\pi} (Q_{kl} Q_{kr} n_l n_r - (n_j Q_{jr} n_r)^2) \quad (10.49)$$

En notation matricielle, on écrit

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{288\pi} (\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{Q}^2)\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{r}})^2) \quad (10.50)$$

FIGURE 10.2

Patron de rayonnement quadripolaire avec symétrie azimutale : projection à angle φ fixe et vue tridimensionnelle



Esquissons maintenant le calcul de la puissance rayonnée totale : il faut pour cela utiliser les intégrales suivantes :

$$\int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (10.51)$$

$$\int d\Omega n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

On montre alors sans peine que

$$P = \frac{ck^6}{360} \sum_{ij} |Q_{ij}|^2 \quad (10.52)$$

Distribution à symétrie azimutale

Considérons le cas plus simple d'une distribution à symétrie azimutale par rapport aux axes principaux. Alors $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$ et $Q_{zz} = Q$. En coordonnées polaires, on écrit $n_x = \sin \theta \cos \varphi$, $n_y = \sin \theta \sin \varphi$ et $n_z = \cos \theta$. On démontre alors facilement que $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{Q})\hat{\mathbf{r}} = Q(-\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$ et $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{Q}^2)\hat{\mathbf{r}} = Q^2(\frac{1}{4} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{ck^6Q^2}{288\pi} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta)^2 \right) \\ &= \frac{ck^6Q^2}{128\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \frac{ck^6Q^2}{512\pi} \sin^2(2\theta) \end{aligned} \quad (10.53)$$

La distribution angulaire coupée sur un plan contenant \mathbf{z} a alors la forme d'une rosace.

C Antennes

Dans cette section on s'intéresse au calcul du rayonnement produit par une ou plusieurs antennes linéaires. En général, la dimension des antennes peut être comparable à la longueur d'onde et donc on ne peut pas utiliser le développement multipolaire.

10.C.1 Antenne linéaire

Considérons une antenne faite d'une tige conductrice de hauteur totale ℓ . On suppose que le courant circulant dans l'antenne est sinusoïdal en t et varie d'une certaine façon en z . La densité de courant correspondante est alors

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)I(z)\mathbf{z} \quad (10.54)$$

Le potentiel vecteur correspondant dans la zone de rayonnement est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \mathbf{N}(\mathbf{k}) \quad (10.55)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{k}) &= \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \\ &= \mathbf{z} \int dz I(z) e^{-ikz \cos \theta} \end{aligned} \quad (10.56)$$

où θ est l'angle entre la point d'observation et l'axe \mathbf{z} .

Avant de continuer, nous devons connaître la distribution $I(z)$ du courant dans l'antenne. On peut supposer que le courant est le résultat d'une onde se propageant dans un guide et que sa dépendance

spatiale dans l'antenne est sinusoïdale en z avec nombre d'onde $k = \omega/c$. Ceci est intuitivement raisonnable, mais pas tout à fait évident. En réalité, cette supposition est correcte uniquement dans la limite où l'antenne est infiniment fine. Dans le cas d'un diamètre fini, il faut résoudre un difficile problème aux limites. Nous nous limiterons ici à l'approximation sinusoïdale.

Supposons maintenant que l'antenne est alimentée en courant en son milieu, par un câble coaxial. Le courant sera donc nul aux extrémités. On écrit alors

$$I(z) = I_0 \sin\left(\frac{1}{2}kl - k|z|\right) \quad (10.57)$$

La valeur absolue est essentielle : le courant doit être symétrique par rapport à $z = 0$, car les deux conducteurs coaxiaux du câble d'alimentation doivent avoir des courants opposés en tout temps. En substituant dans la formule (10.56), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{k}) &= I_0 \mathbf{z} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \sin\left(\frac{1}{2}kl - k|z|\right) e^{-ikz \cos \theta} \\ &= 2I_0 \mathbf{z} \int_0^{\ell/2} dz \sin\left(\frac{1}{2}kl - kz\right) \cos(kz \cos \theta) \\ &= I_0 \mathbf{z} \int_0^{\ell/2} dz \left\{ \sin\left[\frac{1}{2}kl - kz(1 - \cos \theta)\right] + \sin\left[\frac{1}{2}kl - kz(1 + \cos \theta)\right] \right\} \\ &= I_0 \mathbf{z} \left[\frac{\cos\left[\frac{1}{2}kl - kz(1 - \cos \theta)\right]}{k(1 - \cos \theta)} + \frac{\cos\left[\frac{1}{2}kl - kz(1 + \cos \theta)\right]}{k(1 + \cos \theta)} \right]_{\ell/2}^{\ell/2} \\ &= I_0 \mathbf{z} \left[\frac{\cos\left(\frac{1}{2}kl \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{1}{2}kl\right)}{k(1 - \cos \theta)} + \frac{\cos\left(\frac{1}{2}kl \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{1}{2}kl\right)}{k(1 + \cos \theta)} \right] \\ &= \frac{2I_0}{k} \mathbf{z} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}kl \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{1}{2}kl\right)}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (10.58)$$

où nous avons appliqué l'identité trigonométrique

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \quad (10.59)$$

en passant de la deuxième à la troisième ligne.

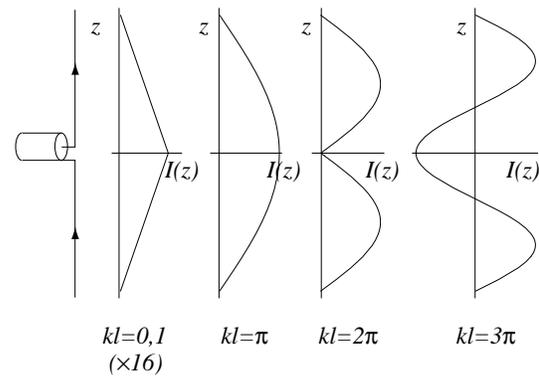


FIGURE 10.3

Graphique du courant $I(z)$ en fonction de z pour une antenne alimentée en son milieu, pour quatre valeurs de kl . On remarque la symétrie $z \rightarrow -z$.

Les champs sont obtenus de cette expression comme précédemment. La dépendance angulaire de l'intensité du rayonnement est

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{8\pi c} |\mathbf{k} \wedge \mathbf{N}(\mathbf{k})|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi c} k^2 |\mathbf{N}(\mathbf{k})|^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{I_0^2}{2\pi c} \left(\frac{\cos(\frac{1}{2}kl \cos \theta) - \cos(\frac{1}{2}kl)}{\sin \theta} \right)^2\end{aligned}\quad (10.60)$$

La valeur de $\frac{1}{2}kl$ influence énormément la distribution angulaire du rayonnement. Considérons quelques cas.

1. Antenne courte : $kl \ll 1$. Dans ce cas

$$\cos(\frac{1}{2}kl \cos \theta) - \cos(\frac{1}{2}kl) \approx \frac{1}{8}(kl)^2(1 - \cos^2 \theta), \quad (10.61)$$

ce qui mène à

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{128\pi c} k^4 \ell^4 \sin^2 \theta. \quad (10.62)$$

Ceci concorde avec le rayonnement d'un dipôle de grandeur $d = I_0 \ell^2 / 4c$.

2. Si $kl = \pi$, c'est-à-dire si $\ell = \frac{1}{2}\lambda$ (antenne *demi-onde*), on a

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (10.63)$$

On constate que la puissance rayonnée chute comme θ^2 quand θ est petit.

3. Si $kl = 2\pi$, c'est-à-dire si $\ell = \lambda$, on a

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{(\cos(\pi \cos \theta) + 1)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{2I_0^2}{\pi c} \frac{\cos^4(\frac{1}{2}\pi \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (10.64)$$

Le rayonnement est encore plus directionnel dans ce cas que pour l'antenne demi-onde.

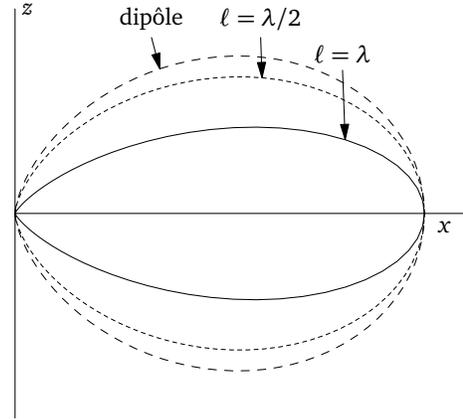
Remarques :

- ◆ Nous avons négligé la résistance ohmique de l'antenne, ce qui mène à une exagération du courant circulant près des extrémités. Le courant étant réduit à mesure qu'on s'éloigne du point d'alimentation, le patron de rayonnement en est certainement affecté.
- ◆ Nous avons supposé que l'antenne est isolée. En réalité, le sol est un conducteur et un traitement plus correct inclut une image de l'antenne qu'on place au-dessous du sol et qui interfère avec l'antenne principale.
- ◆ On appelle le *gain* $g(\theta, \varphi)$ de l'antenne la dépendance angulaire de la puissance rayonnée, normalisée à l'unité :

$$g(\theta, \varphi) = \frac{1}{P} \frac{dP}{d\Omega} \quad \int d\Omega g(\theta, \varphi) = 1 \quad (10.65)$$

FIGURE 10.4

Dépendance angulaire du rayonnement pour un dipôle, une antenne $\frac{1}{2}\lambda$ et une antenne λ , dans l'ordre du moins directionnel au plus directionnel. La figure n'est pas à l'échelle pour l'intensité du rayonnement : en réalité, la puissance rayonnée est beaucoup plus grande pour l'antenne λ et beaucoup plus petite pour le dipôle.



10.C.2 Résistance de rayonnement

La puissance rayonnée totale dans le cas de l'antenne $\lambda/2$ est

$$P = \frac{I_0^2}{2\pi c} \int d\varphi d\theta \sin\theta \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi \cos\theta)}{\sin^2\theta} \approx 2,44 \frac{I_0^2}{2c} \quad (10.66)$$

L'intégrale peut se faire par fonctions spéciales ou tout simplement par intégration numérique. Cette puissance (moyennée dans le temps) varie comme le carré du courant. On définit la *résistance radiative* R_r par analogie avec la loi d'Ohm pour les courants alternatifs :

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \quad (10.67)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ provient de la dépendance sinusoïdale du courant dans le temps : la moyenne temporelle de $I_0^2 \sin^2 \omega t$ est $\frac{1}{2} I_0^2$. Dans le cas de l'antenne demi-onde, on voit que la résistance radiative est $R_r = 2,44/c$ (dans le système CGS, la résistance a la dimension de l'inverse de la vitesse). Si on convertit ce résultat en unités SI, on obtient $\sim 73\Omega$.

Dans le cas de l'antenne λ , on calcule (numériquement) que la résistance radiative est $R_r \approx 6,64/c$, ou environ 200Ω . L'antenne λ , à courant constant, est donc un radiateur plus efficace que l'antenne $\lambda/2$. Cependant, en pratique, on doit aussi considérer le raccordement d'impédance entre le guide d'onde qui alimente l'antenne et cette dernière. L'antenne peut être considérée comme une charge qu'on ajoute en série avec le circuit du guide d'onde (ou du câble de transmission) et la puissance rayonnée en fonction de la tension d'entrée du câble dépend de la résistance de rayonnement et de l'impédance caractéristique du câble.

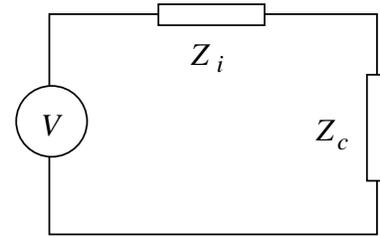
10.C.3 Antennes réceptrices

Bien entendu, une antenne peut servir à la fois d'émetteur et de récepteur d'ondes électromagnétiques. La situation de récepteur est a priori assez différente de celle d'un émetteur : au lieu d'un transfert d'énergie de l'antenne vers l'extérieur via une onde émise radialement, on assiste plutôt à un transfert d'énergie d'une onde plane incidente vers le circuit de l'antenne. De la même manière que l'émission par une antenne se fait préférentiellement dans certaines directions, la réception par une antenne est

meilleure pour des ondes incidentes à partir de certaines directions, les mêmes d'ailleurs que pour l'émission.

FIGURE 10.5

Représentation schématique d'une antenne réceptrice comme élément de circuit.



La puissance transmise à un circuit par une antenne dépend beaucoup de la charge (*load*) de ce circuit. Nous avons vu plus haut qu'une antenne, dans un mode d'émission particulier, peut être caractérisée par une résistance de rayonnement R_r . En fait, la relation entre la tension alternative de fréquence ω qui alimente l'antenne à ses bornes et le courant qui y circule peut être pleinement qualifiée par une *impédance d'entrée* Z_i dont la partie réelle est précisément la résistance de rayonnement. Du point de vue de la théorie des circuits, on peut simplement remplacer l'antenne par une impédance équivalente Z_i . Lors de la réception d'un signal, maintenant, on observe une tension V aux bornes de l'antenne et son impédance d'entrée devient ici une impédance interne. La puissance communiquée à la charge du circuit est maximale lorsque l'impédance Z_c de la charge est la conjuguée complexe de l'impédance de l'antenne Z_i : $Z_c = Z_i^*$. Notons que le calcul précis de la réactance de l'antenne est assez difficile, alors que sa résistance est pratiquement donnée par la résistance de rayonnement.

Nous allons maintenant énoncer, sans le démontrer, un théorème sur la puissance absorbée P_{abs} par la charge d'une antenne dans le cas où $Z_c = Z_i^*$, quand une onde plane est incidente de la direction $\hat{\mathbf{k}}_0 = (\theta_0, \varphi_0)$:

$$P_{\text{abs}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\theta_0, \varphi_0) S_0 |\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}_0)|^2 \quad (10.68)$$

où λ est la longueur d'onde, $g(\theta_0, \varphi_0)$ est le gain de l'antenne (en émission) dans la direction de \mathbf{k}_0 , S_0 est le flux d'énergie (vecteur de Poynting) associé à l'onde incidente, $\boldsymbol{\epsilon}_0$ est le vecteur de polarisation de l'onde incidente et $\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}_0)$ est le vecteur de polarisation de l'onde qui serait émise par l'antenne dans la direction $\hat{\mathbf{k}}_0$. On voit que non seulement l'onde incidente doit parvenir d'une direction de fort gain de l'antenne, mais avec la polarisation adéquate pour une réception optimale. Notons que la quantité $g(\theta_0, \varphi_0)\lambda^2/4\pi$ joue en quelque sorte le rôle de la *surface efficace* de l'antenne.

10.C.4 Réseaux d'antennes

Il est souvent utile de disposer des antennes en réseau, afin de mieux contrôler la dépendance angulaire du rayonnement, en particulier par un contrôle du déphasage des différentes antennes.

Considérons un ensemble de N antennes identiques, disposées à des positions \mathbf{r}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) et alimentées avec des courants de mêmes formes, mais de valeurs différentes $I_j = I_0 \gamma_j$, où I_0 est une valeur typique du courant. Le facteur γ_j peut représenter une grandeur et une phase relative du courant de l'antenne j par rapport à une valeur de référence. Soit \mathbf{N}_0 l'amplitude du rayonnement produit par une antenne située à l'origine et alimentée par un courant I_0 . La même antenne, située à la position \mathbf{r}_j et alimentée par un courant $I_0 \gamma_j$ résultant d'une densité de courant $\mathbf{J}_0 \gamma_j$, produirait

une amplitude

$$\mathbf{N}_j = \gamma_j \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} = \gamma_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \mathbf{N}_0 \quad (10.69)$$

L'amplitude totale provenant des N antennes est donc

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (10.70)$$

Notez qu'il n'est pas nécessaire que les antennes soient linéaires. Cette relation vaut pour toute collection de systèmes rayonnants identiques.

FIGURE 10.6

Réseau d'antennes disposées linéairement le long de l'axe des x .

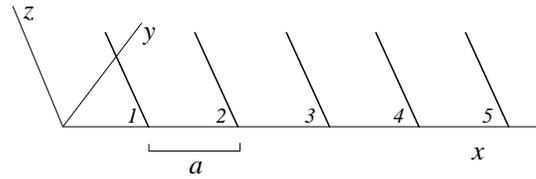
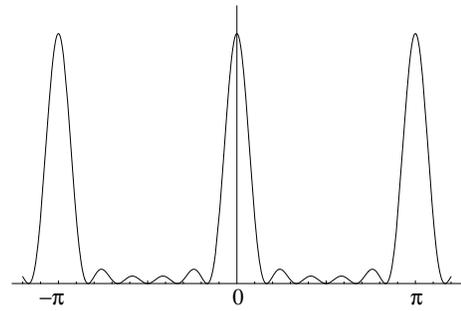


FIGURE 10.7

Graphique de la fonction $\sin^2 Nx / \sin^2 x$ pour $N = 6$. Quand $N \rightarrow \infty$, la fonction devient proportionnelle à un peigne de Dirac.



Considérons maintenant N antennes également espacées le long de l'axe des x , avec une distance a séparant deux antennes consécutives. Les positions des antennes sont alors $\mathbf{r}_j = jax$. Supposons de plus qu'elles sont toutes alimentées en phase, avec des courants de même amplitude ($\gamma_j = 1$). On trouve alors

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \sum_{j=1}^N e^{-ijak \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{N}_0 \sum_{j=1}^N e^{-ija} \quad (10.71)$$

où $\alpha = a\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = ak \sin \theta \cos \varphi$. La somme est géométrique et se fait immédiatement : comme

$$\sum_{j=1}^N q^j = q \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (10.72)$$

on trouve

$$\sum_{j=1}^N e^{-ija} = e^{-ia} \frac{1 - e^{-i\alpha N}}{1 - e^{-i\alpha}} = e^{-i(N+1)\alpha/2} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (10.73)$$

L'amplitude du rayonnement est alors

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 e^{-i(N-1)\alpha/2} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (10.74)$$

et la dépendance angulaire du rayonnement est

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega} \bigg|_0 \frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)} \quad (10.75)$$

où le préfacteur est la dépendance angulaire du rayonnement pour une seule antenne. Le dernier facteur module en quelque sorte le patron de rayonnement d'une antenne simple.

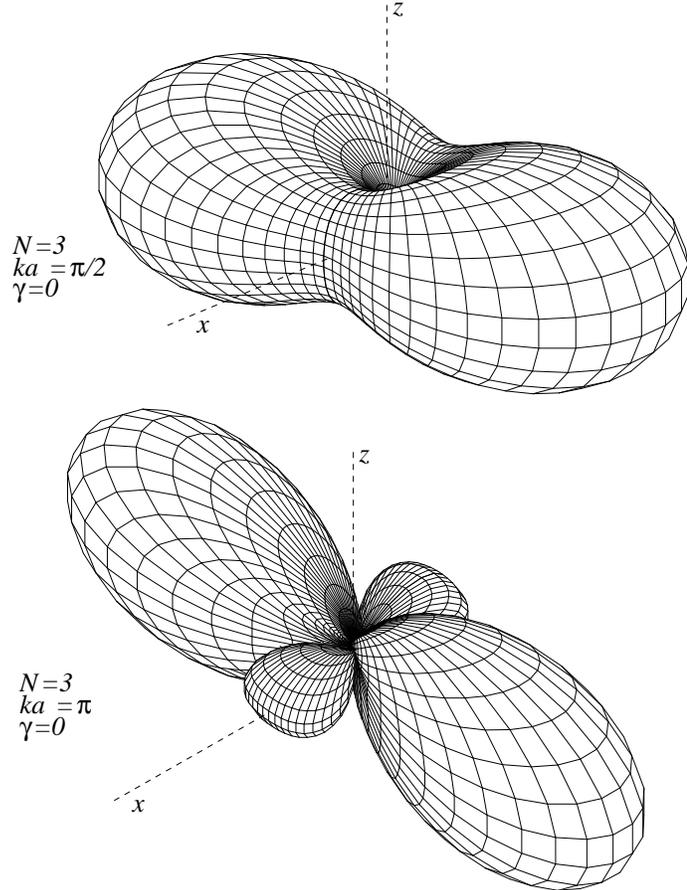


FIGURE 10.8

Distribution angulaire de la puissance rayonnée par trois antennes alimentées en phase ($\gamma_j = 1$) et séparées par une distance $a = \lambda/4$ (en haut) et $a = \lambda/2$ (en bas). On remarque que le rayonnement est principalement dirigé le long de l'axe y .

La fonction

$$f_N(x) = \frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x} \quad (10.76)$$

revient à chaque fois qu'un réseau linéaire d'antennes ou de systèmes rayonnants identiques est considéré. C'est une fonction de période π en x . Plus N est grand, plus cette fonction est piquée autour des valeurs $x = n\pi$ (n un entier). Le premier zéro de cette fonction est à $x = \pi/N$ et donc les pics ont une largeur $\Delta x = 2\pi/N$. Si N est grand mais x petit, $f_N(x)$ est approximativement égale à $\sin^2(Nx)/x^2$. Comme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin Nx}{x} \right)^2 = \pi \delta(x) \quad (10.77)$$

On a la correspondance avec un «peigne de Dirac» :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x} = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n\pi) \quad (10.78)$$

Chapitre 10. Rayonnement d'ondes électromagnétiques

Supposons maintenant que le rayonnement d'une antenne isolée soit maximal sur l'équateur ($\theta = \pi/2$). Le rayonnement du réseau d'antennes, lui, sera maximal dans les directions telles que $\alpha = 2n\pi$, où n est un entier, ou encore

$$ak \cos \varphi = 2n\pi \quad (10.79)$$

Si $ak < 2\pi$, la seule solution est à $\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$, correspondant à $n = 0$. Sinon, d'autres maximums peuvent survenir. Plus N est grand, plus le rayonnement est directionnel. Un arrangement linéaire d'antennes permet donc de diriger le rayonnement plus efficacement dans une direction donnée. La largeur du maximum à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ est 2δ , où δ est déterminé par

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} = ak \cos(\frac{1}{2}\pi - \delta) \approx \frac{2\pi a}{\lambda} \delta \implies \delta \approx \frac{\lambda}{Na} \quad (10.80)$$

Problèmes

Problème 10.1

Une coquille sphérique uniformément chargée est en oscillation radiale, c.-à-d., son rayon oscille dans le temps avec une fréquence ω . Démontrez, entre autres par des arguments de symétrie, qu'un tel système n'émet aucun rayonnement.

Problème 10.2

Quatre antennes demi-onde sont placées aux quatre coins d'un carré de côté a , aux positions $(\pm\frac{1}{2}a, \pm\frac{1}{2}a, 0)$ en coordonnées cartésiennes. Les courants des 4 antennes sont égaux en valeur absolue, mais ceux des deux antennes placées à $\pm(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0)$ sont déphasés de π par rapport aux courants des deux autres antennes. Calculez la dépendance angulaire du rayonnement (en fonction des angles φ et θ en coordonnées sphériques) pour toutes valeurs de a . Considérez ensuite la limite $a \ll \lambda$ et illustrez le patron de rayonnement dans ce cas.

Problème 10.3

Calculez le patron de rayonnement d'une antenne linéaire de hauteur ℓ alimentée par son extrémité inférieure. Note : la forme de $I(z)$ est légèrement différente du cas où l'antenne est alimentée en son milieu. Aussi, le vecteur \mathbf{N} est maintenant complexe. Illustrez le patron de rayonnement pour $\ell = \frac{1}{2}\lambda$ et $\ell = \lambda$.

Problème 10.4

Considérez une antenne linéaire verticale de hauteur ℓ , mais dont la partie radiante est alimentée par une onde de courant progressive et non stationnaire. En pratique, on peut réaliser un tel dispositif en aménageant un retour pour le courant par un dispositif non radiatif à partir du haut de l'antenne (ex. une résistance mise à terre). Bref, on suppose que le courant en fonction de la hauteur est donné par $I(z) = I_0 e^{iqz}$, où q n'est pas nécessairement égal à $k = \omega/c$.

A Calculez le gain $g(\Omega)$ de cette antenne, à un facteur multiplicatif près. Tracez-le en fonction de θ pour $q = k$ et $k\ell = 50$.

B Montrez que, dans le cas $k\ell \gg 1$, le rayonnement est maximal à un angle polaire θ déterminé par q et k .

Problème 10.5

A Considérez une antenne linéaire de longueur ℓ , orientée selon un axe \mathbf{e} arbitraire et alimentée par une onde de courant progressive : si s mesure la distance le long de l'antenne à partir de son extrémité, le courant qui y circule est $I(s) = I_0 e^{iks}$. Démontrez que le vecteur de rayonnement \mathbf{N} associé à cette antenne est

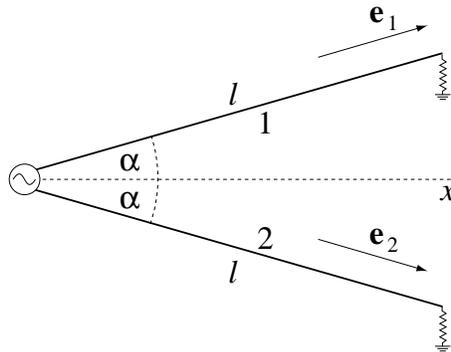
$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = I_0 \ell \xi(\alpha) \mathbf{e} \quad (10.81)$$

où la fonction ξ et la variable α sont définies comme

$$\xi(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}}{\alpha} \sin \alpha \quad \alpha = \frac{1}{2} k \ell (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \quad (10.82)$$

B Considérez ensuite l'antenne en 'V', constituée de deux antennes linéaires comme en **A**, partageant une même extrémité d'où provient le courant, et formant un 'V' disposé horizontalement, à un angle β de part et d'autre de l'axe des x . Les courants des deux antennes sont en antiphase. Si \mathbf{N}_1 et \mathbf{N}_2 désignent les vecteurs de rayonnement de ces deux antennes prises séparément, calculez les composantes $f_{1,\theta}$, $f_{1,\varphi}$, $f_{2,\theta}$ et $f_{2,\varphi}$. Exprimez votre résultat en fonction de $\xi(\alpha_1)$ et $\xi(\alpha_2)$, où $\alpha_{1,2}$ sont associés aux deux bras de l'antenne, respectivement, selon la définition donnée en **1**.

C Calculez $dP/d\Omega$ pour la combinaison des deux antennes linéaires (c'est-à-dire pour l'antenne en 'V' elle-même). Ne donnez pas de longue expression explicite : contentez-vous d'en donner une expression en fonction des quantités calculées en (b). Faites un graphique polaire de la dépendance angulaire du rayonnement, en fonction de φ , dans le plan xy . Utilisez pour cela les paramètres $\beta = 16^\circ$ et $k\ell = 12\pi$ et aidez-vous d'un logiciel graphique ou symbolique (Maple, Mathematica, MathCad, etc.).



Problème 10.6

Une antenne dipolaire magnétique consiste en une boucle de rayon a , située dans le plan xy et centrée à l'origine. Un courant alternatif I_0 circule dans cette boucle. On suppose que le courant a la même valeur partout le long de la boucle à un instant donné et que $a \ll \lambda$.

A En partant de la définition générale de l'amplitude \mathbf{N} , montrez, en faisant les approximations nécessaires dans l'intégrale, que

$$\mathbf{N}(\mathbf{k}) = -i\pi I_0 k a^2 \sin \theta \hat{\phi}, \quad (10.83)$$

où on utilise les coordonnées sphériques et les vecteurs unité associés. Indice : la densité de courant n'est non nulle que le long de la boucle ; l'intégrale sur \mathbf{r}' se réduit donc à une intégrale le long de la boucle.

B En comparant à la théorie générale du rayonnement dipolaire magnétique, quelle est la valeur du moment dipolaire magnétique \mathbf{m} de cette antenne ?

C Calculez la résistance de rayonnement de cette antenne.

CHAPITRE 11

Diffraction

La diffraction de la lumière est un phénomène connu depuis la fin du XVIIe siècle. Son explication par la théorie corpusculaire de Newton était impossible, mais la théorie ondulatoire de Huygens, quoique beaucoup plus prometteuse, ne pouvait non plus lui donner une explication solide avant que les progrès de l'analyse mathématique ne permettent à A. Fresnel d'en donner une théorie mathématique (du moins pour la diffraction scalaire). Les travaux de Fresnel et les observations associées confirmèrent la validité de la théorie ondulatoire de la lumière au début du XIXe siècle.

La diffraction représente l'essence même du comportement ondulatoire. Cependant, la théorie de la diffraction des ondes électromagnétiques présente une difficulté particulière du fait que l'onde est, dans ce cas, une quantité vectorielle. Nous commencerons néanmoins par l'étude de la diffraction scalaire, plus simple, avant de tenir compte de la nature vectorielle des ondes électromagnétiques. La situation pratique qui nous intéressera est celle d'une onde plane incidente sur un écran plat, dans lequel une ouverture a été pratiquée. Le but de la théorie de la diffraction est alors de déterminer ensuite l'amplitude de l'onde de l'autre côté de l'écran.

FIGURE 11.1
Illustration du principe de Huygens à l'oeuvre dans l'explication de la réfraction des rayons lumineux.

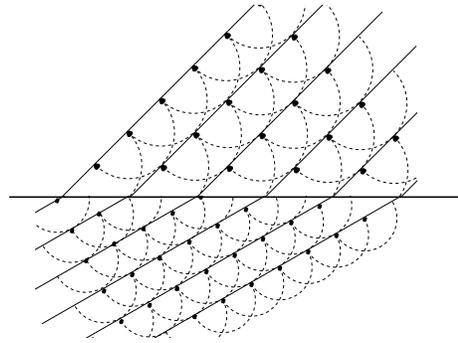
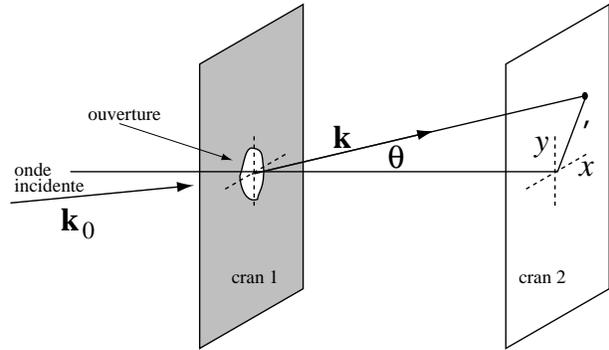


FIGURE 11.2
Schéma de la diffraction par une ouverture. L'écran 1 est l'écran principal, dans lequel l'ouverture est pratiquée. L'écran 2 est l'écran d'observation, qu'on suppose suffisamment éloigné de l'écran 1. Les angles (θ, φ) sont définis comme en coordonnées sphériques.



A Diffraction scalaire

Principe de Huygens

La théorie ondulatoire de Huygens repose sur un principe intuitif, selon lequel une onde se propage par fronts d'onde successifs ; chaque point d'un front d'onde agit comme une source qui émet une onde secondaire sphérique et les ondes secondaires des différents points sur le front d'onde se superposent linéairement. Un instant plus tard, le nouveau front d'onde est simplement l'enveloppe des ondes secondaires sphériques émises précédemment. Cette prescription porte le nom de *principe de Huygens*.

Ce principe nous permet d'avoir une vision approximative du phénomène de diffraction, expliquée dans les cours plus élémentaires, mais qu'il est bon de résumer ici. Considérons une onde scalaire plane $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$ incidente sur un écran dans lequel une ouverture a été pratiquée. On suppose que l'écran occupe une partie du plan $z = 0$; le rayon de l'onde incidente fait un angle θ_0 avec l'axe des z , et on utilise les angles polaires habituels (θ, φ) pour décrire les directions à droite de l'écran.

Il semble raisonnable de supposer que l'onde transmise de l'autre côté de l'écran sera la superposition des ondes secondaires émises par l'ouverture seulement et que chacune de ces ondes secondaires se propagera de manière sphérique, avec comme phase initiale la phase de l'onde incidente en chaque point de l'ouverture. D'après ce raisonnement, l'onde $\psi(\mathbf{r})$ de l'autre côté de l'écran devrait être

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 \int_{\text{ouv.}} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'} \quad (11.1)$$

où nous avons utilisé la forme habituelle de la fonction de Green pour représenter les ondes sphé-

riques. L'intégrale sur \mathbf{r}' est effectuée sur l'ouverture seulement. Dans le but de simplifier cette expression, plaçons-nous dans la zone de rayonnement, de sorte qu'on puisse utiliser l'approximation¹

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \quad (11.2)$$

où \mathbf{k} est le vecteur de grandeur k dans la direction de \mathbf{r} ($\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). On écrit donc

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_{\text{ouv.}} da' e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}'} \quad (11.3)$$

En somme, l'amplitude de l'onde diffractée est déterminée par la transformée de Fourier d'une fonction $f(x', y')$ égale à 1 dans l'ouverture et nulle en dehors. Cette fonction est appelée *fonction d'ouverture* et sa transformée de Fourier est notée $I(\mathbf{q})$:

$$I(\mathbf{q}) = \int_{\text{ouv.}} da' e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \quad (11.4)$$

Bref, le patron de diffraction permet de mesurer le module au carré de la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture.

Formule intégrale de Kirchhoff

La théorie ci-haut est tout à fait intuitive, mais donne des résultats à peu près corrects. Le physicien allemand G. Kirchhoff tenta de lui donner une base théorique plus solide et arriva à la conclusion qu'il fallait la modifier de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = -ik\psi_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \int_{\text{ouv.}} da' e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}'} \quad (11.5)$$

où θ_0 est l'angle que fait le rayon incident par rapport à la normale à l'ouverture. Voyons comment cette formule peut être démontrée.

Revenons sur la fonction de Green de l'équation de Helmholtz, discutée à la section D. Considérons maintenant une onde ψ produite non seulement par des sources situées dans un volume, mais aussi par des sources situées dans une paroi conductrice ou diélectrique (l'écran, dans le cas de la diffraction). Dans ce cas, la source du rayonnement sur la paroi est spécifiée par la valeur même du champ ψ sur la paroi et les conditions aux limites sur cette paroi jouent un rôle essentiel. On considère donc une fonction $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ obéissant à l'éq. (2.36) dans un volume V , limité par une surface fermée S . On suppose que le champ ψ et/ou sa dérivée normale $\partial\psi/\partial n$ sont connus sur la surface S . Rappelons l'identité de Green, valable pour deux fonctions ϕ et ψ différentiables quelconques :

$$\int_V d^3r \{ \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \} = \oint_S da \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} \quad (11.6)$$

où $\partial\psi/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla\psi$, \mathbf{n} étant la normale extérieure au volume V . Supposons maintenant que $\phi = G$ (considéré comme fonction de \mathbf{r}') et que ψ est la fonction recherchée, obéissant à l'équation de Helmholtz. On trouve

$$\int_V d^3r' \{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} = \oint_S da' \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (11.7)$$

1. Il s'agit de l'approximation de Fraunhofer, que nous rencontrerons plus loin.

(les primes signifient qu'on intègre sur les points de source). En substituant l'équation de Helmholtz et l'éq. (2.36), on trouve

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') + \oint_S da' \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (11.8)$$

Kirchhoff supposa simplement que la fonction de Green est la même dans ce cas que dans l'espace infini, c'est-à-dire $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, et appliqua la formule (11.8) au cas $\xi = 0$, c'est-à-dire lorsque les sources de l'onde sont uniquement sur la surface S . Techniquement, cette surface doit être fermée et donc représente l'écran, l'ouverture et un hémisphère de rayon infini englobant la région d'observation à droite de l'écran. On suppose que cet hémisphère est suffisamment éloigné que l'amplitude de l'onde y soit nulle.² Kirchhoff supposa ensuite que l'onde ψ et sa dérivée sont nulles partout sur la surface S sauf dans l'ouverture même. Comme $\partial/\partial n' = -\partial/\partial z'$, on trouve facilement que

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = ik_z G = ikG \cos \theta \quad \frac{\partial \psi}{\partial n'} = -ik_{0z} \psi = -ik\psi \cos \theta_0 \quad (11.9)$$

On arrive ensuite immédiatement à l'expression (11.5).

La principale différence entre l'équation de Kirchhoff (11.5) et la relation (11.3) est le préfacteur $\cos \theta_0 + \cos \theta$. Ce facteur interdit la rétrodiffraction ($\theta = \theta_0 + \pi$), c'est-à-dire que l'onde secondaire du principe de Huygens n'est pas émise vers l'arrière, mais uniquement vers l'avant, ce qui n'apparaît pas dans la formulation précédente. On considère donc la relation (11.5) comme une expression plus précise du principe de Huygens appliquée au cas de la diffraction par une ouverture.

Cependant, et quoique qu'elle soit couramment utilisée dans les manuels, l'expression (11.5) est inexacte. L'erreur de Kirchhoff est de supposer que l'amplitude de l'onde ψ et sa dérivée $\partial\psi/\partial n$ sont nulles simultanément sur l'écran, en dehors de l'ouverture.³ En réalité, on doit porter une attention particulière aux conditions aux limites sur la surface, et la forme de la fonction de Green n'est alors pas la même que dans l'espace infini. Considérons les deux cas principaux :

1. Conditions aux limites de **Dirichlet**. Dans ce cas, on connaît ψ sur la paroi. On définit alors la fonction de Green G_D telle que $G_D = 0$ sur la paroi et alors

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') - \oint_S da' \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} \quad (11.10)$$

2. Conditions aux limites de **Neumann**. Dans ce cas, on connaît la dérivée normale de ψ sur la paroi. On définit alors la fonction de Green G_N telle que $\partial G_N/\partial n = 0$ sur la paroi et alors

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') + \oint_S da' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'} \quad (11.11)$$

Ces relations permettent donc de calculer le champ ψ dans le volume V en fonction des sources situées dans ce volume et de la valeur de ψ ou de $\partial\psi/\partial n$ sur la paroi qui borne le volume V .

2. Si l'onde incidente est parfaitement plane, ceci est impossible. On doit en fait remplacer l'onde incidente par un train d'ondes quasi-monochromatique, pour pouvoir supposer que l'onde est nulle à l'infini.

3. On peut montrer que si une solution à l'équation d'Helmholtz (ou de Laplace) et sa dérivée sont nulles dans un domaine fini de la surface, alors la fonction doit être nulle partout à l'intérieur de cette surface !

Trouver les fonctions de Green appropriées n'est pas une tâche facile, sauf si la paroi a une géométrie suffisamment simple, comme un plan. D'autre part, la formule de Kirchhoff ne vaut que pour une onde scalaire, alors que les ondes électromagnétiques sont vectorielles. Nous verrons comment formuler exactement le problème de la diffraction, avec la bonne fonction de Green, dans la section suivante.

11.A.1 Diffraction vectorielle

Considérons la situation suivante : une onde plane de fréquence ω et de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 est incidente sur un plan conducteur situé à $z = 0$, dans lequel est pratiquée une ouverture de forme quelconque. Désignons par $\mathbf{E}^{(0)}$ le champ électrique associé à cette onde incidente. Cette onde cause dans la paroi des charges et courants induits qui émettent à leur tour une onde secondaire, qu'on désignera par \mathbf{E}' . Cette onde secondaire se superpose à l'onde incidente et produit un effet des deux côtés du plan $z = 0$. On suppose que l'onde incidente provient du côté négatif ($z < 0$) de l'écran. Du côté positif ($z > 0$), l'onde secondaire interfère avec $\mathbf{E}^{(0)}$ pour produire une figure de diffraction. Le problème est ici de calculer le champ électrique total \mathbf{E} du côté positif et le but de cette sous-section est de démontrer que ce champ total est donné par la formule suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{\text{ouv.}} da' (\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (11.12)$$

où l'intégrale sur \mathbf{r}' est effectuée sur l'ouverture. La formule (11.12) sera appelée *formule de Kirchhoff-Smythe* : cette généralisation de la formule scalaire de Kirchhoff est attribuée à Smythe (1947). Elle permet de calculer l'onde diffractée à partir de la valeur de l'onde dans l'ouverture.

La démonstration de la formule (11.12) se fait en plusieurs étapes. En fait, cette formule vaut aussi pour le champ magnétique et c'est cette version que nous allons démontrer :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{\text{ouv.}} da' (\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}')) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (11.13)$$

Premièrement, il faut utiliser l'équation de Helmholtz (2.35) qui régit le potentiel vecteur \mathbf{A} et se servir de la fonction de Green associée aux conditions aux limites de Neumann sur la paroi (la dérivée de \mathbf{A} nous est connue sur la paroi : c'est le champ magnétique \mathbf{B}) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \oint_S da' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n'} \quad (11.14)$$

où la surface fermée S' englobe complètement la région d'intérêt ($z > 0$) et où la normale est *extérieure* à cette surface. Le premier terme du membre de droite de l'éq. (11.11) est absent, car aucune source n'existe dans le volume V . Nous prendrons comme surface le plan $z = 0$, plus une surface située à l'infini où les champs s'annulent et ne contribuent pas à l'intégrale. La normale extérieure est $-\mathbf{z}$ et donc $\partial/\partial n' = -\partial/\partial z'$. Enfin, comme l'onde secondaire (primée) satisfait séparément à l'équation de Kirchhoff, nous écrivons

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = - \int_{z=0} da' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial z'}(\mathbf{r}') \quad (11.15)$$

(les coordonnées du domaine d'intégration sont primées : ce sont les coordonnées du point de source).

Il nous faut ensuite calculer la fonction de Green G_N . Rappelons que cette fonction est l'amplitude de l'onde au point \mathbf{r} produite par une source ponctuelle au point \mathbf{r}' et respectant la condition que la dérivée de l'onde s'annule sur la paroi. En l'absence de paroi, la fonction de Green est donnée par l'expression (2.42). Pour obtenir une fonction de Green satisfaisant aux conditions aux limites dans le domaine $z > 0$, on peut utiliser la *méthode des images*, c'est-à-dire ajouter à la source située à \mathbf{r}' une autre source, d'intensité égale et située au point $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$, à l'extérieur du domaine physique d'intérêt. L'onde produite par cette image satisfait à l'équation de Helmholtz *homogène* dans le domaine $z > 0$, puisque l'image est située en $z < 0$. Son ajout à la fonction de Green (2.42) ne modifie donc rien à l'éq. (2.36), mais permet de satisfaire aux conditions aux limites à $z = 0$. En effet, on a

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \quad (11.16)$$

La dérivée du deuxième terme par rapport à z' est l'opposé de la dérivée du premier terme sur le plan $z' = 0$, donc $\partial G_N / \partial z' = 0$ sur S . Ceci est complètement analogue à la méthode des images utilisée en électrostatique, sauf que l'image a ici le même signe que la source, car c'est la *dérivée* de la fonction de Green qui doit s'annuler à $z = 0$ et non la fonction de Green elle-même. Sur le plan $z' = 0$, comme l'image coïncide avec le point de source, on trouve

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (z' = 0) \quad (11.17)$$

Examinons ici les propriétés de symétries des champs \mathbf{E}' et \mathbf{B}' . Les courants qui sont la source physique de \mathbf{A}' dans la paroi n'ont pas de composante en z , mais uniquement dans le plan de la paroi. Donc la composante A'_z est nulle partout, comme indiqué par la solution générale (2.28). Plus généralement, comme la situation des sources est entièrement symétrique par rapport à une inversion $z \rightarrow -z$, les champs A'_x , A'_y et Φ' sont des fonctions paires de z . Par conséquent, les composantes E'_z , B'_x et B'_y sont impaires en z et les composantes B'_z , E'_x et E'_y sont paires en z . Cependant, les composantes E'_z , B'_x et B'_y ne sont pas continues à $z = 0$ en présence de l'écran métallique, en raison des charges et courants induits. Elles sont cependant continues dans l'ouverture. On en conclut que E'_z , B'_x et B'_y sont nuls dans l'ouverture, parce que ce sont des fonctions impaires et continues à cet endroit.

Ensuite, il faut calculer le rotationnel pour obtenir le champ magnétique :

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{z=0} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial z'}(\mathbf{r}') \quad (11.18)$$

Cependant, comme $A'_z = 0$, on a

$$B'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z} \quad \text{et} \quad B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z} \implies \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial z} = -\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}' \quad (11.19)$$

On écrit donc

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{\text{écran}} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}'(\mathbf{r}')) \quad (11.20)$$

Notons que l'intégrale peut être restreinte à la partie métallique (l'écran) du plan $z = 0$ car B'_x et B'_y s'annulent dans l'ouverture.

La formule précédente n'est pas tout à fait la formule (11.13), car l'intégrale est prise sur toute la surface et non pas seulement sur l'ouverture. D'autre part, elle implique le champ secondaire \mathbf{B}' et non pas le champ total $\mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}'$. Pour remédier à cette situation, utilisons le principe de superposition encore une fois et écrivons $\mathbf{B}' = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}''$, où $\mathbf{B}^{(1)}$ serait le champ produit par un écran complet à $z = 0$ (c'est-à-dire sans ouverture) et $-\mathbf{B}''$ serait le champ produit par un plan conducteur ayant la forme précise de l'ouverture (une anti-ouverture, pour ainsi dire). Il est évident que $\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(0)} = 0$ si $z \geq 0$, car un écran complet empêche tout onde de le traverser et le champ total serait nul en $z > 0$. D'autre part, $\mathbf{B}^{(1)}$ et \mathbf{B}'' ont séparément toutes les propriétés de symétrie par inversion $z \rightarrow -z$ que \mathbf{B}' possède. De même, par principe de superposition, la formule (11.20) est valable pour $\mathbf{B}^{(1)}$ et \mathbf{B}'' séparément, dans leur domaines respectifs (l'écran et l'ouverture, respectivement). On peut donc écrire

$$\mathbf{B}''(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{\text{ouv.}} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}''(\mathbf{r}')) \quad (11.21)$$

Mais comme $\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(0)} = 0$ sur l'écran et du côté $z > 0$ de celui-ci, le champ total coïncide avec \mathbf{B}'' dans ce domaine et la formule de Kirchhoff (11.13) s'ensuit. Étant donné la symétrie $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{E}$ en l'absence de sources, la même formule s'applique au champ électrique (Eq. (11.12)). On peut bien sûr démontrer cette dernière formule directement, tout aussi facilement que la formule précédente pour \mathbf{B} .

Rappelons finalement l'hypothèse qui a été faite pour arriver au résultat (11.12) et (11.13) : (i) on a supposé que les courants induits dans l'écran, qui sont la source des champs secondaires \mathbf{E}' et \mathbf{B}' , ne circulent que le long du plan (leur composante en z s'annule) ; (ii) on a aussi supposé qu'un écran complet masque tout, c'est-à-dire que $\mathbf{B}^{(1)} = -\mathbf{B}^{(0)}$. Si l'une de ces deux hypothèses est relaxée, le champ diffracté en sera sûrement affecté. Si l'écran est fait d'un bon conducteur, ces hypothèses sont excellentes, car les courants induits le sont à la surface, sur une épaisseur de l'ordre de la longueur de pénétration δ et leur composante en z est donc négligeable. Si l'écran est fait d'une bonne épaisseur de diélectrique, c'est moins évident et il est difficile de se prononcer sur les fines différences que cela causerait dans le patron de diffraction.

B Approximation de Fraunhofer

Dans le problème de diffraction, trois échelles de grandeur entrent en jeu : la taille d de l'ouverture, la distance r au point d'observation (distance à la figure de diffraction) et la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. On supposera toujours que $r \gg d$. Cependant, le traitement mathématique est beaucoup simplifié si on suppose en plus que $d^2 \ll \lambda r$, ce qui constitue l'approximation de Fraunhofer. Cette approximation, qui équivaut à $kd^2/r \ll 1$, est toujours correcte si on observe la diffraction à une distance suffisamment grande. Elle équivaut à se placer dans la zone de rayonnement et nous permet de conserver les deux premiers termes seulement dans le développement suivant :

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = kr - k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \frac{k}{2r} (r'^2 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2) + \dots \quad (11.22)$$

Notons qu'en pratique, l'approximation de Fraunhofer peut être rendue exacte en insérant l'ouverture entre deux lentilles convergentes qui repoussent effectivement la source et l'observateur à l'infini.

Nous ferons donc l'approximation suivante pour la fonction de Green qui figure dans la formule (11.12) :

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \quad (11.23)$$

où \mathbf{k} est le vecteur de grandeur k dans la direction de \mathbf{r} ($\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). On écrit donc

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \int_{\text{ouv.}} da' (\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')) e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \right\} \quad (11.24)$$

Le calcul du rotationnel se fait comme en l'éq. (10.12) et on trouve enfin

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{k} \wedge \int_{\text{ouv.}} da' (\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')) e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \quad (11.25)$$

Considérons maintenant une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 et de polarisation $\hat{\mathbf{e}}_0$ (c'est-à-dire $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{e}}_0$) incidente sur l'ouverture. Faisons aussi l'approximation que $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{(0)}$ dans l'ouverture (la validité de cette approximation augmente avec la taille de l'ouverture par rapport à la longueur d'onde). D'après la formule (11.25), on trouve

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{iE_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0)) I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (11.26)$$

où on a défini l'intégrale

$$I(\mathbf{q}) = \int_{\text{ouv.}} da' e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \quad (11.27)$$

qui ne dépend que de la différence de vecteur d'onde $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ entre l'onde diffractée et l'onde incidente. $I(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture. Comme cette transformée de Fourier est effectuée à $z' = 0$, seules comptent les composantes q_x et q_y . La puissance diffractée moyenne par unité d'angle solide se calcule facilement :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \frac{|E_0|^2}{(2\pi)^2} |\mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0)|^2 |I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \quad (11.28)$$

Considérons le facteur qui dépend de la polarisation. Supposons premièrement une incidence normale, soit $\mathbf{k}_0 = kz$. Le vecteur de polarisation est alors dans le plan xy : $\hat{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{x} \cos \psi + \mathbf{y} \sin \psi$, où ψ est un angle quelconque. On trouve alors

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0) &= k(\mathbf{z} \cos \theta + \mathbf{x} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{y} \sin \theta \sin \varphi) \wedge (\mathbf{y} \cos \psi - \mathbf{x} \sin \psi) \\ &= k \{-\mathbf{x} \cos \theta \cos \psi - \mathbf{y} \cos \theta \sin \psi + \mathbf{z} \sin \theta \cos(\psi - \varphi)\} \end{aligned} \quad (11.29)$$

donc

$$|\mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0)|^2 = k^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2(\psi - \varphi)) \quad (11.30)$$

Si on fait de cette expression une moyenne sur les différentes polarisations possibles, c'est-à-dire une moyenne sur ψ , le facteur $\cos^2(\psi - \varphi)$ est alors remplacé par $\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{1}{2}k^2(1 + \cos^2 \theta)$. On trouve donc la section différentielle non polarisée suivante :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{non pol.}} &= \frac{c}{16\pi} \frac{|E_0|^2}{(2\pi)^2} k^2(1 + \cos^2 \theta) |I(\mathbf{k})|^2 \\ &= \frac{c}{8\pi} \frac{|E_0|^2}{(2\pi)^2} k^2(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) |I(\mathbf{k})|^2 \end{aligned} \quad (11.31)$$

On laisse en exercice le soin de généraliser ce résultat au cas d'un angle d'incidence non nul. On obtient alors

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pol.}} |\mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0)|^2 = \frac{1}{2} k^2(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta_0) + \frac{1}{2} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{k}_0)]^2 \quad (11.32)$$

où θ et θ_0 sont les angles que font respectivement \mathbf{k} et \mathbf{k}_0 avec l'axe des z . On trouve alors

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{non pol.}} = \frac{c}{16\pi} \frac{|E_0|^2}{(2\pi)^2} \{k^2(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta_0) + \frac{1}{2} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{k}_0)]^2\} |I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \quad (11.33)$$

Si l'ouverture est grande en comparaison de la longueur d'onde, la fonction $|I(\mathbf{k})|^2$ est fortement concentrée autour des faibles angles ($\theta \ll 1$) et, dans ce domaine, le préfacteur impliquant la polarisation varie très peu, de sorte qu'on peut le considérer approximativement comme une constante. Comme la différence principale entre les théories vectorielle et scalaire réside dans ce facteur, on comprend pourquoi la théorie scalaire peut être couramment utilisée sans causer d'erreur importante.

Coefficient de transmission

Dans le contexte de la diffraction par une ouverture, on définit le *coefficient de transmission* T comme la puissance totale diffractée, divisée par la puissance incidente sur l'ouverture. Si A est l'aire de l'ouverture et θ_0 l'angle d'incidence de l'onde plane frappant l'ouverture, la puissance incidente sur l'ouverture est

$$P_0 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 A \cos \theta_0 \quad (11.34)$$

car c'est le produit scalaire du vecteur de Poynting incident avec la normale à l'ouverture qui détermine le flux de puissance par unité de surface dans la direction \mathbf{z} . Dans une polarisation donnée $\hat{\mathbf{e}}_0$, le coefficient de transmission est alors

$$T = \frac{1}{A \cos \theta_0 (2\pi)^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |\mathbf{k} \wedge (\mathbf{z} \wedge \hat{\mathbf{e}}_0)|^2 |I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \quad (11.35)$$

On peut aussi en définir une version non polarisée, moyennée sur les polarisations initiales. Dans le cas particulier d'une onde non polarisée à incidence normale, le coefficient de transmission est

$$T = \frac{k^2}{A(2\pi)^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) |I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \quad (11.36)$$

C Diffraction par une ouverture circulaire

Comme application de la théorie présentée ci-haut, calculons le patron de diffraction produit par une ouverture circulaire, dans l'approximation de Fraunhofer. Nous supposons, pour simplifier les calculs, que l'onde incidente est normale à l'écran ($\mathbf{k}_0 = k\mathbf{z}$). Dans ce cas, la fonction $I(\mathbf{k})$ dépend des angles polaires (θ, φ) spécifiant la direction de \mathbf{k} . Nous allons paramétrer la position \mathbf{r}' dans l'ouverture par les coordonnées polaires planes (r', φ') , où r' va de 0 à a (le rayon de l'ouverture) et φ' de 0 à 2π . On trouve donc, d'après l'éq. (11.27),

$$I(\theta, \varphi) = \int_0^a dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp\{-ikr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')\} \quad (11.37)$$

L'intégrale sur φ' donne une fonction de Bessel, car

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\alpha \cos \varphi} = 2\pi J_0(\alpha) \quad (11.38)$$

(voir la formule (15.82)). Il reste là intégrer sur r' :

$$I(\theta, \varphi) = 2\pi \int_0^a dr' r' J_0(kr' \sin \theta) \quad (11.39)$$

Comme $(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$, on trouve

$$I(\theta, \varphi) = 2\pi a^2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (11.40)$$

La puissance diffractée, moyennée sur les polarisations de l'onde incidente, est alors

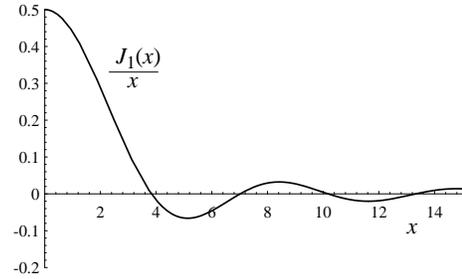
$$\begin{aligned} \left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{non pol.}} &= \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 a^2 (ka)^2 (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \left| \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2 \\ &= P_0 \frac{(ka)^2}{\pi} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \left| \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2 \end{aligned} \quad (11.41)$$

où P_0 est la puissance incidente sur l'ouverture, c'est-à-dire $c|E_0|^2/8\pi$ fois l'aire πa^2 de l'ouverture. On voit que l'intensité est maximale à $\theta = 0$ et qu'elle s'annule aux racines x_{1n} de J_1 , dont la première est $x_{11} = 3,832$, ce qui correspond à un angle

$$\sin \theta_0 = \frac{3,832}{ka} = 0,61 \frac{\lambda}{a} \quad (11.42)$$

FIGURE 11.3

Illustration de la fonction $J_1(x)/x$, intervenant dans la diffraction par une ouverture circulaire.



Le coefficient de transmission (11.36) a, dans le cas d'une ouverture circulaire, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \frac{(ka)^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \left| \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2 \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\frac{2}{\sin \theta} - \sin \theta \right) J_1^2(ka \sin \theta) \end{aligned} \quad (11.43)$$

On montre que cette dernière expression est égale à

$$T = 1 - \frac{1}{2ka} \int_0^{2ka} J_0(t) dt \quad (11.44)$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$T = 1 - {}_1F_2\left(\frac{1}{2}, \left\{1, \frac{3}{2}\right\}, -(ka)^2\right) \quad (11.45)$$

Dans la limite d'une grande ouverture ($ka \gg 1$), on trouve $T = 1$: toute l'énergie incidente est transmise. Ceci n'est vrai que si l'onde incidente est normale à l'écran. Si, au contraire, le vecteur d'onde incident \mathbf{k}_0 fait un angle θ_0 avec l'axe des z , on trouve plutôt $T \rightarrow \cos \theta_0$ dans la limite $ka \rightarrow \infty$. Dans la limite contraire ($ka \rightarrow 0$), on constate d'après l'expression (11.44) que $T \rightarrow 0$. Rappelons-nous cependant que nos calculs ne sont pas valables dans cette limite, car nous avons supposé $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{(0)}$ dans l'ouverture. Ceci dit, il est quand même vrai que le coefficient de transmission tend vers zéro dans cette limite. Ceci implique qu'un grillage dont les mailles sont considérablement plus petites que la longueur d'onde peut réfléchir parfaitement une onde électromagnétique.⁴ Enfin, on remarque des oscillations de T en fonction de ka , sorte de phénomène de résonance : la transmission est plus prononcée lorsque le diamètre de l'ouverture est un multiple entier de la longueur d'onde.

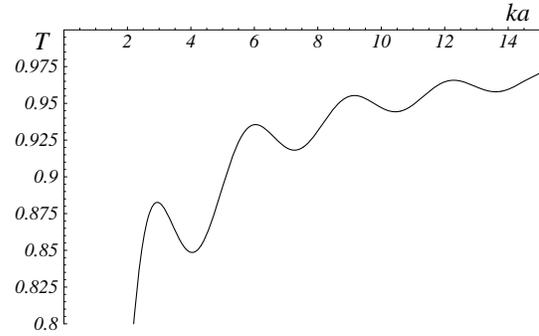
Critère de Rayleigh

La diffraction par une ouverture circulaire nous permet de justifier le critère de Rayleigh, utilisé pour définir la limite de résolution d'un instrument d'observation comme le télescope. Considérons deux sources ponctuelles très rapprochées l'une de l'autre (par exemple, deux étoiles) dont le rayonnement parvient jusqu'à un télescope dont l'objectif est de rayon a . Les rayons en provenance de chacune des deux sources sont diffractés par l'objectif et les images correspondantes acquièrent donc une certaine largeur que Rayleigh a définie raisonnablement comme étant la largeur du pic central de diffraction, qui est de rayon angulaire $0,61\lambda/a$. Les deux sources n'étant pas superposées dans l'espace, leurs

4. La grille d'observation sur la porte d'un four à micro-ondes en est un exemple ; beaucoup d'antennes paraboliques commerciales sont aussi des grilles, ce qui permet de les alléger.

FIGURE 11.4

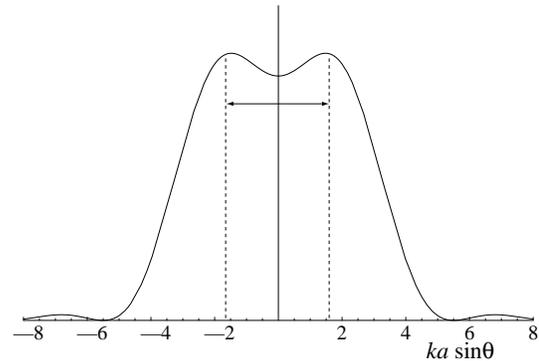
Coefficient de transmission pour une ouverture circulaire, en fonction de ka . On remarque les résonances lorsque ka est approximativement un multiple entier de π . Le coefficient T tend vers zéro lorsque $ka \rightarrow 0$.



rayons sont caractérisés par des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_0^{(1)}$ et $\mathbf{k}_0^{(2)}$ très voisins. Or, la position de l'image sur l'écran se définit par rapport à \mathbf{k}_0 (c'est $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ qui intervient dans le patron de diffraction). Donc, les deux images seront séparées angulairement comme $\mathbf{k}_0^{(1)}$ et $\mathbf{k}_0^{(2)}$ le sont. Cependant, les deux images ayant une certaine largeur angulaire (même pour un objet ponctuel) elles ne pourront être raisonnablement distinguées l'une de l'autre si leur séparation angulaire est inférieure à $0,61\lambda/a$. En effet, dans ce cas, le maximum de l'intensité d'une image coïncide avec le minimum de l'autre et l'intensité totale montre à peine une structure à deux bosses qui permet de distinguer deux objets. L'avantage d'un télescope de fort diamètre n'est donc pas seulement la récolte d'une plus grande intensité lumineuse, mais aussi une résolution supérieure permettant de distinguer des objets plus éloignés de nous.

FIGURE 11.5

Illustration du critère de Rayleigh. Les deux sources sont ici séparées angulairement de $0,61\lambda/a$ et peuvent tout juste être distinguées.



D Principe de Babinet

Considérons une ouverture pratiquée dans un écran conducteur à $z = 0$. Appelons l'écran S_a et l'ouverture S_b , de sorte que l'union $S_a \cup S_b$ donne le plan $z = 0$ en son entier. Le *principe de Babinet* établit une correspondance entre la diffraction par l'ouverture S_b et la diffraction par le système inverse (ou complément), où l'écran est maintenant S_b et l'ouverture S_a . Le système inverse est aussi défini par une rotation de la polarisation de l'onde incidente : autrement dit,

$$\mathbf{E}_c^{(0)} = \mathbf{B}^{(0)} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_c^{(0)} = -\mathbf{E}^{(0)} \quad (11.46)$$

(l'indice c sur les champs signifie qu'ils réfèrent au système inverse). L'expression précise du principe de Babinet est la suivante : du côté positif de l'écran ($z > 0$),

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{B}^{(0)} - \mathbf{B} \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{(0)} \quad (11.47)$$

Démontrons cette relation.

Rappelons les relations (11.20), appliquées au système inverse et (11.12) appliqué au système direct :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_c(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{S_b} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{B}'_c(\mathbf{r}')) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \nabla \wedge \int_{S_b} da' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \end{aligned} \quad (11.48)$$

Dans les deux cas, l'intégrale est prise sur la surface S_b , qui est l'ouverture dans le cas direct et l'écran dans le cas inverse. On constate que les deux quantités \mathbf{B}'_c et \mathbf{E} satisfont à la même équation intégrale. De plus, les deux quantités ont aussi les mêmes conditions aux limites. En effet, dans l'approximation où l'ouverture est beaucoup plus grande que la longueur d'onde λ , le champ \mathbf{E} est égal à $\mathbf{E}^{(0)}$ dans l'ouverture, alors que le champ \mathbf{B}_c est nul tout juste derrière l'écran ($z = 0^+$) ; donc $\mathbf{B}'_c + \mathbf{B}_c^{(0)} = 0$ et $\mathbf{B}'_c = -\mathbf{B}_c^{(0)} = \mathbf{E}^{(0)}$. Conclusion : les deux quantités \mathbf{B}'_c et \mathbf{E} obéissent à la même équation intégrale et aux mêmes conditions aux limites et sont par conséquent identiques : $\mathbf{B}'_c = \mathbf{E}$. Donc $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}'_c + \mathbf{B}_c^{(0)} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{(0)}$, tel qu'annoncé. La solution $\mathbf{B}'_c = \mathbf{E}$ nous permet aussi d'écrire $\mathbf{E}'_c = -\mathbf{B}$, à cause de la dualité électrique magnétique dans le vide. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c &= \mathbf{B}'_c + \mathbf{B}_c^{(0)} &= \mathbf{E} - \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{E}_c &= \mathbf{E}'_c + \mathbf{E}_c^{(0)} &= \mathbf{B}^{(0)} - \mathbf{B} \end{aligned} \quad (11.49)$$

C'est là l'expression précise du principe de Babinet.

Comme application du principe de Babinet, considérons une fente mince pratiquée dans un écran conducteur infini. Supposons que la polarisation de l'onde incidente est linéaire, avec le champ magnétique dans la direction de la fente. D'après le principe de Babinet, le champ \mathbf{B} diffracté par cette fente est identique au champ \mathbf{E} émis par une antenne linéaire de la même forme que la fente : $\mathbf{B} = -\mathbf{E}'_c$. Notons cependant que cette antenne équivalente n'est pas de même nature que les antennes considérées précédemment : le courant équivalent qui y circule n'est pas sinusoïdal et l'antenne a une certaine largeur effective, pas toujours négligeable en comparaison de la longueur d'onde. On peut construire l'équivalent d'un réseau d'antennes en aménageant une suite de fentes le long d'un guide d'onde, par exemple. Bien sûr, un guide d'onde n'est pas un plan infini, mais l'effet est qualitativement le même.

E Formule de Stratton-Chu

À la sous-section 11.A.1, nous avons démontré comment la connaissance du champ électrique sur le plan $z = 0$ pouvait nous permettre de calculer le champ électrique partout dans l'espace $z > 0$. Nous allons ici démontrer une relation plus générale que la formule (11.12) et qui peut en principe permettre de calculer le champ rayonné par une ouverture pratiquée dans une surface non plane, par exemple un guide d'onde. On considère une surface fermée S avec coordonnées \mathbf{r}' et on s'intéresse au champ \mathbf{E} à un point \mathbf{r} situé dans le volume borné par la surface S . On suppose que ce volume ne contient aucune source de champ électromagnétique. La généralisation de la formule de Kirchhoff, appelée formule de *Stratton-Chu*, est la suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_S da' \{ ik(\mathbf{n}' \wedge \mathbf{B})G + (\mathbf{n}' \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla' G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' G \} \quad (11.50)$$

où l'intégrale des champs est prise sur S , le vecteur \mathbf{n}' est la normale *intérieure* à la surface S et $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la fonction de Green appropriée aux conditions aux limites choisies sur S .

Démontrons maintenant la relation (11.50). Premièrement, comme chaque composante de \mathbf{E} obéit à l'équation de Kirchhoff, on peut exprimer chaque composante comme en l'éq. (11.8) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_S da' \{ \mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) - G(\mathbf{n}' \cdot \nabla' \mathbf{E}) \} \quad (11.51)$$

L'ennui avec cette relation, c'est qu'elle contient la dérivée du champ sur la surface ; il est préférable d'exprimer ce résultat seulement en fonction des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . À cette fin, introduisons une deuxième surface S' , infinitésimale, autour du point \mathbf{r} , avec une normale *extérieure*. La surface $S^* = S \cup S'$ ne contient alors plus le point \mathbf{r} , et on trouve naturellement

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{S^*} da' \{ \mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) - G(\mathbf{n}' \cdot \nabla' \mathbf{E}) \} \\ &= \oint_{S^*} da' \{ 2\mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) - \mathbf{n}' \nabla' \cdot (G\mathbf{E}) \} \\ &= \oint_{S^*} da' 2\mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) + \int_V d^3r' \nabla'^2(G\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (11.52)$$

où nous avons utilisé le théorème de Gauss pour le deuxième terme. L'utilisation de ce théorème est justifiée puisque l'intégrand est partout régulier dans le volume V contenu entre les deux surfaces S et S' . C'est d'ailleurs pourquoi nous avons effectué la décomposition $S = S^* - S'$. Mais

$$\nabla'^2(G\mathbf{E}) = \nabla'(\nabla' \cdot (G\mathbf{E})) - \nabla' \wedge (\nabla' \wedge (G\mathbf{E})) \quad (11.53)$$

On peut ensuite remettre l'intégrale sur V en forme d'intégrale de surface en utilisant les relations suivantes :

$$\int_V d^3r' \nabla' \phi = - \int_{S^*} da' \mathbf{n}' \phi \quad \int_V d^3r' \nabla' \wedge \mathbf{F} = - \oint_{S^*} da' (\mathbf{n}' \wedge \mathbf{F}) \quad (11.54)$$

où ϕ et \mathbf{F} sont une fonction et un champ vectoriel quelconques. On obtient alors

$$0 = \oint_{S^*} da' \{2\mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) - \mathbf{n}'(\nabla' \cdot (\mathbf{G}\mathbf{E})) + \mathbf{n}' \wedge (\nabla' \wedge (\mathbf{G}\mathbf{E}))\} \quad (11.55)$$

Ensuite, on développe les deux derniers termes :

$$\nabla' \cdot (\mathbf{G}\mathbf{E}) = \nabla' G \cdot \mathbf{E} + G \nabla' \cdot \mathbf{E} \quad \nabla' \wedge (\mathbf{G}\mathbf{E}) = G \nabla' \wedge \mathbf{E} + \nabla' G \wedge \mathbf{E} \quad (11.56)$$

Comme $\nabla' \cdot \mathbf{E} = 0$ et $\nabla' \wedge \mathbf{E} = ik\mathbf{B}$, on trouve

$$0 = \oint_{S^*} da' \{2\mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) - \mathbf{n}'(\nabla' G \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{n}' \wedge (\nabla' G \wedge \mathbf{E}) + ik(\mathbf{n}' \wedge \mathbf{B})G\} \quad (11.57)$$

puisque

$$\mathbf{n}' \wedge (\nabla' G \wedge \mathbf{E}) = \nabla' G(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) \quad (11.58)$$

il y a compensation de deux termes et on peut regrouper ce qui reste précisément comme en l'éq. (11.50) :

$$0 = \oint_{S^*} da' \{ik(\mathbf{n}' \wedge \mathbf{B})G + (\mathbf{n}' \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla' G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla' G\} \quad (11.59)$$

Calculons maintenant la portion de cette intégrale évaluée sur S' , qu'on prend comme une sphère de rayon $\varepsilon \rightarrow 0$ centrée sur \mathbf{r} . Premièrement, même si G est en général une fonction comportant plusieurs termes (en raison des conditions aux limites), tous les termes sauf (2.42) sont réguliers à $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ et ont une contribution nulle. On peut aussi considérer \mathbf{E} comme constant sur la surface S' dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin, seuls les termes en ∇G contribuent à l'intégrale dans cette limite. On trouve alors

$$\oint_{S'} da' \{\mathbf{E}(\mathbf{n}' \cdot \nabla' G) + \mathbf{E} \wedge (\mathbf{n}' \wedge \nabla' G)\} \quad (11.60)$$

Le deuxième terme s'annule et le premier donne $-\mathbf{E}$. Nous avons donc démontré la formule (11.50).

On montre que la formule (11.50) est valable même quand la surface S n'est pas fermée, mais qu'elle s'étend vers l'infini. Cette formule peut donc être utilisée comme point de départ de tous les problèmes de diffraction ou de rayonnement par une ouverture. Le problème est alors de trouver la forme la plus utile de G . On utilise aussi la formule (11.50) dans la théorie de la diffusion des ondes électromagnétiques par des conducteurs.

Problèmes

Problème 11.1

Ce problème consiste à calculer quelques patrons de diffraction simples, dans l'approximation de Fraunhofer. Nous supposons partout que la lumière incidente est non polarisée.

A Calculez le patron de diffraction $dP/d\Omega$ d'une ouverture rectangulaire de largeur a (direction x) et de hauteur b (direction y).

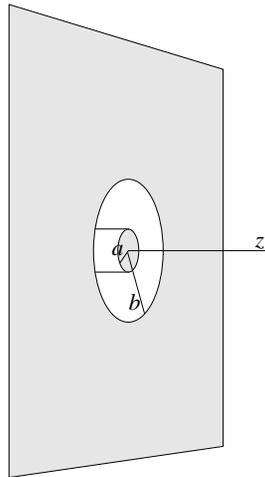
B Que devient le patron trouvé en **A** dans la limite d'une fente de largeur a , c'est-à-dire quand $b \rightarrow \infty$?

C Montrez explicitement que le coefficient de transmission T est égal à 1 quand $ka \gg 1$ et $kb \gg 1$.

D Calculez le patron de diffraction produit par deux fentes de largeur a , séparées par une distance d (centre à centre). Faites un graphique du résultat pour $ka = 20$ et $kd = 100$, en fonction de l'angle θ .

Indice : en **B** et **D**, il est utile d'utiliser la représentation suivante de la fonction delta de Dirac :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin(xt)}{x} \right)^2 = \pi \delta(x) \quad (11.61)$$



Prob. 11.2

Problème 11.2

Une antenne consiste en un câble coaxial sectionné, dont l'enveloppe conductrice externe (de rayon b) est soudée à un plan conducteur infini, alors que la tige centrale (de rayon $a < b$) est laissée libre. Le câble coaxial porte un signal de fréquence ω dans un mode TEM. Le champ électrique à l'intérieur du câble est, comme on peut facilement le démontrer, $E_\rho = \alpha/\rho$, où ρ est la coordonnée cylindrique radiale, et $a < \rho < b$ et α est une constante proportionnelle à la tension du signal. En dehors de cette région diélectrique, le champ est nul.

A En partant de l'éq. de Kirchhoff-Smythe dans l'approximation de Fraunhofer (11.25), montrez que le champ électrique rayonné par cette antenne est

$$\mathbf{E} = -\frac{k\alpha b}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\theta} F(kb \sin \theta) \quad (11.62)$$

où la fonction $F(u)$ est définie par une double intégrale :

$$F(u) = i \int_{a/b}^1 dt \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' e^{-iut \cos \varphi'} \quad (11.63)$$

B Montrez que, si $u \ll 1$,

$$F(u) \approx \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) u \quad (11.64)$$

et déduisez-en la forme du champ diffracté et de l'intensité diffractée dans l'approximation des grandes longueurs d'onde ($kb \ll 1$).

C Calculez numériquement $F(u)$ dans le cas $a/b = 1/4$, faites-en un graphique, et commentez sur le patron de diffraction résultant, quand b n'est pas petit par rapport à la longueur d'onde.

CHAPITRE 12

Diffusion de la lumière

Par définition, le phénomène de diffusion se produit lorsqu'une onde plane incidente sur un milieu génère des ondes secondaires dans pratiquement toutes les directions. Ce phénomène est étroitement lié à l'inhomogénéité du milieu. En effet, dans un milieu parfaitement homogène – au moins à une échelle de longueur comparable à la longueur d'onde du rayonnement – l'invariance par translation fait qu'une onde plane perpétuelle est forcément une solution aux équations de Maxwell et donc toute diffusion serait en contradiction avec les principes de l'électromagnétisme. Par contre, en présence d'inhomogénéités (impuretés, défauts, fluctuations dans la densité du milieu, etc.), une onde plane de vecteur d'onde bien précis perdra progressivement de son amplitude au profit d'ondes secondaires émises par ces inhomogénéités en réaction au passage de l'onde plane. Une bonne partie de la physique de la diffusion repose sur une comparaison entre la dimension caractéristique des inhomogénéités et la longueur d'onde.

Nous allons commencer (section A) par étudier la diffusion par un seul électron ou atome, dans le cadre du modèle de Drude (la présence d'un seul atome dans une région de l'espace constitue une inhomogénéité évidente). Cependant, la diffusion de la lumière par un milieu macroscopique nécessite une étude plus générale que la diffusion par un seul atome. C'est ce que nous ferons dans la section B. Les fluctuations thermiques dans la densité d'un fluide constituent un exemple particulièrement intéressant d'inhomogénéité. Ces fluctuations deviennent considérables lorsqu'on s'approche d'un point critique, ce qui donne lieu au phénomène d'*opalescence critique*, que nous étudierons à la section D.

A Diffusion par un électron

Dans cette section nous allons étudier la diffusion d'ondes électromagnétiques par des électrons libres ou liés. Nous allons pour cela utiliser le modèle classique d'un électron lié harmoniquement à un atome ou une molécule.¹

Supposons qu'une onde plane à polarisation linéaire

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.1)$$

est incidente sur un électron lié dans un atome autour d'une position d'équilibre. L'atome développe un moment dipolaire oscillant en réponse à cette onde (cf. éq.(6.12)) :

$$\mathbf{d} = \mathbf{E}_0 \frac{e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad \Gamma(\omega) = N \sum_a \frac{f_a}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_a} \quad (12.2)$$

où N est le nombre de résonances à considérer dans l'atome ou la molécule et f_a est la fraction de résonances ayant une fréquence ω_a et un amortissement γ_a . Un tel dipôle oscillant émet un rayonnement électromagnétique dont la forme nous est connue :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{d}|^2 \sin^2 \gamma \\ &= \frac{ce^4 k^4}{8\pi m^2} |\mathbf{E}_0|^2 |\Gamma(\omega)|^2 \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (12.3)$$

où γ est l'angle entre la polarisation de l'onde incidente et la direction d'observation $\hat{\mathbf{r}}$. En fait, une partie de l'énergie de l'onde incidente est absorbée par le mouvement de l'électron et émise de nouveau en rayonnement.

Section différentielle de diffusion

La quantité la plus utile pour décrire le processus de diffusion n'est pas $dP/d\Omega$, mais la *section différentielle de diffusion*, notée $d\sigma/d\Omega$. Par définition, il s'agit de la puissance émise dans une direction donnée, par unité d'angle solide et par unité de flux d'énergie incident (moyennés dans le temps) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\text{flux incident}} \quad (12.4)$$

Dans le cas qui nous occupe, le flux incident est $\langle \mathbf{S} \rangle = (c|\mathbf{E}_0|^2/8\pi)$. On écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4 k^4}{m^2} |\Gamma(\omega)|^2 \sin^2 \gamma \\ &= r_0^2 \omega^4 |\Gamma(\omega)|^2 \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (12.5)$$

où nous avons substitué $k = \omega/c$ et la définition du rayon classique de l'électron $r_0 = e^2/mc^2$ (2.82×10^{-13} cm).

1. Rappelons que dans la théorie quantique, la fréquence de l'oscillateur correspond à la fréquence d'une transition atomique ou moléculaire entre un état excité et le niveau fondamental.

Cette section différentielle est dite «polarisée», car elle correspond à une onde incidente polarisée. En pratique, à moins de contrôler l'onde incidente, on s'intéresse le plus souvent à une moyenne sur les polarisations. À cette fin, prenons l'axe des x tel que $\hat{\mathbf{r}}$ soit dans le plan xz . Le vecteur de polarisation $\hat{\mathbf{e}}_0$ de l'onde est contenu dans le plan xy ; soit ψ l'angle que fait $\hat{\mathbf{e}}_0$ avec l'axe des x . Si θ est l'angle que fait $\hat{\mathbf{r}}$ avec \mathbf{z} (l'angle de diffusion) et γ l'angle que fait $\hat{\mathbf{r}}$ avec $\hat{\mathbf{e}}_0$, on a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{x} \sin \theta + \mathbf{z} \cos \theta$ et $\hat{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{x} \cos \psi + \mathbf{y} \sin \psi$; donc $\cos \gamma = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0 = \cos \psi \sin \theta$, ou

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \psi \sin^2 \theta \quad (12.6)$$

La section différentielle non polarisée se calcule donc en faisant la moyenne des polarisations sur le plan xy , c'est-à-dire la moyenne sur ψ . Comme la valeur moyenne de $\cos^2 \psi$ est $\frac{1}{2}$, on trouve que

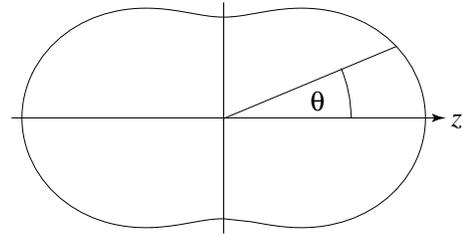
$$\langle \sin^2 \gamma \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (12.7)$$

On peut donc écrire la section différentielle suivante :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{non pol.}} = \frac{1}{2} r_0^2 \omega^4 |\Gamma(\omega)|^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (12.8)$$

FIGURE 12.1

Dépendance angulaire de la section différentielle de diffusion par un dipôle électrique induit, comme un atome, une molécule, ou un électron seul. On suppose que l'onde est incidente horizontalement, le long de l'axe des z , et qu'elle n'est pas polarisée (une moyenne sur les polarisations a été faite). La dépendance angulaire est en $1 + \cos^2 \theta$.



Section efficace et interprétation géométrique

La *section efficace* de diffusion est définie comme l'intégrale sur les directions de la section différentielle :

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ &= \frac{8\pi r_0^2}{3} \omega^4 |\Gamma(\omega)|^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{k^4}{\rho^2} |n-1|^2 \end{aligned} \quad (12.9)$$

Notons que la section efficace, tout comme la section différentielle, a la dimension d'une surface.

Dans le but de comprendre la signification géométrique de la section efficace, il est bon de considérer le problème de la diffusion de particules ponctuelles par un obstacle, dans une perspective classique. Supposons que nous ayons un flux de Φ particules par unité de temps et unité de surface qui se dirige dans une direction bien précise (disons \mathbf{z}). Chaque particule peut interagir avec un objet situé à l'origine (le diffuseur) et être déviée dans une direction particulière (θ, φ) . On supposera que le diffuseur est infiniment massif en comparaison des particules ponctuelles et qu'il n'est pas affecté par les collisions. En principe, la direction de diffusion (θ, φ) est uniquement déterminée par la position (x, y) de la particule incidente par rapport à l'axe z et par la forme précise de son interaction avec l'objet diffuseur. La section différentielle de diffusion est alors définie comme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\# \text{ de particules diffusées vers } (\theta, \varphi)}{\text{flux incident} \times \text{angle solide } d\Omega} \quad (12.10)$$

Notons que cette définition est compatible avec celle utilisée pour la diffusion des ondes électromagnétiques, car le nombre de particules par unité de temps correspond alors au nombre de photons par unité de temps. Le flux d'énergie s'obtient alors en multipliant le flux de photons par $\hbar\omega$. Comme ce facteur $\hbar\omega$ apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur, la section différentielle est la même, que l'on compte les photons ou l'énergie.

La section efficace σ est alors le nombre de particules déviées par unité de temps, divisé par le flux incident. Autrement dit, le nombre de particules déviées par unité de temps est $\sigma\Phi$. Or, dans le cas d'une interaction de contact entre les particules ponctuelles et le diffuseur, ces dernières ne sont diffusées que si elles entrent en contact direct avec l'objet. Le nombre de particules dans cette situation (par unité de temps) est précisément Φ multiplié par l'aire transversale A de l'objet. Donc, dans ce cas, on trouve $\sigma = A$, d'où le nom de *section efficace*. En somme, dans un problème plus général (sans interaction de contact), la section efficace nous indique la capacité d'un diffuseur à dévier les particules incidentes, en donnant la superficie équivalente d'un objet qui diffuserait uniquement par contact.

Coefficient d'atténuation

On définit le *coefficient d'absorption* ou d'*atténuation* α par la relation

$$\alpha = \rho\sigma \quad (12.11)$$

où ρ est la densité des diffuseurs (nombre par unité de volume). Après avoir traversé une épaisseur dx d'un milieu comportant des diffuseurs, la fraction diffusée de flux lumineux sera $\rho\sigma dx$. On peut le voir comme suit : considérons une aire A transversale au flux incident. Dans le volume délimité par cette aire et par l'épaisseur dx il y a $\rho A dx$ diffuseurs. La probabilité que la lumière soit diffusée par un diffuseur en particulier en passant dans cette aire A est σ/A . Donc la probabilité qu'elle soit diffusée par l'un des diffuseurs présents est $\rho\sigma dx = \alpha dx$. L'intensité du faisceau décroît en rapport avec la proportion de particules diffusées entre les positions x et $x + dx$:

$$I(x + dx) = I(x) - I(x)\alpha dx \implies \frac{I(x + dx) - I(x)}{dx} = -I(x)\alpha \quad (12.12)$$

Il s'ensuit que l'intensité du faisceau incident diminuera de façon exponentielle en fonction de x :

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (12.13)$$

On peut aussi décrire cette atténuation par une longueur caractéristique $\xi_{\text{att.}} = 1/\alpha$, après laquelle l'intensité du faisceau diminue d'un facteur e . Dans l'atmosphère, cette longueur varie de 30 km à 200 km quand on passe du violet au rouge.

Le raisonnement ci-haut sur le coefficient d'atténuation suppose bien sûr que les ondes diffusées par les diffuseurs différents se superposent de manière *incohérente*, c'est-à-dire qu'on additionne les *intensités* – ou les sections efficaces – et non pas les *amplitudes*.

Retournons maintenant à la formule de la section efficace démontrée plus haut dans le cadre du modèle de Drude :

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \omega^4 |\Gamma(\omega)|^2 = \frac{8\pi e^4}{3m^2} k^4 |\Gamma(\omega)|^2 \quad (12.14)$$

et comparons avec la formule (6.18) donnant l'indice de réfraction dans un gaz :

$$n = 1 + \frac{1}{2} \omega_p^2 \Gamma(\omega) = 1 + \frac{2\pi\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad (12.15)$$

On constate que

$$\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{k^4}{\rho^2} |n-1|^2 \quad (12.16)$$

Le coefficient d'atténuation dû à la diffusion dans un gaz peut donc s'exprimer comme

$$\alpha = \frac{2k^4}{3\pi\rho} |n-1|^2 \quad (12.17)$$

Cette formule est attribuable à Rayleigh. Elle démontre que l'atténuation n'est possible que si la densité volumique des particules n'est pas infinie. Autrement dit, la diffusion est une évidence forte en faveur de l'atomicité de la matière.

Diffusion Thomson et Rayleigh

Revenons au résultat (12.8) et examinons-le dans deux limites :

1. Dans le cas d'une fréquence élevée en comparaison des fréquences de résonance ω_a , on peut essentiellement négliger les facteurs ω_a et γ_a dans les dénominateurs de $\Gamma(\omega)$ et on trouve simplement $\Gamma(\omega) \approx N/\omega^2$. Dans ce cas, la section efficace devient indépendante de la fréquence :

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} N^2 = N^2 0.665 \times 10^{-24} \text{cm}^2 = N^2 0.665 \text{ barn} \quad (12.18)$$

Il s'agit de la section efficace de *Thomson*, donnée approximativement par l'aire associée au rayon classique de l'électron, fois le carré du nombre d'électrons dans la molécule.² L'approximation $\omega \gg \omega_o$ revient en fait à considérer des électrons libres.

2. Au contraire, dans le cas d'une fréquence petite en comparaison des fréquences de résonance ω_a , la fonction $\Gamma(\omega)$ tend vers une constante que nous désignerons par N/ω_o^2 (si F ne comportait qu'une seule fréquence de résonance ω_o , ce serait le résultat attendu, avec $N = 1$). Disons que $1/\omega_o^2$ est la valeur moyenne de $1/\omega_a^2$. On retrouve donc le résultat suivant :

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} N^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^4, \quad (12.19)$$

Il s'agit de la section efficace de *Rayleigh*. Sa caractéristique essentielle est la dépendance en ω^4 ou en $1/\lambda^4$. Cela signifie que les petites longueurs d'onde (ex. le bleu) sont beaucoup plus diffusées que les grandes longueurs d'onde (ex. le rouge).

Notons que dans chaque cas (Thomson ou Rayleigh), la section différentielle non polarisée a la même forme en $(1 + \cos^2 \theta)$.³ Dans des deux cas (Thomson et Rayleigh), nous avons supposé naturellement que l'onde diffusée à la même fréquence que l'onde incidente. Ceci est tout à fait naturel, considérant le mécanisme classique invoqué pour le rayonnement : induction d'un moment dipolaire oscillant et réémission à la même fréquence. Cependant, ceci cesse d'être vrai quand la fréquence de l'onde incidente devient comparable à mc^2/\hbar , où mc^2 est l'énergie au repos de l'électron. Dans ce régime

2. Dans le modèle de Drude, on associe une résonance à chaque état atomique occupé par un électron et le nombre N de résonances correspond en effet au nombre d'électrons dans l'atome ou la molécule. Cependant, il faudrait plutôt considérer le nombre d'électrons situés dans une fraction de la longueur d'onde de la lumière incidente, car tous ces électrons pourront émettre un rayonnement secondaire en phase, de manière cohérente. Un traitement plus général de la diffusion, qui inclut cette possibilité, est exposé à la sous-section suivante.

3. Cette dépendance angulaire est correcte même dans un traitement quantique du problème. Dans un tel traitement, c'est le préfacteur qui devient plus compliqué : il dépend du détail des états quantiques de l'atome.

de hautes énergies, la nature corpusculaire de la lumière se manifeste de plus en plus et le photon incident peut céder une partie appréciable de son énergie à l'électron qui le diffuse. L'énergie ainsi cédée à l'électron est perdue pour le photon diffusé et la fréquence associée est plus petite ($\omega' < \omega$). La diffusion Thomson devient alors la diffusion *Compton*.

Un autre processus de diffusion essentiellement quantique est la diffusion *Raman*, au cours de laquelle le photon perd de l'énergie en excitant l'atome (ou le solide) sur lequel il diffuse. On dit par conséquent qu'il s'agit d'un processus inélastique. Ce processus est au coeur d'une branche importante de la spectroscopie et permet de déterminer les niveaux d'énergie dans les atomes, les molécules et les solides.

Explication du ciel bleu...

La diffusion Rayleigh explique en gros la couleur bleue du ciel : la lumière en provenance du soleil est un mélange de diverses fréquences. La lumière en provenance de l'atmosphère est le résultat de la diffusion de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère. Comme la plupart des électrons des molécules de l'atmosphère sont fortement liés (fréquences ultraviolettes ou X) la condition $\omega < \omega_0$ s'applique pour les fréquences optiques et on en conclut que la composante bleue du spectre solaire est diffusée plus efficacement que la composante rouge. La contrepartie de cet argument est que la lumière qui nous provient directement du soleil au niveau de la mer a une composante rouge d'autant plus prononcée qu'elle a effectué un trajet plus long dans l'atmosphère : une section efficace constante résulte en une atténuation exponentielle de la lumière. C'est ainsi que les couchers de soleil sont rougeâtres ; vu d'un véhicule en orbite ils le sont encore plus puisque le trajet atmosphérique de la lumière est deux fois plus long. Ajoutons tout de suite que cet argument est incomplet : l'atmosphère ne diffuse la lumière que parce que sa densité fluctue sur une échelle de longueur comparable à la longueur d'onde de la lumière, comme expliqué par la théorie cinétique des gaz. Si l'atmosphère était un milieu uniforme, elle ne pourrait que réfracter la lumière et non la diffuser.

...et des nuages blancs

Le facteur N^2 dans la section efficace de Thomson et de Rayleigh est très important. Il provient du fait que les différents électrons d'une même molécule diffusent la lumière de manière cohérente, c'est-à-dire qu'on doit ajouter les *amplitudes* des ondes diffusées par chacun des électrons et non leurs *intensités*. L'intensité de l'onde diffusée totale contient donc ce facteur N^2 et non simplement N . En fait, ce facteur N fait référence non pas au nombre d'électrons dans une molécule, mais au nombre d'électrons dans un volume dont les dimensions linéaires sont de l'ordre d'une fraction de la longueur d'onde de la lumière incidente. C'est alors sur un objet de charge Ne que l'onde diffuse, et non sur un électron en particulier. Étant donné un nombre fixe de molécules dans une enceinte, la diffusion sera donc plus importante si ces molécules sont regroupées en gouttelettes très espacées plutôt qu'en molécules individuelles relativement moins espacées : dans le premier cas, il y a plus d'électrons diffusant de manière cohérente. Ceci explique la couleur blanche des nuages : les nuages sont en effet constitués de gouttelettes d'eau microscopiques et non de vapeur d'eau. La diffusion par ces gouttelettes est complète ; toute la lumière du spectre visible est diffusée, peu importe la longueur d'onde, et c'est pourquoi les nuages apparaissent blancs. La vapeur d'eau, quant à elle, se comporte comme tout autre gaz atmosphérique.

B Théorie générale de la diffusion

Nous allons ici considérer la diffusion de la lumière causée par une inhomogénéité du milieu dans lequel la lumière se propage. Ceci inclut comme cas particulier la diffusion par un seul électron, tel qu'étudié dans la section précédente. Dans un milieu linéaire inhomogène, la propagation des ondes électromagnétiques est régie par l'équation différentielle suivante (voir l'exercice 5.1) :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} \right) \quad (12.20)$$

Supposons maintenant que la constante diélectrique ε comporte des inhomogénéités, mais qu'elle conserve une valeur moyenne $\bar{\varepsilon}$, de sorte qu'on puisse écrire $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon(\mathbf{r})$ où, par hypothèse, $\delta\varepsilon \ll \bar{\varepsilon}$. On peut récrire l'équation d'onde ci-haut comme

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}} \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla \delta\varepsilon) - \frac{\delta\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} k^2 \mathbf{E} \quad (12.21)$$

où $k^2 = \bar{\varepsilon} \omega^2 / c^2$ et où seuls les termes linéaires en $\delta\varepsilon$ ont été conservés. Il s'agit de l'équation de Helmholtz inhomogène, dont la solution nous est connue :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\bar{\varepsilon}} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ \nabla' (\mathbf{E} \cdot \nabla' \delta\varepsilon) + \delta\varepsilon k^2 \mathbf{E} \right\} \quad (12.22)$$

où ∇' est le gradient par rapport à \mathbf{r}' . Le premier terme est une solution à l'équation de Helmholtz homogène et décrit l'onde incidente. Le deuxième terme décrit l'onde diffusée. Il s'agit d'une équation intégrale, en général difficile à résoudre exactement. Cependant, nous allons supposer que l'onde diffusée est de faible amplitude en comparaison de l'onde incidente, de sorte qu'en première approximation on peut remplacer \mathbf{E} par \mathbf{E}_0 dans l'intégrale (approximation de Born). L'onde diffusée devient alors

$$\mathbf{E}_{\text{diff.}} = \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi\bar{\varepsilon}} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ \nabla' (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \nabla' \delta\varepsilon e^{ikz'}) + \delta\varepsilon k^2 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{ikz'} \right\} \quad (12.23)$$

où nous avons substitué la forme explicite de $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{ikz}$.

Plaçons-nous maintenant dans la zone de rayonnement :

$$\mathbf{E}_{\text{diff.}} = \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi\bar{\varepsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \left[\nabla' (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \nabla' \delta\varepsilon e^{ikz'}) + \delta\varepsilon k^2 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{ikz'} \right] e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}} \quad (12.24)$$

Il s'agit maintenant d'intégrer le premier terme par parties autant de fois que nécessaire pour éliminer les opérateurs différentiels qui figurent dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int d^3 r' \nabla' (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \nabla' \delta\varepsilon e^{ikz'}) e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}} &= -(-i\mathbf{k}) \int d^3 r' (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \nabla' \delta\varepsilon e^{ikz'}) e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}} \\ &= (-i\mathbf{k}) \int d^3 r' \delta\varepsilon \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \nabla' [e^{ikz'} e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}] \\ &= -\mathbf{k} \int d^3 r' \delta\varepsilon \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{z}) e^{ikz'} e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (12.25)$$

où nous avons supposé que le champ s'annule suffisamment rapidement à l'infini pour que tous les termes de surface s'annulent. Comme $\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{z} = 0$, on trouve simplement, en combinant avec l'autre terme,

$$\mathbf{E}_{\text{diff.}} = \frac{E_0}{4\pi\bar{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} [k^2\hat{\mathbf{e}}_0 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0)\mathbf{k}] \int d^3r' \delta\epsilon(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \quad (12.26)$$

où $\mathbf{q} = k(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{z})$ est la différence de vecteur d'onde entre l'onde incidente et l'onde diffusée. En langage quantique, il s'agit du transfert d'impulsion donné au photon. Notons que $\mathbf{z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0 = 0$ et que $\mathbf{E}_{\text{diff.}}$ est bel et bien perpendiculaire à \mathbf{k} , comme il se doit : $[k^2\hat{\mathbf{e}}_0 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0)\mathbf{k}]$ est la projection (multipliée par k^2) du vecteur $\hat{\mathbf{e}}_0$ dans le plan perpendiculaire à \mathbf{k} .

La section différentielle de diffusion est proportionnelle à $|\mathbf{E}_{\text{diff.}}|^2$. Ce carré implique l'expression

$$[k^2\hat{\mathbf{e}}_0 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0)\mathbf{k}]^2 = k^4 [1 - (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}})^2] \quad (12.27)$$

dont la moyenne sur les polarisations incidentes est

$$k^4 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (12.28)$$

La section différentielle de diffusion (non polarisée) est donc

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4\pi\bar{\epsilon}} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) |\delta\tilde{\epsilon}(\mathbf{q})|^2 \quad (12.29)$$

où $\delta\tilde{\epsilon}(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de la fonction $\delta\epsilon(\mathbf{r})$, évaluée à $\mathbf{q} = k(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{z})$. En somme, la diffusion nous permet de sonder la transformée de Fourier des inhomogénéités du milieu, donc d'en déterminer la forme.

Notons cependant que le traitement ci-haut suppose que les différents points du système diffusent de manière *cohérente*, c'est-à-dire que les amplitudes sont additionnées et non les intensités (d'où la transformée de Fourier $\delta\tilde{\epsilon}(\mathbf{q})$, qui incorpore les interférences possibles entre des diffuseurs différents). Il nous reste à considérer quelques exemples.

C Facteur de forme

Considérons maintenant la diffusion par un atome ou une molécule, comme dans la section préliminaire. D'après l'expression (6.16), l'inhomogénéité que représente une telle particule pour la constante diélectrique prend la forme suivante :

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{m}\Gamma(\omega)\delta(\mathbf{r}) \quad (12.30)$$

car la densité ρ est dans ce cas une fonction delta centrée sur la position de l'atome, qu'on suppose être à l'origine. La transformée de Fourier $\delta\tilde{\varepsilon}(\mathbf{q})$ de cette inhomogénéité est une constante indépendante de \mathbf{q} :

$$\delta\tilde{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{m}\Gamma(\omega) \quad (12.31)$$

En appliquant la formule (12.29) on retrouve précisément la section différentielle de Thomson ou de Rayleigh, selon le cas.

Supposons maintenant que la lumière incidente soit diffusée sur un ensemble de plusieurs particules identiques situées à des positions \mathbf{r}_i . On écrit alors

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{m}\Gamma(\omega) \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (12.32)$$

et la transformée de Fourier devient

$$\delta\tilde{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{m}\Gamma(\omega)F(\mathbf{q}) \quad (12.33)$$

où on a défini le *facteur de forme*⁴

$$F(\mathbf{q}) = \sum_i e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \quad (12.34)$$

L'appellation *facteur de forme* vient du fait que $F(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de la densité des diffuseurs.

Considérons maintenant deux cas extrêmes. Dans le premier cas, on suppose que les N diffuseurs sont distribués de manière aléatoire dans l'espace, sans qu'il y ait corrélation statistique entre les positions des différents diffuseurs. Ce serait le cas d'un gaz parfait. On peut alors exprimer le carré du facteur de forme comme suit :

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \sum_{m,n}^N e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} \quad (12.35)$$

Séparons la contribution de $m = n$ des autres :

$$|F(\mathbf{q})|^2 = N + 2 \sum_{m < n}^N \cos[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)] \quad (12.36)$$

4. Dans certains ouvrages, dont celui de JACKSON, on appelle *facteur de forme* le module carré $|F(\mathbf{q})|^2$.

Comme il n'y a aucune corrélation entre les différentes positions, la somme des cosinus est nulle. Il reste donc $|F(\mathbf{q})|^2 = N$. Donc, bien que les différents diffuseurs aient la possibilité de diffuser de manière cohérente, le désordre de leurs positions relatives annule l'effet de cohérence et ne produit qu'un facteur N dans la section efficace.

Dans le deuxième cas, on suppose au contraire que les positions des différents diffuseurs sont extrêmement corrélées, comme dans un cristal parfait. Il est bien connu alors que le facteur de forme n'est non nul que si \mathbf{q} est un vecteur du réseau cristallin réciproque. Pour obtenir une amplitude de diffusion appréciable, il faut donc que la longueur d'onde soit de l'ordre des distances interatomiques, soit dans le régime des rayons X. En revanche, dans le domaine optique, la diffusion par des cristaux isolants n'est causée que par les impuretés et les défauts cristallins.

D Fluctuations de densité

Considérons maintenant la diffusion causée par les fluctuations dans la densité de particules d'un gaz ou d'un liquide. Imaginons que le volume V du liquide soit divisé en cellules de dimensions petites en comparaison de la longueur d'onde de la lumière. Chaque cellule a un volume v et comporte en moyenne ρv particules, où ρ est le nombre de particules par unité de volume. Soit δN_j la différence entre le nombre réel de particules dans la cellule j à un instant donné et la valeur moyenne ρv . On suppose que cette fluctuation est d'origine thermique et est influencée par les interactions existant entre les différentes molécules du liquide. La constante diélectrique associée à la cellule j sera par conséquent légèrement modifiée, menant à une variation

$$\delta \varepsilon_j = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho_j \quad \delta \rho_j = \frac{\delta N_j}{v} \quad (12.37)$$

où $\delta \rho_j$ est la fluctuation de la densité des particules dans la cellule j . Comme nous traitons d'un liquide, l'éq. (6.16) n'est pas applicable ; il faut plutôt utiliser l'équation de Clausius-Mossoti (6.24) :

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) \quad (12.38)$$

La différentielle de cette équation donne

$$\left[\frac{1}{\varepsilon + 2} - \frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)^2} \right] d\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \frac{d\rho e^2}{m} \Gamma(\omega) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (12.39)$$

d'où on tire que

$$d\varepsilon = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3\rho} d\rho \quad (12.40)$$

ou, appliqué à une cellule, en fonction d'une variation $\delta \rho_j$ de sa densité :

$$\delta \varepsilon_j = \frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \delta \rho_j \quad (12.41)$$

La section efficace de diffusion est donnée par l'expression (12.29), avec la transformée de Fourier

$$\delta\tilde{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \sum_j v \delta\rho_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (12.42)$$

où \mathbf{r}_j est la position de la cellule j . Le module carré de cette transformée est

$$\begin{aligned} |\delta\tilde{\varepsilon}(\mathbf{q})|^2 &= \left(\frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \right)^2 \sum_{i,j} v^2 \delta\rho_i \delta\rho_j e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \\ &= \left(\frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \right)^2 v \sum_n v \langle \delta\rho_0 \delta\rho_n \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \\ &= \left(\frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \right)^2 v \int d^3r \langle \delta\rho(0) \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \left(\frac{(\bar{\varepsilon} - 1)(\bar{\varepsilon} + 2)}{3\rho} \right)^2 v \Gamma(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (12.43)$$

où $\Gamma(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de la densité :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{q}) &= \int d^3r \langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle_c e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ \langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle_c &= \langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle - \langle \rho(0) \rangle \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle \delta\rho(0) \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle \end{aligned} \quad (12.44)$$

La fonction de corrélation $\langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle_c$ diminue généralement avec la distance de façon exponentielle, avec une longueur caractéristique appelée *longueur de corrélation* et notée ξ :

$$\langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle_c \sim \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|}{\xi}\right) \quad (12.45)$$

Typiquement, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation prend la forme suivante, dite de Ornstein-Zernicke :

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \frac{A}{q^2 + \xi^{-2}} \quad (12.46)$$

où A est une constante.

Supposons ici que la longueur de corrélation est plus petite que la longueur d'onde de la lumière ($\xi \ll \lambda$). On peut alors négliger l'exponentielle complexe dans (12.44) et la remplacer par l'unité. La fonction de corrélation devient alors

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{q}) \sim \Gamma(0) &= \int d^3r \langle \rho(0) \rho(\mathbf{r}) \rangle_c \\ &= \langle \rho(0) N \rangle_c \\ &= \frac{1}{V} (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2) \\ &= \frac{\Delta N_V^2}{V} \end{aligned} \quad (12.47)$$

où ΔN^2 est la variance du nombre de particules dans le volume V . On montre en mécanique statistique que la variance ΔN_V^2 est reliée à la compressibilité isotherme κ du milieu :

$$\frac{\Delta N_V^2}{\rho V} = \rho k_B T \kappa \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (12.48)$$

D'autre part, $\Gamma(0)$ est aussi égal à $A\xi^2$ dans la forme d'Ornstein-Zernicke, ce qui permet d'écrire cette dernière comme

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \frac{\xi^{-2}}{q^2 + \xi^{-2}} \rho^2 k_B T \kappa \quad (12.49)$$

qui doit être combiné à l'expression suivante de la section différentielle de diffusion :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \left(\frac{k^2(\bar{\epsilon} - 1)(\bar{\epsilon} + 2)}{12\pi\bar{\epsilon}\rho} \right)^2 V\Gamma(\mathbf{q}) \quad (12.50)$$

Dans le cas $q\xi \ll 1$, on trouve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \left(\frac{k^2(\bar{\epsilon} - 1)(\bar{\epsilon} + 2)}{12\pi\rho\bar{\epsilon}} \right)^2 \rho^2 V k_B T \kappa \quad (12.51)$$

En intégrant sur les angles et en sommant sur les polarisations, on trouve

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \left(\frac{(\bar{\epsilon} - 1)(\bar{\epsilon} + 2)}{3\bar{\epsilon}} \right)^2 V k_B T \kappa \quad (12.52)$$

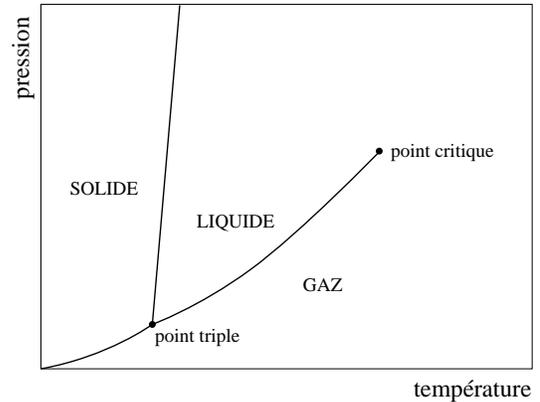
La quantité d'intérêt est ici le coefficient d'atténuation α . Il faut cependant se poser la question suivante : quelle est la densité des diffuseurs ? Il ne s'agit pas ici de la densité ρ des particules, car ce ne sont pas les particules qui diffusent la lumière, mais les fluctuations de densité. On doit plutôt considérer qu'il n'y a qu'un seul diffuseur dans tout le système, c.-à-d. le système lui-même, et que la densité appropriée est simplement $1/V$. Le coefficient d'atténuation est donc

$$\alpha = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \left(\frac{(\bar{\epsilon} - 1)(\bar{\epsilon} + 2)}{3\bar{\epsilon}} \right)^2 k_B T \kappa \quad (12.53)$$

C'est la formule d'Einstein-Smoluchowski. On retrouve la diffusion Rayleigh dans le cas d'un gaz dilué ($\rho k_B T \kappa = 1$ et $\bar{\epsilon} - 1 \ll 1$). Lorsqu'on approche d'un point critique dans les transitions liquide-gaz, la compressibilité devient infinie et le coefficient d'atténuation diverge : c'est ce qu'on appelle l'*opalescence critique*. Il faut cependant noter que cette formule ne s'applique pas si on s'approche trop du point critique, car la longueur de corrélation ξ diverge à l'approche de ce point et l'approximation $\xi \ll \lambda$ n'est plus valable. Il faut alors avoir recours à la formule plus complète (12.50).

FIGURE 12.2

Diagramme de phase typique d'un fluide. On peut passer de manière continue de la phase liquide à la phase gazeuse si on contourne le point critique. Quand on s'approche du point critique, la longueur de corrélation augmente indéfiniment.



Problèmes

Problème 12.1

Nous allons étudier dans ce problème la diffusion des ondes électromagnétiques par une sphère parfaitement conductrice de rayon a , dans deux cas limites : $a \gg \lambda$ et $a \ll \lambda$.

A Dans le premier cas ($a \gg \lambda$), la sphère agit comme un miroir parfait et on peut utiliser l'optique géométrique pour calculer la section différentielle de diffusion, comme si la lumière était composée de particules ponctuelles obéissant à une loi de réflexion spéculaire sur la surface de la sphère. Démontrez que, dans ce cas,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}a^2 \quad (12.54)$$

C'est-à-dire une constante indépendante des angles. Le résultat correspondant pour la section efficace σ est-il évident ?

Indice : Placez la sphère à l'origine et supposez que le faisceau est dirigé selon l'axe des z . Considérez comment une particule incidente à une distance $b < a$ de l'axe des z est déviée par la sphère et quelle proportion des particules est déviée vers un angle polaire θ , en supposant que le flux de particules incidentes est uniformément distribué dans le plan xy .

B Dans le deuxième cas ($a \ll \lambda$), on doit travailler un peu plus. On doit premièrement se rappeler^a qu'une sphère conductrice soumise à un champ électrique uniforme \mathbf{E} se voit induire un moment dipolaire électrique $\mathbf{d} = a^3\mathbf{E}$. De plus, un champ magnétique uniforme \mathbf{B} induit un moment magnétique $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}a^3\mathbf{B}$ dans une sphère parfaitement diamagnétique (supraconductrice). Les champs d'une onde plane de longueur d'onde $\lambda \gg a$ varient suffisamment lentement dans l'espace pour qu'on puisse les considérer comme uniformes à l'intérieur de la sphère et varient suffisamment rapidement dans le temps pour que les courants de Foucault ne se dissipent pas et écrantent le champ magnétique complètement, de sorte que les dipôles induits cités plus haut

peuvent être utilisés. Calculez la section différentielle de diffusion à partir des résultats connus sur le rayonnement dipolaire électrique et dipolaire magnétique. Calculez ensuite la section efficace.

Indice : n'oubliez pas qu'il faut faire la superposition cohérente des amplitudes des rayonnements dipolaires électrique et magnétique et que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} de l'onde ne sont pas dans la même direction. La section efficace est donnée par $\sigma = \frac{10}{3} \pi a^2 (ka)^4$.

a. Voir les notes de cours de PHQ-420, page 24 et page 67 (Problème 2.7).

Problème 12.2

La diffraction par une ouverture petite en comparaison de la longueur d'onde peut être traitée dans l'approximation dipolaire. À partir de la formule de Kirchhoff-Smythe (11.12), démontrez que la diffraction par une petite ouverture de forme quelconque pratiquée dans un écran plan (à $z = 0$) peut être attribuée à la superposition de rayonnements dipolaire électrique et dipolaire magnétique, dont les moments \mathbf{d} et \mathbf{m} sont donnés par

$$\mathbf{d} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{z} \int_{\text{ouv.}} da' \mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2\pi i k} \int_{\text{ouv.}} da' \mathbf{z} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (12.55)$$

Indice : placez-vous dans la zone de rayonnement et développez l'exponentielle de la formule (11.25) en ne conservant que les deux premiers termes. Des intégrations par partie sont nécessaires pour la partie dipolaire électrique et on doit supposer que $\mathbf{z} \wedge \mathbf{E} = 0$ sur la périphérie de l'ouverture (pourquoi?).

Problème 12.3

Considérez la diffusion de la lumière sur un réseau cristallin cubique comportant N_1 plans dans la direction x , N_2 dans la direction y et N_3 dans la direction z .

Montrez que le facteur de forme $F(\mathbf{q})$ est tel que :

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N_1q_x a)}{\sin^2(\frac{1}{2}q_x a)} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N_2q_y a)}{\sin^2(\frac{1}{2}q_y a)} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N_3q_z a)}{\sin^2(\frac{1}{2}q_z a)} \quad (12.56)$$

où a est le pas de réseau. Interprétez ce résultat dans la limite thermodynamique ($N_i \rightarrow \infty$).

Problème 12.4

On s'intéresse ici à la diffusion d'une onde plane par une sphère diélectrique de rayon a . La constante diélectrique à l'intérieur de la sphère est la même partout et peu différente de celle du milieu environnant, de sorte que $\delta\epsilon$ est petit.

A Démontrez que la section différentielle de diffusion non polarisée est

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}(ka)^4 a^2 \frac{\delta \varepsilon^2}{\bar{\varepsilon}^2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{(-qa \cos(qa) + \sin(qa))^2}{(qa)^6} \quad (12.57)$$

où $q = |\mathbf{q}| = |\mathbf{k} - k\mathbf{z}|$ est la grandeur du transfert de vecteur d'onde et θ est l'angle polaire, égal ici à l'angle de diffusion.

B Placez-vous dans la limite des grandes longueurs d'onde ($ka \ll 1$) et calculez la section efficace. Comment auriez-vous pu la calculer sans partir du résultat de **A**?

C Placez-vous dans la limite des petites longueurs d'onde ($ka \gg 1$) et montrez que $d\sigma/d\Omega$ est dominé par les petits angles de diffusion θ . Montrez ensuite que la section efficace, dans cette limite, est proportionnelle à ω^2 et non à ω^4 , comme dans l'autre limite.

CHAPITRE 13

Rayonnement par des charges ponctuelles

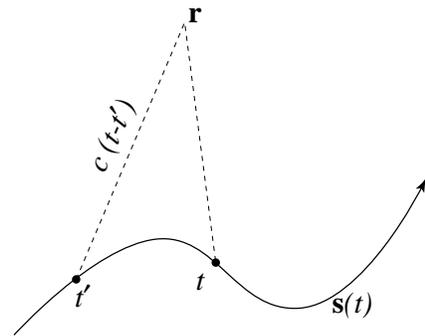
Dans cette section nous nous intéressons au rayonnement produit par une charge ponctuelle accélérée. Nous allons premièrement calculer les champs électrique et magnétique produits par cette charge. Nous discuterons ensuite de cas particuliers : particule en mouvement uniforme, en accélération linéaire, en accélération circulaire.

A Champs produits par une charge en mouvement

Considérons une charge e en mouvement quelconque, dont la position en fonction du temps est une fonction $\mathbf{s}(t)$ (nous la désignons par \mathbf{s} pour éviter toute confusion entre cette fonction et la coordonnée \mathbf{r} du point d'observation). Le problème est ici de calculer les champs électrique et magnétique produits par cette charge en mouvement.

FIGURE 13.1

Charge en mouvement quelconque et effet du retard : le signal reçu par un observateur en \mathbf{r} au temps t a été émis alors que la particule chargée était au point $\mathbf{s}(t')$.



Pour effectuer ce calcul, on peut utiliser l'expression générale des potentiels retardés (2.28). Les densités de charge et de courant correspondantes sont

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e\dot{\mathbf{s}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) \quad (13.1)$$

Les potentiels produits par ce mouvement sont

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= e \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{c} \int d^3 r' \frac{\dot{\mathbf{s}}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))\end{aligned}\quad (13.2)$$

En pratique, il est préférable d'insérer une fonction delta supplémentaire et d'écrire les potentiels comme

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' dt' \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t' - R/c) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t')) \\ &= \int dt' \frac{e}{R} \delta(t - t' - R/c) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' dt' \frac{e \dot{\mathbf{s}}(t')}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t' - R/c) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t')) \\ &= \int dt' \frac{e}{R} \boldsymbol{\beta}(t') \delta(t - t' - R/c)\end{aligned}\quad (13.3)$$

où nous avons défini

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{s}(t') \quad R = |\mathbf{R}| \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c}\quad (13.4)$$

Pour obtenir les champs, il suffit ensuite d'appliquer les relations

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}\quad (13.5)$$

Donnons d'abord le résultat de ce calcul :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= e \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\text{ret.}} + \frac{e}{c^2} \left[\frac{\mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \mathbf{a})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret.}} \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}]_{\text{ret.}}\end{aligned}\quad (13.6)$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ et où la notation $[\dots]_{\text{ret.}}$ signifie que l'argument est évalué au temps retardé t' défini par l'équation implicite

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')| = t - \frac{R}{c}\quad (13.7)$$

Remarques :

- ◆ Dans la limite non relativiste ($\boldsymbol{\beta} \sim 0$, $\mathbf{a}/c \sim 0$) on obtient $\mathbf{E} = e\mathbf{n}/R^2$ et $\mathbf{B} = 0$.
- ◆ en fonction de la distance de la source, on note des termes qui décroissent comme $1/R^2$ et d'autres comme $1/R$. Seuls les termes en $1/R$ contribuent au rayonnement, car leur contribution au vecteur de Poynting décroît comme $1/R^2$. Ces termes impliquent l'accélération de la particule. On en conclut que seule une particule accélérée peut émettre un rayonnement.

Détails du calcul

Démontrer explicitement l'expression (13.6) à partir des expressions (13.3) est relativement simple, mais fastidieux. Dans le but de mener à bien le calcul des dérivées, signalons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{R}) &= \frac{\partial f}{\partial R} \mathbf{n} & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \nabla \wedge (f(\mathbf{R})\boldsymbol{\beta}) &= \nabla f \wedge \boldsymbol{\beta}\end{aligned}\tag{13.8}$$

Commençons par calculer le champ électrique. On trouve

$$\begin{aligned}-\nabla\Phi &= -e \int dt' \left\{ -\frac{1}{R^2} \delta(t-t'-R/c) - \frac{1}{cR} \delta'(t-t'-R/c) \right\} \mathbf{n} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{e}{c} \int dt' \frac{1}{R} \boldsymbol{\beta} \delta'(t-t'-R/c)\end{aligned}\tag{13.9}$$

L'intégration des fonctions delta se fait plus facilement en procédant à un changement de variables : on définit $u = t - t' - R/c$ et

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left(t - t' - \frac{R}{c} \right) \\ &= -1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \\ &= -1 - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{R}}{dt'} \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{R}} \\ &= -1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}\end{aligned}\tag{13.10}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= e \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R^2} \delta(u) + \frac{1}{cR} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \delta'(u) \right\} \\ &= \left[\frac{e\mathbf{n}}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} - e \frac{d}{du} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) \right]_{\text{ret.}} \\ &= \left[\frac{e\mathbf{n}}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} + \frac{e}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) \right]_{\text{ret.}}\end{aligned}\tag{13.11}$$

où nous avons intégré par parties pour éliminer la dérivée de la fonction delta. Notons que $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}$ est toujours positif, car $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur de longueur inférieure à un. Après l'intégration par parties, l'intégrant est simplement évalué à $u = 0$, c'est-à-dire au temps retardé.

Pour continuer, nous avons besoin des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R^2} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} &= \frac{1}{R} (\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}) \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{c^2} \mathbf{a}\end{aligned}\tag{13.12}$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} = \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \left\{ \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{c^2} - \frac{\beta^2}{R} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2}{R} \right\}$$

On calcule ensuite la dérivée suivante :

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) = \frac{1}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \left((\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(2 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2) - \beta^2\mathbf{n} \right) + \frac{\mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \mathbf{a})}{Rc^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (13.13)$$

En combinant tous les termes correctement, on trouve le résultat annoncé (13.6).

Le champ magnétique se calcule de manière analogue :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e \int dt' [\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}(t')] \left\{ -\frac{1}{R^2} \delta(t - t' - R/c) - \frac{1}{cR} \delta'(t - t' - R/c) \right\} \quad (13.14)$$

Après le changement de variable de t' à u , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -e \int du [\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}(t')] \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \left\{ \frac{1}{R^2} \delta(u) + \frac{1}{cR} \delta'(u) \right\} \\ &= -e \left[\left(\frac{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) - \frac{d}{du} \left(\frac{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) \right]_{\text{ret.}} \\ &= -e \left[\left(\frac{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) + \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) \right]_{\text{ret.}} \end{aligned} \quad (13.15)$$

En combinant toutes ces expressions à l'aide des dérivées (13.12), nous arrivons à l'expression finale suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{n}}{\gamma^2 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{1}{Rc^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \left\{ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{n}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \right\} \right]_{\text{ret.}} \quad (13.16)$$

On constate que $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}]_{\text{ret.}}$, comme annoncé plus haut.

B Charge en mouvement uniforme

Supposons ici que $\mathbf{a} = 0$. Le champ électrique est alors donné par (13.6) :

$$\mathbf{E} = e \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\text{ret.}} = e \frac{(\mathbf{R}_0 - R_0 \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2 (R_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0)^3} \quad (13.17)$$

où $\mathbf{R}_0 = [\mathbf{R}]_{\text{ret.}}$. Exprimons ce résultat non pas en fonction du temps retardé t' , mais du temps présent t . En raison du mouvement uniforme, on a $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \boldsymbol{\beta} c(t - t')$. Puisque $R_0 = c(t - t')$, ceci s'écrit

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - R_0 \boldsymbol{\beta} \quad (13.18)$$

ce qui démontre immédiatement que le champ électrique est radial en fonction de la position de la particule au temps présent :

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{R}}{\gamma^2 (R_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0)^3} \quad (13.19)$$

Reste à exprimer le dénominateur en fonction de \mathbf{R} . En mettant ce dernier au carré, on trouve

$$R^2 = R_0^2 (1 + \beta^2) - 2R_0 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0) \quad (13.20)$$

Puisque $\mathbf{R}_0 \wedge \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R} \wedge \boldsymbol{\beta}$, on a $(\mathbf{R}_0 \wedge \boldsymbol{\beta})^2 = (\mathbf{R} \wedge \boldsymbol{\beta})^2$, ou

$$R_0^2 \beta^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0)^2 = R^2 \beta^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2 \quad (13.21)$$

En soustrayant cette équation de la précédente, on conclut que

$$R_0^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_0)^2 = R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \quad (13.22)$$

où θ est l'angle séparant $\boldsymbol{\beta}$ de \mathbf{R} . Le champ électrique est alors

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{n}(1 - \beta^2)}{R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (13.23)$$

Le plus étonnant dans ce résultat est que le champ électrique est dans la direction radiale instantanée, et non retardée. On retrouve le résultat statique dans la limite non relativiste ($\beta \rightarrow 0$). Autrement, le champ est renforcé dans la direction perpendiculaire à la vitesse, et diminué dans la direction parallèle. Dans la limite ultra-relativiste, la distribution angulaire du champ affecte la forme d'une crêpe. Bien sûr, comme le champ décroît comme $1/R^2$, aucun rayonnement n'est émis, ce qui est naturel puisque la charge n'est pas accélérée.

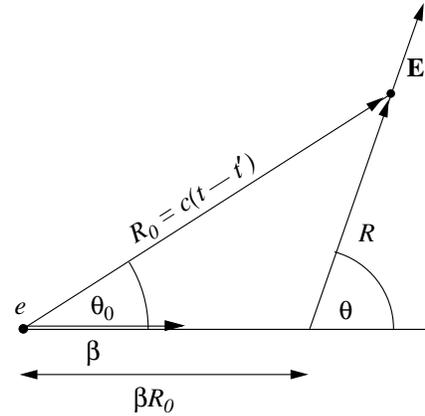
Le champ magnétique est, quant à lui,

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E} \quad \text{où} \quad \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \frac{R}{R_0} \quad (13.24)$$

Donc, dans ce cas précis,

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E} \quad (13.25)$$

FIGURE 13.2
Charge en mouvement uniforme et effet du retard.



C Rayonnement non relativiste

Examinons maintenant le rayonnement émis par une particule accélérée se déplaçant à des vitesses faibles par rapport à c . En négligeant β et le retard, la formule (13.6) devient

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2} \frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{a})}{R} + \frac{e}{R^2} \mathbf{n} \quad (13.26)$$

Soit \mathbf{E}_a la partie de \mathbf{E} qui dépend de l'accélération et décroît comme $1/R$ (idem pour \mathbf{B}). Comme \mathbf{E}_a est perpendiculaire à \mathbf{n} et que $\mathbf{B}_a = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_a$, le rayonnement émis est transverse et le vecteur de Poynting (dans la limite $R \rightarrow \infty$) est

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_a \wedge \mathbf{B}_a) = \frac{cE_a^2}{4\pi} \mathbf{n} \quad (13.27)$$

Si θ est l'angle que fait \mathbf{n} avec \mathbf{a} , on a $E_a = ea \sin \theta / Rc^2$ et donc

$$\mathbf{S} = \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 R^2} \mathbf{n} \quad (13.28)$$

Le flux d'énergie par angle solide est donc donné par

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} \quad (13.29)$$

La puissance rayonnée totale se trouve en intégrant sur $d\Omega$:

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (13.30)$$

Ceci est la *formule de Larmor* pour la puissance du rayonnement émis par une particule non relativiste accélérée. Notons que le rayonnement émis est de même nature que celui émis par un dipôle électrique oscillant dans la direction de \mathbf{a} , sauf qu'ici il s'agit d'un rayonnement instantané et non d'un rayonnement monochromatique.

D Cas où la vitesse est parallèle à l'accélération

Dans ce cas le champ électrique contribuant au rayonnement est

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c^2} \left[\frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{a})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret.}} \quad (13.31)$$

La différence d'avec le cas précédent est la présence du facteur $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 1 - \beta \cos \theta$, où θ est l'angle que fait \mathbf{R} avec la vitesse. Le calcul ci-haut peut être répété et on obtient

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^6} \frac{dt}{dt'} \quad (13.32)$$

Le facteur dt/dt' provient du fait qu'on s'intéresse ici à la dépendance angulaire du rayonnement *émis* et non du rayonnement *reçu*; c'est pourquoi on calcule l'énergie perdue en rayonnement par unité de temps d'émission. C'est uniquement en considérant cette quantité que la puissance totale émise P a un sens. On calcule facilement que

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 1 - \beta \cos \theta \quad (13.33)$$

On obtient donc

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (13.34)$$

L'intégration de ce résultat sur les angles donne

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^6 \quad (13.35)$$

Il est remarquable que cette puissance devient infinie si la vitesse de la particule atteint c , la vitesse de la lumière. Il s'agit d'une démonstration physique et indirecte du fait qu'on ne peut pas accélérer une particule chargée à une vitesse égale ou supérieure à c : une puissance infinie serait requise et un rayonnement infini en découlerait.

Le cas non relativiste est évidemment retrouvé quand $\beta \rightarrow 0$. La différence est un accroissement du rayonnement quand $\beta \rightarrow 1$, en particulier dans la direction de la vitesse.

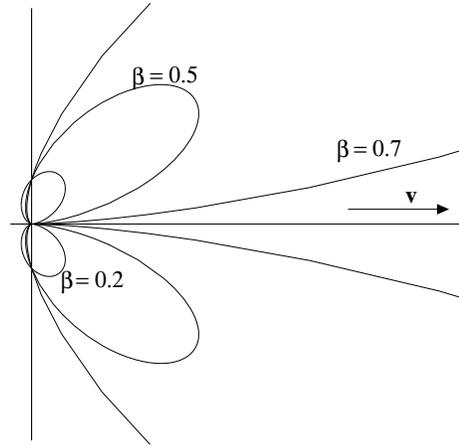
Dans le cas d'une particule très relativiste ($\gamma \gg 1$), on montre facilement que l'angle θ_{max} pour lequel le rayonnement est maximum est $\theta_{\text{max}} = 1/2\gamma$. Plus la vitesse de la particule se rapproche de c , plus le rayonnement est dirigé vers l'avant. En effet, en posant $u = \cos \theta$, la dérivée du patron de rayonnement par rapport à u est

$$\frac{d}{du} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{-2u(1 - \beta u) + 5\beta(1 - u^2)}{(1 - \beta u)^6} \quad (13.36)$$

Cette dérivée s'annule au maximum directionnel du rayonnement, soit à une valeur de u telle que

$$\beta = \frac{2u}{5 - 3u^2} \quad (13.37)$$

FIGURE 13.3
 Patron de rayonnement dans le cas d'une accélération parallèle
 à la vitesse, pour $\beta = 0.2$, $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.7$.



Dans le cas ultra-relativiste, l'angle θ est petit et β est très proche de l'unité. On peut alors procéder à l'approximation suivante :

$$u \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (13.38)$$

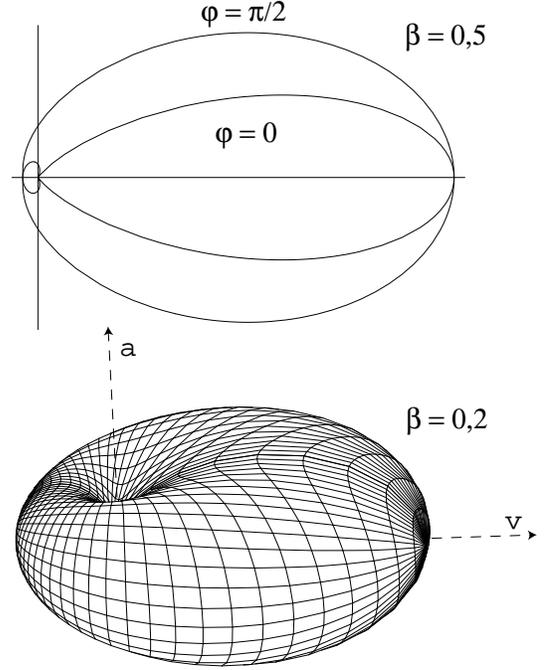
En substituant dans la condition (13.37), on trouve

$$1 - \frac{1}{2\gamma^2} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\theta^2}{1 + \frac{3}{2}\theta^2} \approx 1 - 2\theta^2 \quad (13.39)$$

ce qui mène effectivement à la relation $\theta \approx 1/(2\gamma)$.

FIGURE 13.4

Patron de rayonnement dans le cas d'une orbite circulaire ($\beta = 0.5$). Le graphique du haut représente deux coupes, à $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$ et pour $\beta = 0,5$. Le graphique du bas est une vue tridimensionnelle de la dépendance angulaire du rayonnement, pour $\beta = 0,2$. Le rayonnement est principalement dirigé dans le plan perpendiculaire à l'accélération et vers l'avant.



E Cas d'une orbite circulaire

Considérons une particule chargée en orbite circulaire uniforme avec pulsation ω . Dans ce cas \mathbf{a} et $\boldsymbol{\beta}$ sont perpendiculaires. Plaçons l'origine à la position instantanée de la particule, le plan de l'orbite parallèle à xz et la vitesse instantanée selon z . L'accélération est alors $\mathbf{a} = a\mathbf{x}$, soit φ l'angle que fait la projection du rayon vecteur \mathbf{R} sur le plan xy avec l'axe des x . Définissons le vecteur $\mathbf{b} = \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}$. Le champ électrique provenant de l'accélération est alors

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c^2} \left[\frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret.}} \quad (13.40)$$

Ce qui nous intéresse ici est la dépendance angulaire de la puissance rayonnée. Celle-ci est proportionnelle à E_a^2 . Pour calculer cette quantité nous avons besoin de

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) &= \mathbf{b}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{b}a \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{a}(1 - \beta \cos \theta) \end{aligned} \quad (13.41)$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})|^2 &= b^2 a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a \sin \theta \cos \varphi (1 - \beta \cos \theta) \\ &= (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta) a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi (1 - \beta \cos \theta) \\ &= a^2 [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] \end{aligned} \quad (13.42)$$

Chapitre 13. Rayonnement par des charges ponctuelles

On peut dès lors répéter le même calcul que ci-haut pour trouver que

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (13.43)$$

Le patron de rayonnement comporte alors deux lobes, dont le lobe frontal est le plus important, sauf si $\beta = 0$. Dans le plan $\varphi = 0$, l'expression se simplifie comme suit :

$$(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 2\beta \cos \theta + \beta^2 = (\cos \theta - \beta)^2 \quad (13.44)$$

et donc

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{(\beta - \cos \theta)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (\varphi = 0) \quad (13.45)$$

Le rayonnement s'annule donc dans la direction $\varphi = 0$ et $\theta = \theta_c$, où $\cos \theta_c = \beta$. Dans le cas d'une particule ultra-relativiste ($\gamma \gg 1$), l'essentiel du rayonnement est alors contenu dans un cône d'angle $\theta_c = \arccos \beta$, en raison du dénominateur en $(1 - \beta \cos \theta)^5$. Dans ce cas, $\beta \sim 1$ et donc l'angle d'annulation θ_c est très petit et alors $\cos \theta_c \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_c^2$. D'autre part,

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \implies \frac{1}{\gamma^2} = (1 - \beta)(1 + \beta) \approx 2(1 - \beta) \quad (13.46)$$

et donc

$$\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (13.47)$$

d'où le fait que $\theta_c \approx 1/\gamma$: le rayonnement est en gros contenu dans un cône étroit de largeur angulaire $1/\gamma$.

La puissance rayonnée totale se calcule facilement :

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4 = \frac{2e^2 r^2 \omega^4}{3c^3} \gamma^4 \quad (13.48)$$

où r est le rayon du cercle et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Enfin, signalons que pour une vitesse et une accélération qui ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires, la formule de Larmor pour la puissance rayonnée totale prend la forme suivante :

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 [\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{a})^2] \quad (13.49)$$

Cette formule se démontre facilement par un argument d'invariance de Lorentz (voir section 14.C.1).

F Rayonnement synchrotron

Le rayonnement émis par une particule en orbite circulaire est qualifié de *rayonnement synchrotron*. Un synchrotron est une machine très complexe faite d'un assemblage d'électro-aimants en série avec des cavités électromagnétiques, dont la fonction est d'accélérer des particules chargées (électrons, protons et leurs antiparticules) à des vitesses très proches de c , sur des orbites quasi circulaires. Étant donné que l'énergie cinétique d'une particule relativiste est $mc^2\gamma$, la valeur de γ à une énergie donnée sera ~ 2000 fois plus grande pour un électron que pour un proton. La puissance rayonnée par l'électron sera alors environ 10^{13} fois plus grande que pour un proton. Dans les faits, la puissance rayonnée constitue la majeure partie du coût énergétique d'opération d'un gros accélérateur d'électrons. Le rayonnement produit est toutefois très utile pour ses applications à la physique des matériaux et la physique médicale : des machines spéciales sont même construites à cette seule fin. Par contre, le rayonnement synchrotron produit par un accélérateur de protons est si faible qu'il n'a jamais été détecté.

Le spectre en fréquences du rayonnement synchrotron peut être étudié. Si le mouvement circulaire de l'électron est non relativiste, alors on s'attend naturellement à ce que le rayonnement émis soit à la fréquence de révolution ω_0 de l'électron sur son orbite. Avec un appareil de quelques centaines de mètres de diamètre, ce rayonnement ne pourrait que produire des ondes radio. Or, on produit des rayons X avec un tel appareil. Il faut donc expliquer ce paradoxe apparent. La clé de sa résolution réside dans l'effet Doppler et dans la grande directivité du rayonnement dans le régime ultra-relativiste. On sait que le rayonnement émis par l'électron est dirigé principalement vers l'avant, à un angle $\theta_c \sim 1/\gamma$. Pour un observateur situé à proximité du synchrotron, l'électron émet une courte impulsion de rayonnement à chaque tour, un peu comme une voiture roulant à grande vitesse sur un circuit circulaire et dont les phares sont très directionnels, d'où l'expression «effet phare». Si la durée de cette impulsion est de l'ordre de $\Delta\tau$, alors la densité spectrale correspondante diminuera rapidement au-delà de $\omega_c \sim 1/\Delta\tau$. Étant donné l'angle restreint de rayonnement vers l'avant, le rayonnement ne sera émis vers l'observateur que sur une distance $d \sim r\theta_c \sim r/\gamma$ parcourue par l'électron. Le temps Δt que dure cette émission de rayonnement est

$$\Delta t \sim \frac{r}{\gamma v} \quad (13.50)$$

($v = \beta c$ est la vitesse de l'électron). Cependant, il ne s'agit pas là de la durée de l'impulsion reçue par l'observateur, car la queue de l'impulsion a été émise alors que l'électron était plus proche de l'observateur que la tête de l'impulsion (effet Doppler). La longueur réelle de l'impulsion (dans l'espace) est plutôt

$$L = (c - v)\Delta t = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \frac{r}{\gamma} \sim \frac{r}{2\gamma^3} \quad (13.51)$$

de sorte que la durée réelle de l'impulsion est

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \sim \frac{r}{c\gamma^3} = \frac{1}{\omega_0\gamma^3} \quad (13.52)$$

La fréquence maximale ω_c du rayonnement synchrotron est donc

$$\omega_c \sim \omega_0\gamma^3 = \omega_0 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \quad (13.53)$$

où E est l'énergie de l'électron. Il s'agit en fait d'une fréquence près de laquelle le spectre de puissance $dI/d\omega$ sera maximum. Pour une machine de 10 GeV et un rayon d'une centaine de mètres, on obtient facilement des rayons X de l'ordre de 10 keV.

Outre son application pratique à la production de rayons X, le rayonnement synchrotron est aussi un phénomène naturel important en astrophysique, quoique dans un domaine de fréquences moins élevées. Des particules chargées en orbite circulaire (ou hélicoïdale) autour des lignes du champ magnétique produit par une étoile émettent un rayonnement radio ; ce rayonnement est détectable par les radiotélescopes terrestres. Dans le cas d'un objet plus vaste comme la nébuleuse du Crabe, ce rayonnement s'étire jusque dans le domaine optique et on peut en observer la polarisation et de là déduire l'orientation approximative du champ magnétique dans la nébuleuse. Enfin, si l'astre produisant le champ magnétique est en rotation rapide sur lui-même et que l'axe magnétique ne correspond pas à l'axe de rotation, le rayonnement synchrotron est masqué par une partie de l'astre une fois par période. Chez certains objets appelés *pulsars*, cette variation d'intensité est extrêmement marquée et rapide (les périodes observées vont de 8 s à 1,5 ms). On croit que les pulsars sont des étoiles à neutrons, très compactes (un rayon d'environ 10 km) et animées d'un mouvement de rotation extrêmement rapide.

Caractère négligeable du rayonnement produit par un accélérateur linéaire

Cependant, le rayonnement émis par une particule en accélération linéaire est si faible qu'il n'a jamais été observé. Il est facile de comprendre pourquoi par un calcul simple : en fonction de l'énergie E de la particule accélérée linéairement dans la direction x , la force s'exprime comme $f = dE/dx$. Le rapport de la puissance rayonnée à la puissance donnée à la particule par la force accélératrice (dE/dt) est

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \frac{1}{\frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt}} \quad (13.54)$$

Dans le cas d'une particule très relativiste ($dx/dt \sim c$), ceci devient

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{2e^2}{3m^2c^4} \frac{dE}{dx} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{mc^2} \frac{dE}{dx} \quad (13.55)$$

où r_0 est le rayon classique de l'électron. Pour que le rayonnement soit important, il faudrait que la puissance rayonnée soit du même ordre que la puissance donnée à la particule, ce qui implique

$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{mc^2}{r_0} \quad (13.56)$$

Autrement dit, il faudrait que l'énergie donnée à la particule sur une distance très courte (le rayon classique de l'électron) soit de l'ordre de son énergie de masse, soit environ 10^{14} MeV/m ! En pratique, le plus gros accélérateur linéaire produit plutôt 15 MeV/m...

Problèmes

Problème 13.1

Dans un modèle naïf de l'atome d'hydrogène, l'électron est en orbite circulaire autour du proton. On sait cependant que le rayonnement de cet électron accéléré lui fait perdre de l'énergie et qu'il devrait donc s'effondrer sur le proton à un moment donné. Si le rayon de cette orbite est a_0 (le rayon de Bohr) au temps $t = 0$, calculez l'instant t_0 où l'électron tombe sur le noyau, en faisant l'approximation que la vitesse de l'électron est toujours petite par rapport à c et que sa trajectoire est toujours approximativement circulaire.

Réponse : $t_0 = \frac{1}{4}a_0/c\alpha^4$, où $\alpha \approx 1/137$ est la constante de structure fine. Notez que ceci est en fait un bon ordre de grandeur pour l'émission spontanée, c'est-à-dire le temps de vie d'un état excité de l'atome d'hydrogène.

Problème 13.2

Un électron non relativiste est en orbite circulaire de rayon R à une fréquence ω (c.-à-d. une période $2\pi/\omega$) dans le plan xy . On suppose que $R \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde du rayonnement émis.

A Montrez qu'on peut caractériser ce mouvement par un moment dipolaire $\mathbf{d} e^{-i\omega t}$ d'amplitude complexe

$$\mathbf{d} = eR(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \quad (13.57)$$

B Montrez que le patron de rayonnement est

$$dP/d\Omega = \frac{e^2 R^2 \omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) \quad (13.58)$$

C Calculez la puissance rayonnée totale P et montrez que le résultat coïncide avec celui obtenu à l'aide de la formule de Larmor non relativiste.

Problème 13.3

Une particule relativiste de masse m et de charge e est en orbite circulaire dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} .

A Exprimez la puissance rayonnée totale en fonction de B .

B Montrez que l'énergie $E(t)$ de la particule en fonction du temps est

$$\frac{E(t)}{mc^2} = \frac{E_0 + mc^2 + (E_0 - mc^2) e^{-2t/\tau}}{E_0 + mc^2 - (E_0 - mc^2) e^{-2t/\tau}} \quad \tau = \frac{3m^3 c^5}{2e^4 B^2} \quad (13.59)$$

C Montrez que, dans le cas non relativiste, la vitesse de la particule diminue exponentiellement, avec un temps caractéristique τ tel que défini en **(B)**.

CHAPITRE 14

Formulation relativiste

Les lois de l'électromagnétisme respectent l'invariance de Lorentz, de sorte que les résultats obtenus dans les chapitres précédents et qui s'appliquent au vide (c'est-à-dire en l'absence de milieu macroscopique de propagation) sont tous compatibles avec les principes de la relativité restreinte. Cependant, nous ne l'avons pas encore démontré. Le but de ce chapitre est principalement de formuler les lois de l'électromagnétisme dans un langage expressément relativiste et, en particulier, de voir comment les changements de référentiels affectent les champs électrique et magnétique. Nous supposerons ici une certaine familiarité avec les principes de base de la relativité restreinte, notamment les transformations de Lorentz. Le langage des quadrivecteurs et des tenseurs sera introduit dans la première section, suivi dans la section suivante par une formulation proprement relativiste des équations de Maxwell, par quelques applications et, enfin, par une discussion de la formulation lagrangienne et hamiltonienne des lois de l'électromagnétisme.

A Quadrivecteurs en relativité restreinte

Considérons deux référentiels S et S' , dont les axes cartésiens sont parallèles, se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse V le long de l'axe des x et dont les origines coïncident au temps $t = 0$ (Fig. A). Les coordonnées et le temps des deux référentiels sont reliés par la transformation de Lorentz :

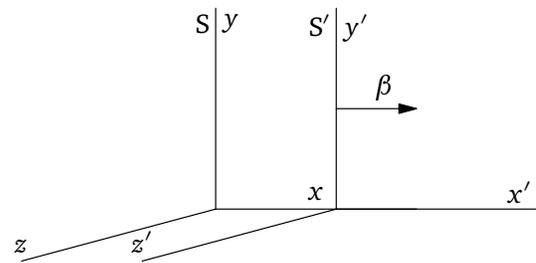
$$x' = \gamma(x - Vt) \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2) \quad y' = y \quad z' = z \quad (14.1)$$

où

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (14.2)$$

FIGURE 14.1

Disposition des axes cartésiens pertinents à la transformation de Lorentz (14.1)



Le temps et l'espace jouent dans la transformation de Lorentz des rôles presque identiques. Dans le but de profiter de cette similitude entre temps et espace, on ajoute aux trois coordonnées x^i ($i = 1, 2, 3$) de l'espace une quatrième coordonnée $x^0 = ct$, représentant le temps. Le facteur de c lui donne la dimension (c.-à-d. les unités) d'une longueur. On note collectivement ces quatre coordonnées par la notation indicielle x^μ , où l'indice grec μ prend les valeurs de 0 à 3, comme tous les indices grecs que nous utiliserons dorénavant.

Lors d'une transformation de Lorentz générale, la coordonnée spatio-temporelle x^μ se transforme comme suit :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (14.3)$$

où $\Lambda^\mu{}_\nu$ est une matrice de transformation. L'indice de gauche numérote les rangées, l'indice de droite les colonnes et les indices répétés sont sommés. Par exemple, pour la transformation (14.1) la matrice de transformation est

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

mais elle serait différente pour un changement de référentiel accompagné d'une rotation des axes, ou suivant un axe quelconque. Si x désigne le vecteur colonne des composantes x^μ , la transformation s'écrit $x' = \Lambda x$ en langage matriciel. Nous allons utiliser un système dans lequel les indices répétés seront toujours situés l'un en bas, l'autre en haut.

Examinons maintenant comment se transforme l'opérateur gradient augmenté de la dérivée par rapport au temps, noté

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (14.5)$$

Exprimé en fonction des nouvelles coordonnées obtenues par transformation de Lorentz, ceci devient

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \quad (14.6)$$

Si d désigne le vecteur rangée des composantes ∂_μ , la transformation ci-dessus s'écrit, en langage matriciel, $d = d'$, ou encore $d' = d^{-1}$, ce qui peut aussi s'écrire

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \quad (14.7)$$

Bien entendu, $^{-1}$ est la matrice de la transformation inverse obtenue simplement en changeant le signe de la vitesse :

$$^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.8)$$

Définition d'un quadrivecteur

Généralement, tout quadruplet de quantités, noté A_μ , se transformant comme les dérivées ∂_μ est qualifié de *quadrivecteur covariant*.¹ Les indices d'un quadrivecteur covariant sont placés en bas. Au contraire, tout quadruplet de quantités, noté B^μ , se transformant comme les coordonnées x^μ est qualifié de *quadrivecteur contravariant*. Les indices d'un quadrivecteur contravariant sont placés en haut. On appelle x^μ le quadrivecteur position, ou la quadri position, alors que ∂_μ est le quadri gradient. Les quadrivecteurs contravariants se transforment à l'aide de la matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$, alors que les quadrivecteurs covariants se transforment à l'aide de la matrice inverse :

$$B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu B^\nu \quad A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu \quad (14.9)$$

En notation matricielle, les quadrivecteurs covariants sont naturellement représentés par des vecteurs rangées, et les quadrivecteurs contravariants par des vecteurs colonnes. Plus subtilement, les quadrivecteurs contravariants appartiennent à l'espace vectoriel des coordonnées cartésiennes, alors que les quadrivecteurs covariants appartiennent à l'espace dual (ce sont des formes linéaires). En notation matricielle, un quadrivecteur contravariant B et un quadrivecteur covariant A se transforment ainsi :

$$B' = B \quad A' = A^{-1} \quad (14.10)$$

Contraction

La *contraction* d'un indice covariant avec un indice contravariant se définit comme une opération par laquelle les deux indices sont identifiés et sommés. Spécifiquement, la contraction d'un vecteur covariant A_μ avec un vecteur contravariant B^μ est le produit $A_\mu B^\mu$, dans lequel μ est sommé de 0 à 3. La quantité résultante est un invariant, comme on peut le constater d'après les lois de transformation ci-haut :

$$\begin{aligned} A'_\mu B'^\mu &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta A_\alpha B^\beta \\ &= \delta^\alpha{}_\beta A_\alpha B^\beta \\ &= A_\alpha B^\alpha \end{aligned} \quad (14.11)$$

1. On écrit parfois *4-vecteur* pour abrégier *quadrivecteur*.

La preuve est encore plus immédiate en langage matriciel :

$$A'B' = A^{-1}B = AB \quad (14.12)$$

Par exemple, l'opérateur différentiel $x^\mu \partial_\mu$ est un invariant, c'est-à-dire que sa forme est la même dans tous les référentiels inertiels.

Au contraire, la contraction de deux indices covariants (ou deux indices contravariants) n'est pas invariante. Autrement dit, l'expression $A_\mu A_\mu$ (on somme sur μ) n'est pas numériquement la même dans tous les référentiels. L'apparition d'une telle expression dans un calcul signifie qu'on y effectue des opérations qui ne sont pas valables dans tous les référentiels et est probablement l'effet d'une erreur !

14.A.1 Tenseurs

Ce sont les propriétés de transformation qui définissent la notion de vecteur. On généralise cette notion à des quantités comportant plus d'un indice, qu'on appelle généralement *tenseurs*. Un quadri-tenseur de rang n est une quantité comportant 4^n composantes spécifiées par n indices grecs allant de 0 à 3. Spécifiquement, un tenseur contravariant de rang 2 est un ensemble de quantités $B^{\mu\nu}$ se transformant comme suit lors d'un changement de référentiel :

$$B'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta B^{\alpha\beta} \quad (14.13)$$

Dans le cas des tenseurs, la notation matricielle utilisée plus haut devient une source potentielle de confusion et doit être utilisée avec soin. La notation indicielle est préférable dans la plupart des calculs. Un tenseur deux fois covariant se noterait plutôt $A_{\mu\nu}$ et se transformerait comme suit :

$$A'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu (\Lambda^{-1})^\beta_\nu A_{\alpha\beta} \quad (14.14)$$

On peut aussi concevoir des tenseurs mixtes, affublés d'un indice covariant et d'un indice contravariant et notés par exemple C^μ_ν . Il faut alors faire bien attention à la position des indices. Un tel tenseur se transformerait comme suit :

$$C'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu C^\alpha_\beta \quad (14.15)$$

La contraction C^α_α est alors un invariant.

Tenseur métrique

L'invariant fondamental en relativité restreinte est l'intervalle, défini comme

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (14.16)$$

ce qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (14.17)$$

où le symbole $g_{\mu\nu}$ est défini comme composante de la matrice suivante :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.18)$$

Par définition, une transformation de Lorentz est une transformation linéaire spécifiée par une matrice telle que l'intervalle s^2 est invariant. Autrement dit,

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \quad (14.19)$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$x^T g x = x'^T g x' \quad (14.20)$$

(l'indice T désigne la transposée). Puisque $x' = x$, on trouve

$$(x)^T g x = x^T g x \implies {}^T g = g \quad (14.21)$$

Cette dernière condition doit être satisfaite par toute transformation de Lorentz. En fait, cette condition, sous forme matricielle, représente un ensemble de 10 conditions indépendantes sur les 16 composantes de la matrice, ce qui laisse 6 paramètres indépendants pour caractériser. Ces six paramètres sont les trois composantes de la vitesse relative des deux référentiels, ainsi que trois angles nécessaires pour orienter le trièdre $x'y'z'$ par rapport au trièdre xyz .

La matrice g est définie de la même manière dans tous les référentiels inertiels. D'autre part, la condition ${}^T g = g$ peut s'inverser comme suit :

$$g = ({}^{-1})^T g^{-1} \quad \text{ou} \quad g_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} \quad (14.22)$$

ce qui signifie, en comparant avec (14.14), que $g_{\mu\nu}$ se comporte comme un tenseur covariant de rang deux. On l'appelle le *tenseur métrique* car il définit l'intervalle en fonction de x^μ et l'intervalle est la mesure naturelle des 'distances' dans l'espace-temps. Le tenseur métrique a ceci de particulier qu'il a exactement la même forme (les mêmes composantes) dans tous les référentiels, même s'il se transforme comme un tenseur.

Désignons par $g^{\mu\nu}$ les composantes de l'inverse de g . Comme g est sa propre inverse, on a simplement $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. On démontre cependant que $g^{\mu\nu}$ se comporte comme un tenseur contravariant de rang 2, n prenant l'inverse de la relation matricielle ci-haut :

$$g^{-1} = g^{-1T} \quad \text{ou} \quad g^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g^{\alpha\beta} \quad (14.23)$$

Le tenseur métrique, dans ses versions covariante ou contravariante, permet de transformer un quadrivecteur contravariant en quadrivecteur covariant, par contraction des indices. Ainsi, la quantité $g_{\mu\alpha} B^\alpha$ est un quadrivecteur covariant, noté B_μ . En notation matricielle on écrit B_μ comme gB et on constate la loi de transformation suivante :

$$\begin{aligned} (gB)' &= gB \\ &= ({}^{-1})^{TT} gB \\ &= ({}^{-1})^T gB \quad \text{ou} \quad (gB)'^T = (gB)^{T-1} \end{aligned} \quad (14.24)$$

Or, un vecteur covariant se transforme précisément de cette manière, d'après les Eqs (14.10). Ainsi, on peut définir une position covariante $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ et l'intervalle peut s'exprimer simplement comme la contraction $x^\mu x_\mu$. De même, le tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ permet de transformer un indice covariant en indice contravariant. Ainsi, à partir d'un quadrivecteur covariant A_μ , on construit un

quadrivecteur contravariant $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$ ou $(Ag)^T$. On montre facilement que cette quantité se transforme comme un quadrivecteur contravariant :

$$\begin{aligned} (Ag)' &= A^{-1}g \\ &= A^{-1}g^{-1TT} \quad \text{mais} \quad {}^{-1}g^{-1T} = g \\ &= Ag^T \quad \text{ou} \quad (Ag)'^T = (Ag)^T \end{aligned} \quad (14.25)$$

où nous avons utilisé l'inverse de la relation ${}^Tg = g$.

Notons que la contraction $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}$ est précisément le delta de Kronecker δ_μ^ν . En notation matricielle, ceci signifie simplement que $gg = 1$. Dans cette notation matricielle, le tenseur covariant $B_{\mu\nu}$ obtenu de $B^{\mu\nu}$ par abaissement des indices est gBg , alors que le tenseur mixte $B^\mu{}_\nu$ est Bg et que l'autre tenseur mixte $B_\mu{}^\nu$ est gB .

14.A.2 Exemples d'invariants et de quadrivecteurs

Temps propre

Le *temps propre* τ d'un objet en mouvement est simplement le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel de l'objet. Dans le référentiel inertiel S' qui se déplace avec l'objet à un instant donné, la différentielle de temps propre coïncide avec dt' . Cependant, l'objet peut en général être accéléré de sorte que le référentiel S' n'est pas le même à tous les instants. Quel que soit le référentiel dans lequel on observe l'objet, la différentielle de temps propre peut toujours être exprimée comme suit :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = dt \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (14.26)$$

où u est la vitesse de l'objet, qui peut dépendre du temps. En effet, dans le référentiel S' , $dx^\mu dx_\mu = c^2 d\tau^2$ et de plus l'expression ci-haut est invariante, puisque $dx^\mu dx_\mu$ est un invariant. Pour l'obtenir le temps propre total écoulé sur la trajectoire de l'objet, on intègre $d\tau$:

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (14.27)$$

quadri vitesse

Considérons un objet se déplaçant à une vitesse instantanée u . On définit sa *quadri vitesse* u^μ comme

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (14.28)$$

La différentielle $d\tau$ est invariante, alors que dx^μ se transforme comme les coordonnées ; donc u^μ est un quadrivecteur. En fonction de la vitesse \mathbf{u} , les composantes explicites sont

$$u^\mu : (c\gamma, \gamma\mathbf{u}) \quad (14.29)$$

Par contraction on obtient l'invariant $u^\mu u_\mu = c^2$. Le temps propre écoulé le long d'une trajectoire peut alors s'écrire comme

$$\tau = \int d\tau = \frac{1}{c^2} \int u_\mu dx^\mu \quad (14.30)$$

Quadri-accélération

On définit aussi la quadri accélération

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} \quad (14.31)$$

L'expression explicite (14.29) de la quadri vitesse donne

$$a^\mu = \left(\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c(1-u^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-u^2/c^2} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u}}{c^2(1-u^2/c^2)^2} \right) \quad (14.32)$$

À partir de ce quadrivecteur on peut construire certains invariants. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_\mu a^\mu &= u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14.33)$$

En utilisant les expressions explicites pour u^μ et a^μ en fonction des composantes temporelles et spatiales, la condition $u_\mu a^\mu = 0$ ressort de manière triviale. Un autre invariant à considérer est $a^\mu a_\mu$. On calcule que

$$a^\mu a_\mu = -\gamma^4 \left(\mathbf{a}^2 + (\gamma/c)^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2 \right) \quad (14.34)$$

Cette quantité est la même dans tous les référentiels, même si les valeurs de \mathbf{u} et de \mathbf{a} changent.

quadricourant

Un autre quadrivecteur est formé par la densité de courant et la densité de charge :

$$\mathbf{J}^\mu : (c\rho, \mathbf{J}) \quad (14.35)$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'équation de continuité comme

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_\mu \mathbf{J}^\mu = 0 \quad (14.36)$$

Comme la conservation de la charge doit être valide dans tous les référentiels et que ∂_μ est un quadrivecteur, le quadricourant \mathbf{J}^μ en est forcément un lui aussi. Une autre façon de se convaincre que \mathbf{J}^μ est un quadrivecteur est de considérer l'expression de la densité de courant associée à un ensemble de charges ponctuelles en mouvement :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)}) \quad (14.37)$$

Ici $q^{(i)}$, $\mathbf{r}^{(i)}$ et $\mathbf{v}^{(i)}$ sont respectivement la charge, la position et la vitesse de la i^e particule. La fonction delta dans la formule ci-haut n'est pas un invariant de Lorentz, puisqu'elle est définie par la relation

$$\int d^3 r^{(i)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)}) = 1 \quad (14.38)$$

valide dans tous les référentiels et que d^3r n'est pas invariant. Cependant, $\gamma^{(i)} d^3r^{(i)}$ est un invariant, où $\gamma^{(i)} = 1/\sqrt{1-(v^{(i)}/c)^2}$. La fonction $(1/\gamma^{(i)})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(i)})$ est donc aussi un invariant. Écrivons donc la densité de courant et la densité de charge comme

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \sum_i q^{(i)} \gamma^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} [\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \\ \rho(\mathbf{r}) &= \sum_i q^{(i)} \gamma^{(i)} [\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \end{aligned} \quad (14.39)$$

En fonction de la quadri vitesse de chaque particule, on a

$$J^\mu = \sum_i q_i u^{\mu(i)} [\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \quad (14.40)$$

Comme $q^{(i)}$ et la fonction delta modifiée sont des invariants, on conclut que J^μ est bel et bien un quadrivecteur.

B Forme covariante des équations de Maxwell

Revenons aux lois de l'électrodynamique et exprimons-les dans le langage des quadrivecteurs. Il ne s'agit pas de découvrir ici des résultats nouveaux, mais d'exprimer des relations déjà connues dans une notation nouvelle.

À l'aide du potentiel vecteur \mathbf{A} et du potentiel électrique Φ , définissons une quantité à quatre composantes comme suit :

$$A^\mu : (\Phi, \mathbf{A}) \quad (14.41)$$

Démontrons que cette quantité est un quadrivecteur. Pour ce faire, rappelons-nous que, dans la jauge de Lorenz, les lois de l'électrodynamique peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \quad \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \right) \quad (14.42)$$

Dans la notation indiciale, ces équations prennent la forme suivante :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (\partial_\mu A^\mu = 0) \quad (14.43)$$

Pour que la première équation soit *covariante*, c'est-à-dire pour qu'elle s'exprime de la même façon dans un autre référentiel inertiel, il faut absolument que A^μ soit un quadrivecteur. La deuxième équation (la condition de Lorenz) est alors covariante elle-même. En résumé, la covariance de la

conservation de la charge et des équations de l'électrodynamique ne peut se faire sans que les quantités J^μ et A^μ soient des quadrivecteurs. Notons que le fait que A^μ soit un quadrivecteur est invariant de jauge ; une transformation de jauge s'écrit en effet comme suit :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \xi \quad (14.44)$$

où ξ est une fonction scalaire (c.-à-d. invariante). Évidemment, le passage de A^μ vers A_μ se fait à l'aide du tenseur métrique et nous utiliserons à la fois les versions covariante et contravariante des quadrivecteurs ou quadri-tenseurs dans ce qui suit.

Lors d'un changement de référentiel, les composantes temporelle et spatiales de J^μ (ou de A^μ) se combinent. Par exemple, considérons un fil rectiligne selon l'axe des x dans lequel circule un courant I et qui ne porte pas de charge nette. On sait qu'une telle configuration de charge donne lieu à un champ magnétique qui circule autour du fil. Si on procède à un changement de référentiel $S \rightarrow S'$ le long de cet axe, la densité de courant dans S' est différente de J et une densité de charge $\rho' = -v\gamma J/c^2$ apparaît. Cette densité de charge fait apparaître un champ électrique radial dans S' . Il s'agit d'un fait capital : non seulement les phénomènes magnétiques et électriques sont-ils unifiés par les équations de Maxwell, mais la distinction entre les deux n'est pas invariante : elle est fonction du référentiel.

14.B.1 Tenseur de Faraday

Dans le but de préciser les lois de transformation des champs électrique et magnétique, il faut définir le *tenseur de Faraday* :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (14.45)$$

Cette quantité est le produit, composante par composante, de deux quadrivecteurs covariants. Lors d'un changement de référentiel, elle se transforme donc comme un tenseur covariant de rang 2 :

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta} \quad (14.46)$$

Le tenseur de Faraday est antisymétrique dans ses indices : $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

Si on exprime $F_{\mu\nu}$ en composantes, on trouve

$$F_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.47)$$

La version contravariante s'obtient en changeant le signe du champ électrique :

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} : \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.48)$$

Ce tenseur renferme donc toutes les composantes des champs magnétique et électrique. Les équations de Maxwell s'expriment de façon particulièrement concise en fonction de $F_{\mu\nu}$. Pour le démontrer il suffit de constater que

$$\begin{aligned}\partial^\nu F_{\mu\nu} &= \partial^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu\end{aligned}\quad (14.49)$$

où nous avons utilisé l'éq. (14.43). Si on développe cette équation composante par composante on retrouve les lois de Gauss et d'Ampère-Maxwell.

Quant aux deux autres équations de Maxwell, on les retrouve de la façon suivante : définissons le tenseur de Levi-Civita en 4 dimensions $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ et considérons l'expression

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \partial_\nu F_{\rho\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (\partial_\nu \partial_\rho A_\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda A_\rho) \quad (14.50)$$

Comme $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ est antisymétrique dans tous ses indices et que $\partial_\nu \partial_\rho$ et $\partial_\nu \partial_\lambda$ sont symétriques, cette expression s'annule. En développant cette expression composante par composante, on constate qu'il s'agit de la loi de Faraday et de l'équation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Notons en passant qu'on définit le *tenseur électromagnétique dual*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \quad (14.51)$$

L'expression explicite de ce tenseur dual est la même que pour $F_{\mu\nu}$ sauf pour le fait que les rôles de \mathbf{E} et de \mathbf{B} sont échangés. Plus précisément, $\tilde{F}^{\mu\nu}$ s'obtient à partir de $F^{\mu\nu}$ par les substitutions $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.52)$$

On peut donc écrire les équations de Maxwell comme

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (14.53)$$

Il est bon de détailler la transformation des composantes de $F^{\mu\nu}$ lors d'un changement de référentiel. Supposons que les deux référentiels S et S' se déplacent l'un par rapport à l'autre le long de l'axe des x . La matrice de transformation est donnée par l'expression (14.4). Le nouveau tenseur électromagnétique est alors obtenu par multiplication des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^T \quad (14.54)$$

On obtient explicitement

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y)\end{aligned}\quad (14.55)$$

Exprimons ces transformations différemment en appelant respectivement \mathbf{E}_\perp et \mathbf{E}_\parallel les composantes de \mathbf{E} perpendiculaire et parallèle à la direction de \mathbf{v} , la vitesse relative des référentiels. On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\perp &= \gamma \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}_\perp \right) & \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma \left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{E}_\perp \right) & \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel \end{aligned} \quad (14.56)$$

Remarques :

- ◆ Supposons que $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} \neq 0$ dans S . Par un changement de référentiel, on peut augmenter la composante de \mathbf{B} perpendiculaire à \mathbf{v} et faire apparaître un champ électrique perpendiculaire à \mathbf{v} .
- ◆ De même, si $\mathbf{E} \neq 0$ et $\mathbf{B} = 0$ dans S , un changement de référentiel augmente la composante perpendiculaire de \mathbf{E} et fait apparaître un champ magnétique.
- ◆ Si $\mathbf{B} \neq 0$ et $\mathbf{E} = 0$ dans un référentiel, alors il n'existe aucun référentiel dans lequel $\mathbf{B} = 0$. De même, si $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{E} \neq 0$ dans un référentiel, alors $\mathbf{E} \neq 0$ dans tous les référentiels.

Invariants du champ

Un invariant du champ est une quantité formée à l'aide des champs électrique et magnétique qui ne change pas d'un référentiel à l'autre. La contraction $F^\mu{}_\mu$, quoiqu'invariante, n'est pas intéressante, car elle s'annule (le tenseur de Faraday étant antisymétrique). Par contre, la contraction $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est un invariant non trivial. Un calcul explicite donne

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \quad (14.57)$$

Un autre invariant s'obtient en considérant plutôt la contraction $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. On calcule que

$$\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (14.58)$$

Donc le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est invariant. Cependant, il faut remarquer que cette quantité change de signe lors d'une transformation de parité, car \mathbf{E} est un vecteur polaire et \mathbf{B} un vecteur axial.

Remarques :

- ◆ Si \mathbf{E} et \mathbf{B} sont de même grandeur dans un référentiel, ils le sont dans tous les référentiels ($\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0$).
- ◆ Si $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{E} \neq 0$ dans un référentiel, alors \mathbf{E} ne pourra être plus petit dans un autre référentiel.
- ◆ Si \mathbf{E} et \mathbf{B} sont perpendiculaires dans un référentiel, ils le seront dans tous les référentiels ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$).

C Applications

Champ d'une charge ponctuelle en mouvement uniforme

Nous nous intéressons ici au champ électrique produit par une charge ponctuelle q se déplaçant à une vitesse constante. Nous allons calculer ce champ au moyen d'une transformation de Lorentz effectuée à partir du référentiel S dans lequel la charge est au repos. Dans ce référentiel, le champ électrique qu'elle produit est

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad E_i = \frac{q}{r^3} x_i \quad (14.59)$$

Appliquons les transformations (14.56) pour calculer les champs produits par une charge ponctuelle q , cette fois se déplaçant avec une vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{z}$. Nous nous plaçons donc dans un référentiel S' se déplaçant à une vitesse $-\mathbf{v}$ par rapport à S . On trouve

$$E'_x = \gamma E_x \quad E'_y = \gamma E_y \quad E'_z = E_z \quad (14.60)$$

Nous nous intéressons au champ lorsque la charge est à l'origine dans S' , c'est-à-dire au temps $t' = 0$. La relation entre les coordonnées est alors

$$x = x' \quad y = y' \quad z = \gamma z' \quad (14.61)$$

Donc la distance à l'origine dans S est

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2} \quad (14.62)$$

On peut alors écrire

$$E'_i = q\gamma \frac{x'_i}{(x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2)^{3/2}} \quad (14.63)$$

Soit θ l'angle que fait le rayon vecteur avec \mathbf{v} . Alors $z' = r' \cos \theta$ et $x'^2 + y'^2 = r'^2 \sin^2 \theta$ et

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2 &= r'^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 (1 - \sin^2 \theta)) \\ &= \gamma^2 r'^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (14.64)$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{E}' = q \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{r}'}{r'^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (14.65)$$

Remarques :

- ◆ On retrouve le résultat statique dans la limite non relativiste ($\beta \rightarrow 0$).
- ◆ Le champ est renforcé dans la direction perpendiculaire à la vitesse, et diminué dans la direction parallèle. Dans la limite ultra-relativiste, la distribution angulaire du champ affecte la forme d'une crêpe.

14.C.1 Formule de Larmor relativiste

Nous avons déjà rencontré la formule de Larmor (13.29) pour une charge accélérée se déplaçant à faible vitesse; la puissance rayonnée par une telle charge est

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (14.66)$$

Cette formule est exacte si la vitesse de la particule est nulle à un instant donné. Pour obtenir la formule correspondante à vitesse arbitraire, nous pouvons effectuer une transformation de Lorentz.

Soit S le référentiel de l'observateur, dans lequel la particule en question a une vitesse \mathbf{u} à un instant donné. Soit S' le référentiel inertiel qui coïncide avec le référentiel propre de la particule à cet instant précis. Notons que le référentiel propre de la particule n'est pas inertiel si cette particule est accélérée; on peut cependant trouver un référentiel inertiel qui coïncide avec le référentiel propre à un instant donné, en l'occurrence S' . Dans S' la vitesse \mathbf{u}' de la particule est nulle et la formule de Larmor non relativiste est applicable.

Notons que la puissance rayonnée P est un invariant. En effet, il s'agit d'une énergie émise par unité de temps. Étant donné que la particule est au repos dans S' , la différentielle d'énergie dW et la différentielle de temps dt sont données dans S par le facteur de dilatation du temps :

$$dW = \gamma dW' \quad dt = \gamma dt' \quad (14.67)$$

Donc, la puissance dissipée en rayonnement est

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW'}{dt'} = P' \quad (14.68)$$

Donc le membre de droite de la formule de Larmor doit être remplacé par un invariant qui se trouve à coïncider avec $2e^2 a'^2 / 3c^3$ dans le référentiel S' .

Pour trouver cet invariant, utilisons la quadri accélération $a^\mu = du^\mu / d\tau$. D'après la formule (14.34), l'invariant $a^\mu a_\mu$ est égal à $-a^2$ dans le référentiel où $\mathbf{u} = 0$. La modification à apporter à la formule de Larmor est donc

$$P = -\frac{2e^2}{3c^3} a^\mu a_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 (\mathbf{a}^2 + (\gamma/c)^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2) \quad (14.69)$$

Remarques :

- ◆ Si la vitesse et l'accélération sont colinéaires, alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = ua$ et on calcule que

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^6 \quad (\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}) \quad (14.70)$$

- ◆ Si la vitesse est perpendiculaire à l'accélération, on a

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4 \quad (\mathbf{u} \perp \mathbf{a}) \quad (14.71)$$

Le rayonnement est donc beaucoup plus intense si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}$ à vitesse élevée ($\gamma \gg 1$).

Chapitre 14. Formulation relativiste

Remarquons qu'à une vitesse et une accélération données, la particule en orbite circulaire rayonne moins que la particule en trajectoire linéaire. Cependant, il est plus pratique de considérer le cas où la force est fixe. la force exercée sur une particule relativiste est

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) \\ &= m\mathbf{a}\gamma + m\gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\beta}\end{aligned}\tag{14.72}$$

On voit que

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^2 &= m^2\mathbf{a}^2\gamma^2 & (\mathbf{a} \perp \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{f}^2 &= m^2\mathbf{a}^2\gamma^6 & (\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\beta})\end{aligned}\tag{14.73}$$

En fonction de la force \mathbf{f} agissant sur la particule, la puissance rayonnée totale est donc

$$\begin{aligned}P &= \frac{2e^2}{3m^2c^3}\gamma^2\mathbf{f}^2 & (\mathbf{a} \perp \boldsymbol{\beta}) \\ P &= \frac{2e^2}{3m^2c^3}\mathbf{f}^2 & (\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\beta})\end{aligned}\tag{14.74}$$

Il est donc beaucoup plus difficile d'accélérer une particule très relativiste ($\gamma \gg 1$) en orbite circulaire qu'en trajectoire linéaire. Dans un cas comme dans l'autre, la majeure partie du rayonnement est émise vers l'avant, c'est-à-dire dans la direction approximative de la vitesse.

D Formulation lagrangienne

Principe de la moindre action

En mécanique, les équations du mouvement peuvent en général être obtenues à partir du principe de moindre action. Ce principe stipule que la trajectoire $\mathbf{r}(t)$ d'une particule (ou d'un système mécanique plus général) s'obtient en demandant qu'une certaine fonctionnelle $S[\mathbf{r}(t)]$ appelée *action* soit stationnaire par rapport à une variation de la trajectoire. En d'autres termes, si on effectue une variation $\delta\mathbf{r}(t)$ de la trajectoire, la variation correspondante de l'action doit être nulle au premier ordre en $\delta\mathbf{r}$. Pour un système mécanique simple, l'action est égale à l'intégrale sur la trajectoire de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$S[\mathbf{r}] = \int dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{où} \quad L = T(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}) \quad (14.75)$$

On appelle L la *fonction de Lagrange* ou *lagrangien*.

En relativité on veut que les équations du mouvement aient la même forme dans tous les référentiels inertiels. Pour cela il faut que l'action soit invariante par rapport aux transformations de Lorentz. Guidés par ce principe, essayons d'obtenir l'action d'une particule libre. Soit $x_\mu(\tau)$ la trajectoire de la particule dans l'espace-temps, en fonction du temps propre τ . La quantité invariante la plus simple qu'on peut construire avec une telle trajectoire est sa longueur propre, c'est-à-dire le temps écoulé dans le référentiel (non inertielle, en général) de la particule. Cette quantité doit être multipliée par une constante qui donne à l'action ses unités naturelles, soit celles d'une énergie fois un temps. La seule constante relative à la particule ayant les unités d'une énergie est mc^2 (m est la masse de la particule). On suppose donc que l'action est

$$S_0 = -mc^2 \int d\tau = m \int u_\mu dx^\mu \quad (14.76)$$

où u_μ est la quadri vitesse de la particule (la constante multiplicative -1 a été ajoutée afin de retrouver le résultat non relativiste). Puisque $d\tau = dt/\gamma$, on peut écrire

$$S_0 = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (14.77)$$

Le lagrangien d'une particule libre est donc

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (14.78)$$

Dans l'approximation non relativiste ($v \ll c$) on a $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - v^2/2c^2$ et donc

$$L_0 \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (14.79)$$

On retrouve donc le lagrangien habituel, plus une constante ($-mc^2$) qui n'affecte pas les équations du mouvement.

L'impulsion généralisée \mathbf{p} est définie comme

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (14.80)$$

La fonction de Hamilton (hamiltonien) qui correspond à ce lagrangien est

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L_0 \\ &= \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (14.81)$$

Le hamiltonien est dans ce cas égal à l'énergie cinétique de la particule. Dans l'approximation non relativiste, H devient

$$H_0 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (14.82)$$

On reconnaît l'énergie cinétique usuelle, plus une constante : l'énergie au repos mc^2 .

Action invariante d'une particule chargée dans un champ

Considérons maintenant non pas une particule libre, mais une particule chargée dans un champ. À l'action S_0 de la particule libre, on doit ajouter une action S_1 décrivant l'interaction de cette particule avec le champ électromagnétique. Cette action doit bien sûr être invariante. Nous allons vérifier que cette action est donnée par

$$S_1 = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \quad (14.83)$$

où e est la charge de la particule, A_μ est le quadrivecteur du potentiel électromagnétique et l'intégrale est effectuée sur la trajectoire de la particule. Comme l'intégrand est la contraction de deux quadrivecteurs, il est forcément invariant. Cette action peut aussi s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{e}{c} \int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - c\Phi dt) \\ &= \int dt \left\{ \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi \right\} \end{aligned} \quad (14.84)$$

L'action à considérer est l'action totale $S_0 + S_1$ ou son lagrangien :

$$L = -mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi \quad (14.85)$$

Il s'agit de la version relativiste du Lagrangien apparaissant à l'éq. (2.8). Construisons maintenant le hamiltonien, dans un contexte pleinement relativiste. Le moment généralisé est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (14.86)$$

Le hamiltonien correspondant est

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\Phi \quad (14.87)$$

où il est compris que la vitesse \mathbf{v} doit être remplacée par $(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)/m\gamma$ (couplage minimal). Dans l'approximation non relativiste, le hamiltonien devient

$$H \approx mc^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2 + e\Phi \quad (14.88)$$

Force de Lorentz

Pour vérifier que nous avons fait le bon choix de lagrangien au départ, nous allons obtenir les équations du mouvement et nous assurer qu'elles coïncident avec la force de Lorentz. Les équations de Lagrange sont, dans ce cas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} - \frac{e}{c} v_i (\nabla A_i) + e\nabla\Phi \quad (14.89)$$

Le premier terme du membre de gauche est par définition la force \mathbf{F} (la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps). On peut donc écrire

$$\mathbf{F} = -e\nabla\Phi - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} + \frac{e}{c} v_i \nabla A_i \quad (14.90)$$

Notons que la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{A}}$ est une dérivée *totale* par rapport au temps et non une dérivée partielle. Cette dérivée est non seulement due à la variation temporelle de \mathbf{A} à une position donnée, mais aussi au déplacement de la particule dans le temps d'un point à un autre :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (14.91)$$

mais

$$-v_j \partial_j A_i + v_j \partial_i A_j = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} v_j \partial_r A_s = (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}))_i \quad (14.92)$$

Donc on obtient finalement

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (14.93)$$

Ce qui est effectivement la force de Lorentz.

Nous aurions pu cependant appliquer le principe variationnel directement dans sa forme covariante, comme dans ce qui suit : L'action d'une particule chargée dans un champ est

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int d\tau - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \\ &= -mc \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \end{aligned} \quad (14.94)$$

Nous devons maintenant effectuer une variation de la trajectoire : $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$. La variation correspondante de l'action est, au premier ordre,

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int \frac{1}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} dx_\mu d\delta x^\mu - \frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu dx^\mu - \frac{e}{c} \int A_\mu d\delta x^\mu \\ &= -m \int \dot{x}_\mu d\delta x^\mu - \frac{e}{c} \int \partial_\mu A_\nu \delta x^\mu dx^\nu - \frac{e}{c} \int A_\mu d\delta x^\mu \\ &= m \int \ddot{x}_\mu \delta x^\mu d\tau - \frac{e}{c} \int \partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu \delta x^\mu d\tau + \frac{e}{c} \int \partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu \delta x^\mu d\tau \\ &= m \int \ddot{x}_\mu \delta x^\mu d\tau - \frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta x^\mu d\tau \end{aligned} \quad (14.95)$$

Nous avons effectué des intégrations par parties dans la troisième ligne et utilisé la notation

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{et la relation} \quad dx^\mu = \dot{x}^\mu d\tau \quad (14.96)$$

Comme la variation δx^μ est arbitraire, la condition $\delta S = 0$ entraîne l'équation suivante :

$$m\ddot{x}_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (14.97)$$

Il s'agit en fait de la force de Lorentz, exprimée sous une forme covariante. C'est un exercice simple de démontrer qu'on retrouve la forme habituelle de cette force en substituant l'expression de la quadri accélération et de la quadri vitesse.

Action du champ

Le champ électromagnétique constitue aussi en lui-même un système mécanique, avec un nombre infini de degrés de liberté : on peut affirmer que les degrés de liberté du champ sont les valeurs du potentiel électromagnétique à toutes les positions possible, ce qui constitue un continuum de degrés de liberté. Malgré l'apparente complexité du système, on peut écrire une action pour le champ ; les équations de Lagrange qui en découlent coïncident alors avec les équations de Maxwell.

L'action pour le champ électromagnétique doit avoir la forme suivante :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) \quad (14.98)$$

où \mathcal{L} est la *densité lagrangienne* et $d^4x = d^3r dt$. Le lagrangien est alors l'intégrale de la densité lagrangienne sur l'espace :

$$L = \int d^3r \mathcal{L} \quad (14.99)$$

De plus, cette action doit consister de deux parties : une décrivant la dynamique propre du champ et une décrivant l'interaction du champ avec la matière chargée. Cette dernière partie nous est déjà connue : il s'agit de S_1 ci-haut. En exprimant cette dernière en fonction du quadri vecteur de densité de courant au lieu de la quadri vitesse, on a

$$S_1 = -\frac{1}{c} \int d^4x J^\mu A_\mu \quad (14.100)$$

Il reste à trouver S_0 , l'action propre du champ ou la densité lagrangienne correspondante \mathcal{L}_0

Pour que S_0 soit invariant, il faut que \mathcal{L}_0 aussi soit invariant ; mais attention ! le lagrangien, lui, n'est pas invariant. La raison en est que l'élément de volume d'espace-temps d^4x est invariant par rapport aux transformations de Lorentz, alors que d^3r ne l'est pas. En effet,

$$d^4x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) d^4x = \det d^4x \quad (14.101)$$

où est la matrice de la transformée de Lorentz. On vérifie sans peine que $\det = 1$. Donc $d^4x' = d^4x$ ou $d^3r' dt' = d^3r dt$. Mais $dt' \neq dt$, et donc $d^3r' \neq d^3r$.

Par analogie avec la mécanique d'une particule, on veut que \mathcal{L}_0 dépende de A_μ et de ses premières dérivées. Comme les équations de Maxwell sont linéaires, il faut que \mathcal{L}_0 soit au plus quadratique dans les champs. La seule possibilité invariante est alors

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (14.102)$$

Le facteur de $-1/16\pi$ a été ajouté dans le but de retrouver les équations de Maxwell dans leur normalisation habituelle par rapport au courant. La densité lagrangienne totale est donc

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c} J^\mu A_\mu - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (14.103)$$

Utilisons maintenant le principe de la moindre action pour obtenir les équations du mouvement. Il faut pour cela ajouter une variation δA_μ au quadrivecteur du potentiel et s'assurer que la variation correspondante de l'action est nulle au premier ordre. Notons que

$$\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \quad (14.104)$$

Donc la variation de l'action est

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{c} J^\nu \delta A_\nu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \right\} \quad (14.105)$$

En intégrant le deuxième terme par parties, on trouve

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{c} J^\nu + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \right\} \delta A_\nu \quad (14.106)$$

Si cette variation s'annule pour n'importe quelle variation δA_ν , il faut que le tenseur électromagnétique satisfasse aux équations suivantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (14.107)$$

Cette équation constitue une partie des équations de Maxwell. L'autre partie provient de la définition même de $F_{\mu\nu}$ en fonction de A_μ et peut être exprimée comme $\partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0$ (voir ci-haut).

Tenseur d'énergie-impulsion

Un autre tenseur utile dans la description des champs électromagnétiques est le tenseur d'énergie-impulsion, défini par

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \quad (14.108)$$

Ce tenseur est manifestement symétrique ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) et sa trace est nulle ($T^\mu{}_\mu = 0$).

Un calcul explicite donne les expressions suivantes pour les différentes composantes $T^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right) \\ T^{0k} &= \frac{1}{c} S_k \\ T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \mathcal{E} \end{aligned} \quad (14.109)$$

La partie spatiale de T , en fait la matrice $-T_{ij}$, porte le nom de *tenseur des contraintes de Maxwell*.

Le tenseur d'énergie-impulsion satisfait à la condition suivante :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\lambda\nu} J_\lambda \quad (14.110)$$

Pour démontrer cette relation, il suffit de faire le calcul explicite :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left(\partial_\mu F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\mu F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{c} J^\lambda F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{2} F^{\mu\lambda} (\partial_\mu F_\lambda{}^\nu - \partial_\lambda F_\mu{}^\nu) + \frac{1}{2} \partial^\nu F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \end{aligned} \quad (14.111)$$

Dans la deuxième équation, nous avons utilisé les équations de Maxwell et nous avons antisymétrisé le second facteur du deuxième terme. Les trois derniers termes peuvent aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} g^{\nu\alpha} F^{\rho\lambda} (\partial_\rho F_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda F_{\alpha\rho} + \partial_\alpha F_{\rho\lambda}) \quad (14.112)$$

après avoir changé les indices de sommation et transposé au besoin. On reconnaît entre parenthèses le deuxième groupe d'équations de Maxwell. Ce terme s'annule donc et il reste l'équation (14.110).

L'interprétation physique de la relation (14.110) est la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Pour le démontrer, considérons premièrement la composante $\nu = 0$ de cette relation :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu 0} &= \frac{1}{c} F^{\lambda 0} J_\lambda \\ &= -\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (14.113)$$

Intégrons cette dernière relation dans un volume V , en utilisant l'expression (1.13) pour le courant associé à un ensemble de charges ponctuelles :

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \partial_\mu T^{\mu 0} &= -\frac{1}{c} \sum_i q^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(i)}) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{dW}{dt} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r T^{00} + \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x^k} T^{k0} \end{aligned} \quad (14.114)$$

où W est l'énergie cinétique des sources du champ contenues dans le volume V . Dans la dernière équation, le dernier terme est l'intégrale de la divergence d'un vecteur et peut se ramener à une intégrale de surface. On écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ W + \int_V d^3r T^{00} \right\} = -c \oint_S da_k T^{k0} \quad (14.115)$$

Ceci signifie que le vecteur dont les composantes sont cT^{k0} est le flux de la quantité apparaissant dans le membre de gauche, c'est-à-dire l'énergie. Ce vecteur n'est rien d'autre que \mathbf{S} , le vecteur de Poynting, et la densité d'énergie du champ électromagnétique est $T^{00} = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$.

Passons maintenant aux composantes spatiales ($\nu = i$) de l'équation (14.110). Reprenant le calcul précédent, on trouve

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu i} &= \frac{1}{c} F^{\lambda i} J_\lambda \\ &= -E_i \rho - \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} B_l J_k \\ &= -\left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \right)_i\end{aligned}\quad (14.116)$$

car $F^{ik} = \varepsilon_{ikl} B_l$. En utilisant l'expression du courant et de la densité de charge pour des particules ponctuelles et en intégrant sur un volume V , le membre de droite devient la force de Lorentz totale exercée sur les particules comprises dans ce volume :

$$\begin{aligned}\int_V d^3r \partial_\mu T^{\mu i} &= -(\mathbf{F}_{\text{tot.}})_i \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r T^{0i} + \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ki}\end{aligned}\quad (14.117)$$

Le deuxième terme est l'intégrale d'une divergence et se transforme en intégrale de surface : cette relation devient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\mathbf{p}_{\text{tot.}})_i + \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{0i} \right\} = - \oint_S da_k T^{ki}\quad (14.118)$$

où \mathbf{p} est l'impulsion totale des sources du champ dans le volume V . L'interprétation de cette équation est que T^{0i}/c est la composante i de la densité de l'impulsion du champ électromagnétique et que le vecteur dont les composantes sont T^{ki} ($k = 1, 2, 3$) est le flux de la composante i de l'impulsion du champ. La densité d'impulsion est donc reliée au vecteur de Poynting :

$$\text{densité d'impulsion : } \frac{1}{c^2} \mathbf{S}\quad (14.119)$$

Dans le cas statique (aucune dépendance en temps), la force totale exercée sur les sources par le champ est donc

$$(\mathbf{F}_{\text{tot.}})_i = - \oint da_k T^{ki}\quad (14.120)$$

Problèmes

Problème 14.1

Un long fil rectiligne, orienté selon \mathbf{x} , au repos dans le référentiel S , porte un courant continu I . Un référentiel S' se déplace à une vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{x}$ par rapport à S . Quels sont les champs électrique et magnétique dans S' (en fonction de la distance par rapport au fil) et à quelles densité de charge et quel courant sont-ils attribuables ?

Problème 14.2

Une charge ponctuelle e évolue dans des champs électrique ($\mathbf{E} = E_y\mathbf{y}$) et magnétique ($\mathbf{B} = B_z\mathbf{z}$) uniformes et perpendiculaires, tels que $E \ll B$. Donnez une expression pour la trajectoire de la particule en fonction du temps (c'est-à-dire $(x(t), y(t), z(t))$) en supposant que $\mathbf{r}(0) = 0$ et $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$. Pour ce faire, transportez-vous dans le référentiel où $\mathbf{E} = 0$, trouvez la trajectoire dans ce référentiel et ensuite transformez le tout dans le référentiel original. Supposez toujours que $E \ll B$ et montrez que la trajectoire est une cycloïde (tracez-la!).

Problème 14.3

Une onde plane a la forme suivante :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \propto \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (14.121)$$

En partant du principe que la phase de l'onde est un invariant, montrez que la quantité $(\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadrivecteur contravariant. Dans un référentiel S une onde électromagnétique plane se propage dans le vide à une fréquence ω . Soit S' un référentiel se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} par rapport à S . La fréquence ω' de l'onde dans S' est différente (effet Doppler). Si \mathbf{v} est perpendiculaire à \mathbf{k} , montrez que

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{effet Doppler transverse}) \quad (14.122)$$

Si, au contraire, \mathbf{v} est parallèle à \mathbf{k} , montrez que

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (\text{effet Doppler longitudinal}) \quad (14.123)$$

CHAPITRE 15

Annexes

A Formulaire

15.A.1 Notation indicielle

Cette section constitue une introduction à la notation indicielle souvent employée dans les calculs ou démonstrations de ces notes.

Un vecteur \mathbf{A} peut être représenté par ses composantes : $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. On écrit la i^e composante A_i . En particulier, on emploie l'abréviation ∂_i pour le gradient :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (15.1)$$

On emploie couramment la *convention de sommation*, qui stipule qu'on doit sommer sur les indices qui apparaissent en paires. Par exemple, on écrit

$$A_i B_i \quad \text{pour} \quad \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (15.2)$$

ou on écrit

$$A_i A_i \partial_k \Phi B_k B_j \quad \text{pour} \quad B_j \sum_{i,k=1}^3 A_i A_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} B_k \quad (15.3)$$

Dans cette notation, l'indice sur lequel on somme (l'indice de sommation) est l'analogue d'une variable d'intégration : le symbole précis utilisé importe peu. Ainsi, on a $A_i B_i = A_k B_k$.

Le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (15.4)$$

Il s'agit en fait des éléments de matrice de la matrice unité. On a donc $\delta_{ij} A_j = A_i$ ou encore $\partial_i x_j = \delta_{ij}$.

Le symbole (ou tenseur) de Levi-Civita ε_{ijk} est défini comme suit en dimension 3 : $\varepsilon_{ijk} = 0$ sauf

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \quad (15.5)$$

Ce symbole est donc complètement antisymétrique dans ses indices (ex. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$) et est invariant par permutations cycliques de ses indices ($\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$). Naturellement, il s'annule si deux des indices sont identiques. En dimension d , ce symbole comporte d indices et est défini de manière analogue. On a la propriété suivante :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (15.6)$$

Le produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ de deux vecteurs peut s'exprimer ainsi :

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k \quad (15.7)$$

où, bien sûr, j et k sont sommés. En particulier, le rotationnel d'un champ vectoriel est $(\nabla \wedge \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$.

Comme premier exemple, calculons en notation indicielle le double produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))_i &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}A_jB_mC_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n \\ &= B_i(A_jC_j) - C_i(A_jB_j) \\ &= (\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}))_i \end{aligned} \quad (15.8)$$

Comme deuxième exemple, montrons comment la divergence d'un rotationnel s'annule :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \quad (15.9)$$

Comme $\partial_i\partial_j$ est symétrique dans les indices i, j et que ε_{ijk} est antisymétrique dans les mêmes indices, la somme sur i et j doit nécessairement s'annuler. Par exemple, la contribution à la somme du terme $i = 1$ et $j = 2$ est l'opposée de celle de $i = 2$ et $j = 1$.

15.A.2 Formules d'analyse vectorielle

opérations sur les vecteurs :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (15.10)$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{z} \quad (15.11)$$

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (15.12)$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (15.13)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \quad (15.14)$$

opérations différentielles :

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (15.15)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (15.16)$$

$$\nabla \wedge (f \mathbf{A}) = f \nabla \wedge \mathbf{A} + \nabla f \wedge \mathbf{A} \quad (15.17)$$

$$\nabla \wedge \nabla f \equiv 0 \quad (15.18)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (15.19)$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (15.20)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (15.21)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) \quad (15.22)$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (15.23)$$

Théorème de la divergence :

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_{\partial V} \mathbf{da} \cdot \mathbf{A} \quad (15.24)$$

En appliquant ce théorème au cas $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{c}f$ où \mathbf{c} est un vecteur constant quelconque, on trouve :

$$\int_V d^3r \nabla f = \oint_{\partial V} \mathbf{da} \mathbf{n} f \quad (15.25)$$

En l'appliquant au cas $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{c} \wedge \mathbf{A}$ où \mathbf{c} est un vecteur constant quelconque, on trouve :

$$\int_V d^3r \nabla \wedge \mathbf{A} = \oint_{\partial V} \mathbf{da} \mathbf{n} \wedge \mathbf{A} \quad (15.26)$$

Première identité de Green :

$$\int_V d^3r (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) = \oint_{\partial V} \mathbf{da} f (\mathbf{n} \cdot \nabla) g \quad (15.27)$$

Théorème de Green :

$$\int_V d^3r (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) = \oint_{\partial V} \mathbf{da} \cdot (f \nabla g - g \nabla f) \quad (15.28)$$

Théorème de Stokes :

$$\int_S \mathbf{da} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \oint_{\partial S} \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A} \quad (15.29)$$

$$\int_S \mathbf{da} \mathbf{n} \wedge \nabla f = \oint_{\partial S} \mathbf{dl} f \quad (15.30)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \wedge \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (15.31)$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}} &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\
 \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\
 \nabla &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z} \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 \nabla \wedge \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{z} \\
 \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{15.32}$$

coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}} &= x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta \\
 \hat{\boldsymbol{\theta}} &= x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta \\
 \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\
 \nabla &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \nabla \wedge \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
 \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}
 \end{aligned} \tag{15.33}$$

15.A.3 Conversion entre les systèmes SI et gaussien

Quantité	SI	gaussien	
longueur	1 mètre	10^2	centimètre
temps	1 seconde	1	seconde
masse	1 kilogramme	10^3	gramme
force	1 newton	10^5	dyne
énergie	1 joule	10^7	erg
puissance	1 watt	10^7	erg/s
charge électrique	1 coulomb	$3 \cdot 10^9$	statcoulomb
potentiel électrique	1 volt	1/300	statvolt
champ électrique E	1 volt/m	$(1/3) \cdot 10^4$	statvolt/m
polarisation	1 coulomb/m ²	$3 \times 4\pi \cdot 10^5$	statcoulomb/cm ²
résistance	1 ohm	$(1/3)^2 \cdot 10^{-11}$	statohm
conductivité	1 mho/m	$(3)^2 \cdot 10^9$	1/sec
capacité	1 farad	$(3)^2 \cdot 10^{11}$	statfarad
induction magnétique B	1 weber/m ²	10^4	gauss
champ magnétique H	1 ampère/m	$(4\pi) \cdot 10^{-3}$	oersted
aimantation	1 weber/m ²	$(1/4\pi) \cdot 10^4$	gauss
inductance	1 henry	$(1/3)^2 \cdot 10^{-11}$	stathenry
D	$\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$		$\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
H	$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$		$\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$
$\nabla \cdot \mathbf{D}$	ρ		$4\pi \rho$
$\nabla \cdot \mathbf{B}$	0		0
$\nabla \wedge \mathbf{E}$	$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$		$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \wedge \mathbf{H}$	$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$		$\frac{1}{c} \left(4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$
F	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$		$q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right)$
S	$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$		$\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$

Note : le chiffre 3 apparaissant dans la troisième colonne signifie en fait la valeur numérique de la vitesse de la lumière (divisé par 10^8), à savoir 2,99792.

B Théorème de Helmholtz

Le *théorème de Helmholtz* stipule que tout champ vectoriel \mathbf{F} continu qui s'annule suffisamment rapidement à l'infini peut être exprimé comme la somme d'un gradient et d'un rotationnel :

$$\mathbf{F} = \nabla\phi + \nabla\wedge\mathbf{G} \quad (15.34)$$

où $\nabla\phi$ est appelé la partie *longitudinale* de \mathbf{F} et $\nabla\wedge\mathbf{G}$ la partie *transverse*. La démonstration de ce théorème est simple : on définit premièrement le champ vectoriel

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (15.35)$$

En vertu de la relation

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (15.36)$$

on voit immédiatement que

$$\nabla^2\mathbf{W}(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) . \quad (15.37)$$

Comme $\nabla^2\mathbf{W} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{W}) - \nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{W})$, il suffit donc de poser

$$\phi = -\nabla\cdot\mathbf{W} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \nabla\wedge\mathbf{W} \quad (15.38)$$

pour que (15.34) soit démontré de manière constructive. Notons que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ doit s'annuler suffisamment rapidement à l'infini pour que le champ \mathbf{W} soit bien défini.

L'expression (15.38) de ϕ et \mathbf{G} peut être rendue plus explicite :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{G}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (15.39)$$

Ces expressions se démontrent en appliquant l'opérateur différentiel sur l'intégrant, en notant que

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15.40)$$

et en intégrant par parties pour que l'opérateur différentiel s'applique sur le champ \mathbf{F} . Remarquons toutefois que l'expression ci-haut de ϕ et de \mathbf{G} n'est pas unique : on peut ajouter à ϕ une constante et à \mathbf{G} le gradient d'une fonction sans affecter \mathbf{F} .

Il ressort de la relation (15.39) que :

1. si \mathbf{F} est irrotationnel, alors \mathbf{F} est le gradient d'une fonction, autrement dit, purement longitudinal.
2. si \mathbf{F} est sans divergence, alors \mathbf{F} est le rotationnel d'une fonction, autrement dit, purement transverse.

Pourquoi ces qualificatifs de transverse et de longitudinal ? Considérons la transformée de Fourier $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$ du champ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Dans l'espace des vecteurs d'onde, $\nabla\wedge\mathbf{F}$ correspond à $i\mathbf{k}\wedge\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$ et $\nabla\cdot\mathbf{F}$ à $i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$. Un champ est donc qualifié de longitudinal si $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$ est parallèle à \mathbf{k} (c'est-à-dire $\nabla\wedge\mathbf{F} = 0$) et de transverse si $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})$ est perpendiculaire à \mathbf{k} (c'est-à-dire $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$).

C Relations de Kramers-Krönig

Le théorème de Kramers-Krönig établit une relation entre les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\epsilon}(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \operatorname{Im} \hat{\epsilon}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (15.41)$$

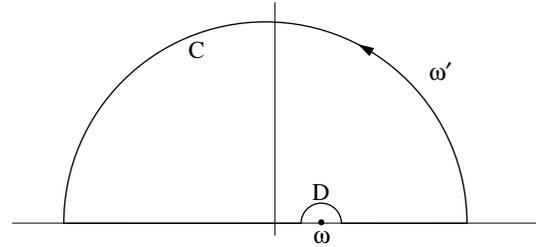
Cette relation ce démontre de la manière suivante. Considérons premièrement la susceptibilité électrique $\chi(t)$. Cette fonction est nulle si $t < 0$, par le principe de causalité. La conséquence de cela sur sa transformée de Fourier

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int dt \chi(t) e^{i\omega t} \quad (15.42)$$

est que cette dernière est toujours bien définie dans le demi-plan complexe supérieur (c'est-à-dire si $\operatorname{Im} \omega > 0$), car alors l'intégrale sur t ne peut que converger parce que l'intégrand diminue exponentiellement (la fonction $\chi(t)$ elle-même ne peut pas avoir de comportement singulier et doit diminuer avec le temps). De plus, on voit que la fonction $\tilde{\chi}(\omega)$ doit tendre vers zéro lorsque $|\omega| \rightarrow \infty$.

FIGURE 15.1

Contour utilisé pour démontrer le théorème de Kramers-Krönig, dans le plan ω' complexe. Le rayon du demi-cercle extérieur C doit tendre vers l'infini, alors que celui du demi-cercle intérieur D, centré en ω , doit tendre vers zéro.



Considérons ensuite l'intégrale complexe suivante, le long du contour illustré :

$$\oint d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (15.43)$$

Par le théorème des résidus, cette intégrale doit s'annuler, car le contour ne contient aucun pôle de l'intégrand (le demi-cercle D est là justement pour éviter de rencontrer le point $\omega' = \omega$). D'autre part, la contribution du demi-cercle C à l'intégrale s'annule dans la limite où son rayon tend vers l'infini, car la fonction $\tilde{\chi}(\omega')$ tend vers zéro quand $|\omega'| \rightarrow \infty$. Dans la limite où le rayon δ du demi-cercle D tend vers zéro, sa contribution à l'intégrale est dictée par le théorème des résidus :

$$\int_D d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} = -i\pi \tilde{\chi}(\omega) \quad (15.44)$$

(le signe négatif apparaît parce que D est décrit dans le sens horaire). Enfin, la contribution de l'axe réel, dans la limite $\delta \rightarrow 0$, est par définition la valeur principale

$$\text{V.P.} \int d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega - \delta} d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \delta}^{\infty} d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} \right\} \quad (15.45)$$

On écrit donc

$$\text{V.P.} \int d\omega' \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} = i\pi \tilde{\chi}(\omega) \quad (15.46)$$

En décomposant $\tilde{\chi}$ en parties réelle et imaginaire : $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}' + i\tilde{\chi}''$,

$$\tilde{\chi}'(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int \frac{\tilde{\chi}''(\omega')}{\omega' - \omega} \quad \tilde{\chi}''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int \frac{\tilde{\chi}'(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (15.47)$$

On peut enfin exprimer ces relations en fonction de la constante diélectrique $\hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\tilde{\chi}$, en posant que

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad \text{et donc que} \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= 1 + 4\pi\tilde{\chi}' \\ \varepsilon'' &= 4\pi\tilde{\chi}'' \end{aligned} \quad (15.48)$$

et sachant que

$$\text{V.P.} \int \frac{1}{\omega' - \omega} = 0 \quad (15.49)$$

On obtient alors les relations (15.41), où les valeurs principales sont implicites.

D Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont essentiels à la formulation du développement multipolaire. Cette annexe est une introduction à ces fonctions spéciales particulièrement simples.

On peut définir les polynômes de Legendre par la fonction génératrice

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(t) \quad (15.50)$$

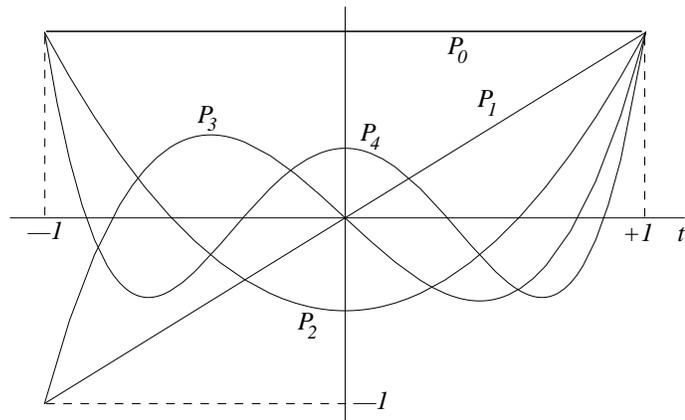
Les polynômes $P_l(t)$ sont obtenus en effectuant correctement le développement binomial. Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \end{aligned} \quad (15.51)$$

Une formule explicite peut être obtenue pour P_l :

$$P_l(t) = \frac{(2l-1)!!}{l!} \left[t^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} t^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2l-3)(2l-1)} t^{l-4} + \dots \right] \quad (15.52)$$

FIGURE 15.2
Graphique des premiers polynômes de Legendre



La définition (15.50) nous permet de démontrer plusieurs propriétés de ces polynômes. Premièrement, on peut effectuer la transformation $x \rightarrow -x$ et $t \rightarrow -t$ dans la fonction génératrice sans la modifier. On peut donc écrire

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-x)^l P_l(-t) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(t) \quad (15.53)$$

Ceci étant vrai pour toute valeur de x et de t , on en conclut que

$$P_l(-t) = (-1)^l P_l(t) \quad (15.54)$$

En d'autres termes, les polynômes d'ordre pair sont pairs et ceux d'ordre impair sont impairs.

Deuxièmement, on trouve facilement la valeur des polynômes à $t = 1$. Pour cette valeur, la fonction génératrice est

$$\begin{aligned} G(x, 1) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l \quad (\text{série géométrique}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(1) \end{aligned} \quad (15.55)$$

Ceci étant vrai pour toute valeur de x , on conclut que

$$P_l(1) = 1 \quad \text{et} \quad P_l(-1) = (-1)^l \quad (15.56)$$

La série géométrique ne converge que si $-1 < x < 1$. La série (15.50) possède le même domaine de convergence.

En pratique, le calcul des polynômes de Legendre s'effectue à l'aide de relations de récurrence, comme celle-ci :

$$(2l + 1)tP_l(t) = (l + 1)P_{l+1}(t) + lP_{l-1}(t) \quad (15.57)$$

Cette relation permet de déterminer tous les polynômes de Legendre en connaissant les expressions pour P_0 et P_1 . Elle se démontre de la manière suivante : on calcule la dérivée de la fonction génératrice par rapport à x . On trouve que

$$(1 - 2xt + x^2) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + (x - t)G(x, t) = 0 \quad (15.58)$$

Dans cette relation on substitue le développement en série (15.50) et on obtient une identité sous la forme d'un développement en série de puissances, puisque les facteurs $(1 - 2xt + x^2)$ et $x - t$ sont eux-mêmes des polynômes en x et t . En appliquant l'égalité pour chaque puissance de x , on trouve la relation (15.57).

On démontre aussi la formule suivante, dite *formule de Rodrigues* :

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l \quad (15.59)$$

Cette formule se démontre par calcul direct, en comparant avec l'éq. (15.52). Elle nous permet de démontrer la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-1}^1 dt P_m(t) P_n(t) = \delta_{mn} \frac{2}{2l + 1} \quad (15.60)$$

Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Rodrigues dans l'intégrale et d'intégrer par parties complètement l'un des deux facteurs. La normalisation du cas $m = n$ s'obtient plutôt en intégrant le carré de la formule (15.50) et en utilisant l'orthogonalité.

La dernière propriété des polynômes de Legendre que nous allons démontrer est que ce sont des solutions de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - t^2) \frac{dP_l}{dt} \right] + l(l + 1)P_l = 0 \quad (15.61)$$

Pour démontrer ceci, considérons une charge unité située à la position \mathbf{r}' et considérons le potentiel électrique au point \mathbf{r} créé par cette charge :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15.62)$$

Supposons que $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$ et choisissons nos axes de telle sorte que \mathbf{r}' soit sur l'axe des z . Définissons $r = |\mathbf{r}|$ et $r' = |\mathbf{r}'|$. L'angle entre les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' est la coordonnée angulaire θ des coordonnées sphériques. Remplaçons cette coordonnée par $t = \cos \theta$. On peut alors utiliser la série (15.50) pour décrire le potentiel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r \sqrt{1 - 2tr'/r + (r'/r)^2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(t) \end{aligned} \quad (15.63)$$

D'un autre côté, si $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ce potentiel satisfait à l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$. En coordonnées sphériques, le Laplacien a la forme suivante :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (15.64)$$

En raison de la symétrie azimutale du problème, le potentiel ne peut dépendre de φ . D'autre part, la substitution $t = \cos \theta$ donne

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left((1-t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (15.65)$$

En substituant le développement (15.63) dans cette équation, on trouve

$$\sum_l \frac{r'^l}{r^{l+1}} \left\{ l(l+1) P_l(t) + \frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dP_l}{dt} \right] \right\} = 0 \quad (15.66)$$

Comme il s'agit d'une identité, valable pour tout $r > r'$ et pour toute valeur de t , on conclut que les polynômes de Legendre satisfont à l'équation différentielle (15.61). Les solutions de cette équation linéaire du deuxième ordre sont uniques si on spécifie deux conditions initiales ou deux conditions aux limites. Par exemple, les polynômes de Legendre sont les solutions uniques satisfaisant aux conditions $P_l(1) = 1$ et $P_l(-1) = (-1)^l$.

E Fonctions de Bessel

15.E.1 Définitions

Ce complément est consacré aux fonctions de Bessel, très importantes dans tous les problèmes impliquant l'équation de Laplace ou de Helmholtz en géométrie cylindrique. Aux fins de motivation, considérons premièrement l'équation de Helmholtz en deux dimensions spatiales, en coordonnées cylindriques, pour une fonction ψ , pouvant représenter, par exemple, une composante du champ électromagnétique :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (15.67)$$

Écrivons maintenant la solution $\psi(r, \varphi)$ comme un produit (séparation des variables) : $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, en supposant que la fonction Φ a une dépendance sinusoidale : $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$. En substituant dans l'équation de Helmholtz, on trouve

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (15.68)$$

Définissons maintenant la variable $x = kr$. En considérant maintenant R comme une fonction de x , on trouve l'équation différentielle suivante, dite *équation de Bessel* :

$$R'' + \frac{1}{x} R' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (15.69)$$

Le prime ' symbolise une dérivée par rapport à x et l'indice ν est égal à m dans le cas ci-haut. Dans ce qui suit on supposera que ν est un réel quelconque.

L'équation de Bessel est linéaire du deuxième ordre et donc admet deux solutions linéairement indépendantes. On peut utiliser la méthode de Frobenius (substitution d'un développement en série) pour en trouver les solutions : on pose

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (15.70)$$

Après substitution dans l'équation (15.69), on trouve $\alpha = \pm \nu$. Les deux solutions linéairement indépendantes sont appelées $J_\nu(x)$ (fonction de Bessel de première espèce) et $N_\nu(x)$ (fonction de Neumann, ou fonction de Bessel de deuxième espèce). Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j} \quad (15.71)$$

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (15.72)$$

Dans le cas où ν est un entier, on trouve $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ et donc la définition de $N_m(x)$ doit se faire en prenant la limite $\nu \rightarrow m$. On définit aussi les fonctions de Bessel de troisième espèce, ou *fonctions de Hankel*

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu \quad (15.73)$$

qui ne sont que des combinaisons linéaires des fonctions de Bessel et de Neumann et non de nouvelles solutions indépendantes de l'équation de Bessel.

On suppose généralement que l'argument des fonctions de Bessel est *positif* : en pratique, cet argument est proportionnel à la coordonnée radiale r et ne peut être négatif.

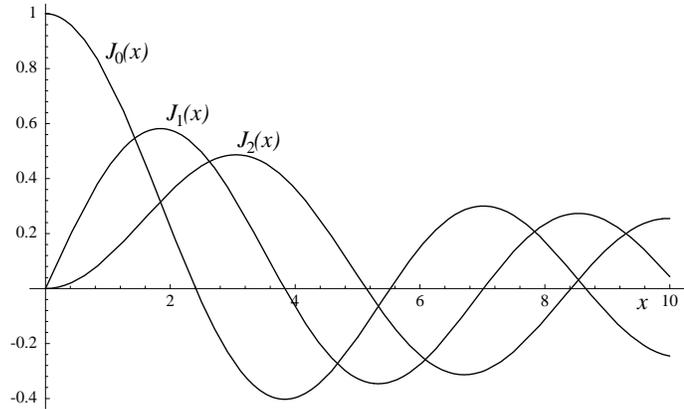


FIGURE 15.3
Tracé des fonctions de Bessel J_0 , J_1 et J_2 .

15.E.2 Propriétés

Comportement asymptotique

Pour x petit et x grand, les fonctions de Bessel et de Neumann se comportent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x \ll 1 \quad J_\nu(x) &\approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ N_\nu(x) &\approx \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\log(x/2) - 0.5772\dots] & (\nu = 0) \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & (\nu \neq 0) \end{cases} \\ x \gg 1 \quad J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4) \end{aligned} \quad (15.74)$$

Les fonctions J_ν ($\nu > 0$) sont régulières quand $x \rightarrow 0$, alors que les fonctions N_ν tendent vers l'infini. Pour x grand, les deux types de fonctions ont un comportement oscillant trigonométrique, fois une facteur décroissant comme $x^{-1/2}$.

Les fonctions de Hankel se comportent de la manière suivante à l'infini :

$$\begin{aligned} H^{(1)}(z) &\rightarrow i^{-m-1/2} \frac{e^{iz}}{\sqrt{\pi z/2}} \\ H^{(2)}(z) &\rightarrow -i^{m+1/2} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{\pi z/2}} \end{aligned} \quad (15.75)$$

L'utilité des fonctions de Hankel tient à ce que l'une d'entre elles ($H^{(1)}$) est régulière à l'infini si $\text{Im} z > 0$ pendant que l'autre ($H^{(2)}$) diverge, alors que le contraire se produit si $\text{Im} z < 0$. Dans les applications pratiques, l'argument z est soit imaginaire ou comporte une partie imaginaire, aussi petite soit-elle.

Relations de récurrence

Les fonctions de Bessel obéissent à des relations de récurrence :

$$\begin{aligned}\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} \Omega_{\nu}(x) \\ \Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) &= 2 \frac{d}{dx} \Omega_{\nu}(x)\end{aligned}\tag{15.76}$$

où le symbole Ω signifie J , N , $H^{(1)}$ ou $H^{(2)}$.

Racines et orthogonalité

La n^e racine de la fonction $J_{\nu}(x)$ est notée $x_{\nu n}$:

$$J_{\nu}(x_{\nu n}) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad x_{\nu n} > 0\tag{15.77}$$

On montre dans la théorie de Sturm-Liouville que l'ensemble des fonctions

$$f_n(r) \equiv J_{\nu}(x_{\nu n} r/a)\tag{15.78}$$

est orthogonal dans l'intervalle $[0, a]$:

$$\int dr r f_n(r) f_m(r) = \delta_{mn} \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2\tag{15.79}$$

On peut alors développer une fonction quelconque $f(r)$ dans cet intervalle en *série de Fourier-Bessel* :

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_{\nu}(x_{\nu n} r/a)\tag{15.80}$$

Les coefficients $A_{\nu n}$ peuvent alors être déterminés par la relation d'orthogonalité (15.79).

Représentation intégrale

À l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, on peut démontrer la *représentation intégrale* suivante des fonctions de Bessel :

$$J_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi} d\varphi \sin^{2\nu} \varphi e^{iz \cos \varphi}\tag{15.81}$$

Dans le cas $\nu = 0$, on trouve

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi e^{iz \cos \varphi}\tag{15.82}$$

15.E.3 Fonctions de Bessel modifiées

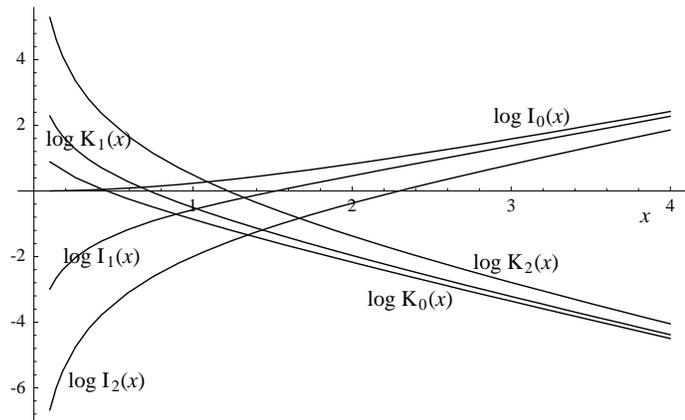
Il arrive que l'on doive considérer l'équation de Helmholtz avec une valeur négative de k^2 (c'est-à-dire une valeur imaginaire de k) :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (15.83)$$

Or, en introduisant la variable $y = ix$ dans cette équation, on retrouve l'équation de Bessel (15.69), où cependant le prime ' signifie une dérivée par rapport à y . Les solutions à cette équation sont donc les fonctions de Bessel avec argument imaginaire $y = ix$. Ce sont les *fonctions de Bessel modifiées*, définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_\nu &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\ K_\nu &= \frac{1}{2} \pi i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \end{aligned} \quad (15.84)$$

FIGURE 15.4
Tracé logarithmique des fonctions de Bessel modifiées $I_{0,1,2}$ et $K_{0,1,2}$.



Le comportement asymptotique de ces fonctions est

$$\begin{aligned} x \ll 1 \quad I_\nu(x) &\approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \\ K_\nu(x) &\approx \begin{cases} -[\log(x/2) + 0.5772\dots] & (\nu = 0) \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^\nu & (\nu \neq 0) \end{cases} \\ x \gg 1 \quad I_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x [1 + O(1/x)] \\ K_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(1/x)] \end{aligned} \quad (15.85)$$

F Méthodes de solution de l'équation de Laplace

15.F.1 Propriétés des fonctions harmoniques

Dans un milieu dépourvu de charge, le potentiel Φ satisfait à l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ avec certaines conditions aux limites imposées le plus souvent par des conducteurs ou un champ électrique externe. Cette équation jouit des propriétés suivantes :

1. L'équation est linéaire. Donc si Φ_1 et Φ_2 sont des solutions de l'équation de Laplace dans un volume donné, alors la combinaison $a\Phi_1 + b\Phi_2$ l'est aussi (a et b sont des constantes).
2. Dans un domaine borné par une surface sur laquelle Φ est spécifié (conditions aux limites de Dirichlet), la solution de $\nabla^2\Phi = 0$ est *unique*. Si c'est le champ électrique \mathbf{E} qui est spécifié sur la surface au lieu de Φ (conditions aux limites de Neumann), la solution de $\nabla^2\Phi = 0$ est unique modulo une constante additive. Pour démontrer ce théorème d'unicité, utilisons l'identité de Green :

$$\oint_S \mathbf{da} \cdot f \nabla g = \int_V d^3r (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \quad (15.86)$$

qui se prouve par le théorème de la divergence. Ensuite, substituons $f = g = \Phi_1 - \Phi_2$, où Φ_1 et Φ_2 sont deux solutions hypothétiques du même problème aux limites. Quelles que soient les conditions aux limites choisies (Dirichlet ou Neumann), le produit $f \nabla f$ s'annule sur la surface et $\nabla^2 f = 0$ dans V . La première identité de Green donne donc

$$\int_V d^3r (\nabla f)^2 = 0 \implies f = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{const.} \quad (15.87)$$

Cette constante est évidemment zéro dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet

3. La solution Φ n'admet aucun maximum ou minimum dans le domaine où $\nabla^2\Phi = 0$. Dans le cas contraire, il y aurait un flux électrique non nul sur une sphère infinitésimale entourant l'extrémum, ce qui impliquerait une charge non nulle à l'intérieur, ce qui n'est pas le cas puisque $\nabla^2\Phi = 0$. On en tire la conclusion qu'il ne peut y avoir de configuration statique de charges ponctuelles qui soit stable, car aucune de ces charges ne peut trouver un minimum local de son énergie potentielle.

Méthode des images

La *méthode des images* permet de résoudre certains problèmes où des charges sont mises en présence de conducteurs. Elle consiste à remplacer la charge induite sur les surfaces conductrices par des charges ponctuelles fictives (les images) situées dans des régions cachées par ces conducteurs. Par exemple, considérons une charge q placée à une distance a d'un plan conducteur infini (c.-à-d. de dimension $\gg a$). Calculons la force agissant sur cette charge.

Choisissons les axes x et y dans ce plan, avec origine vis-à-vis la charge. Alors \mathbf{E} doit être normal au plan à $z = 0$ et être dominé par la contribution de q près de $(0, 0, a)$. On s'assure de cette condition si on place une image de charge $-q$ à la position $(0, 0, -a)$. Le potentiel est alors

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (15.88)$$

Le plan $z = 0$ est alors une équipotentielle à $\Phi = 0$ et a le comportement correct autour de $(0, 0, a)$. Il s'agit donc de la solution unique. Au loin, le système ressemble à un dipôle de moment $\mathbf{d} = 2aq\mathbf{z}$. L'énergie potentielle de la charge q en présence du plan est $U = -q^2/(2a)$. La force exercée sur la charge est donc donnée par la dérivée par rapport à a de l'énergie potentielle :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{q^2}{2a^2}\mathbf{z} \quad (15.89)$$

Cette force n'est pas égale à la force de Coulomb entre l'image et la charge ($q^2/4a^2$) : la raison en est qu'il est impossible de déplacer la charge sans que l'image soit également déplacée ; la notion de source indépendante de la charge-test ne s'applique alors pas et $\mathbf{F} \neq q\mathbf{E}$. Dans ce genre de problème, il faut calculer la force à partir du gradient de l'énergie potentielle.

15.F.2 Séparation des variables

Nous avons vu que la solution de l'équation de Laplace satisfaisant à des conditions aux limites complètes, c'est-à-dire la donnée de Φ ou de \mathbf{E} sur toute la surface ou frontière entourant le volume considéré, est unique. Cependant, si on considère une partie seulement des conditions aux limites, c'est-à-dire sur une partie seulement de la surface entourant le domaine d'intérêt, alors la solution n'est pas unique. Si Φ est égal à zéro sur cette partie de la frontière, l'ensemble des solutions forment un espace vectoriel sur lequel on peut choisir une base, de préférence orthonormale. La solution unique recherchée quand on tient compte de toutes les conditions aux limites est alors une combinaison linéaire unique de ces fonctions de base.

La méthode de séparation des variables consiste à trouver une base telle que les fonctions de base sont des produits de fonctions de chacune des 3 coordonnées et qu'une partie des conditions aux limites peut être satisfaite avec les fonctions de base elles-mêmes, ce qui réduit le nombre de vecteurs de base à considérer. C'est la géométrie de la frontière qui détermine le système de coordonnées à utiliser.

15.F.3 Séparation des variables en coordonnées cartésiennes

Dans ce cas, l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (15.90)$$

Nous cherchons des solutions *particulières* (les fonctions de base mentionnées ci-haut) sous la forme d'un produit de fonctions à une variable :

$$\Phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (15.91)$$

Appliquée à une fonction de cette forme, l'équation de Laplace devient

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (15.92)$$

Cette équation étant valide pour toutes valeurs de x , y et z , chacun des termes doit être constant :

$$\frac{X''}{X} = a^2 \quad \frac{Y''}{Y} = b^2 \quad \frac{Z''}{Z} = -a^2 - b^2 \quad (15.93)$$

Nous avons écrit des constantes au carré par convenance, sans supposer nécessairement que a^2 et b^2 sont des nombres réels positifs : en réalité, a et b peuvent être complexes. Ce sont les conditions aux limites qui imposeront des restrictions sur a et b .

La solution correspondant à des valeurs particulières de a et b est alors

$$\Phi(\mathbf{r}) = C(a, b) e^{\pm ax} e^{\pm by} e^{\pm iz \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (15.94)$$

où $C(a, b)$ est une constante quelconque. Dans chaque facteur, le signe $+$ ou $-$ peut être choisi : il y a donc 8 solutions indépendantes pour chaque valeur de a et b . Les fonctions $\cosh(ax)$ et $\sinh(ax)$ peuvent être utilisées au lieu de $e^{\pm ax}$. De même, $\cos(ax)$ et $\sin(ax)$ peuvent être utilisés si $a = i\alpha$ est imaginaire.

Exemple : potentiel dans une boîte

Une boîte de dimensions a par b par c (dans les directions x , y et z respectivement) est maintenue à un potentiel nul sauf sur la face $z = 0$ qui est maintenue à $\Phi = V$. Trouvons Φ à l'intérieur de la boîte.

L'approche à suivre est de trouver une base de solutions de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites $\Phi = 0$ à $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ et $z = c$. Ensuite, il faut trouver la combinaison linéaire unique des fonctions de base qui satisfait à la condition $\Phi(x, y, 0) = V$. On écrit la décomposition $\Phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$. Les conditions imposées aux fonctions X , Y et Z sont

$$X(0) = X(a) = 0 \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad Z(c) = 0 \quad (15.95)$$

Les solutions sont donc

$$X_m(x) = \sin(m\pi x/a) \quad Y_n(y) = \sin(n\pi y/b) \quad m, n \in \mathbb{N}^+ \quad (15.96)$$

et

$$Z_{m,n}(z) = \sinh(\gamma_{mn}(c-z)) \quad \gamma_{mn}^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2) \quad (15.97)$$

Nos fonctions de base sont alors

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn}(c-z)) \quad (15.98)$$

Ces fonctions ne sont pas normalisées. Toutes ces fonctions satisfont aux conditions aux limites sur toutes les faces sauf sur $z = 0$. De plus, elles sont orthogonales. On cherche donc une combinaison linéaire telle que

$$\sum_{m,n} c_{mn} \Phi_{mn}(x, y, 0) = V \quad \forall x, y \quad (15.99)$$

Définissons le produit scalaire des fonctions sur le plan xy comme

$$\langle f | g \rangle = \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y, 0)^* g(x, y, 0) \quad (15.100)$$

On montre facilement (les intégrales sont élémentaires) que

$$\langle \Phi_{mn} | \Phi_{rs} \rangle = \frac{1}{4} ab \sinh^2(\gamma_{mn}c) \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (15.101)$$

Si on prend le produit scalaire de Φ_{rs} avec la condition aux limites (15.99), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{rs} | \Phi_{rs} \rangle c_{rs} &= \langle \Phi_{rs} | V \rangle \\ &= \frac{2a}{r} \frac{2b}{s\pi} V \sinh(\gamma_{mn}c) \end{aligned} \quad (15.102)$$

(ce n'est que dans cette dernière équation qu'on a supposé que V est une constante). On conclut donc que

$$c_{rs} = \frac{16V}{rs\pi^2 \sinh(\gamma_{mn}c)} \quad (15.103)$$

Nous avons donc trouvé les coefficients de la combinaison linéaire unique qui satisfait à toutes les conditions aux limites. Le problème est résolu.

15.F.4 Séparation des variables en coordonnées sphériques

Dans ce cas l'équation de Laplace s'écrit (cf. éq. (15.64))

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (15.104)$$

On cherche des solutions particulières du type

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi) \quad (15.105)$$

Profitons de notre expérience en mécanique quantique pour accélérer notre analyse : l'opérateur du carré du moment cinétique L^2 s'écrit, à un facteur multiplicatif \hbar^2 près, comme suit

$$L^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (15.106)$$

et alors le Laplacien est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \quad (15.107)$$

Appelons $Y(\theta, \varphi) = P(\theta)Q(\varphi)$ la partie angulaire de notre solution particulière. L'équation de Laplace devient alors (multipliée par r^2 et divisée par Φ) :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{1}{Y} \mathbf{L}^2 Y = 0 \quad (15.108)$$

Les deux membres de cette équation doivent être constants séparément. Dans le cas du deuxième terme, on connaît la solution : il s'agit des harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (15.109)$$

qui sont les fonctions propres du carré du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (15.110)$$

L'équation radiale devient alors

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1)R = 0 \quad (15.111)$$

Les solutions de cette équation sont des puissances :

$$R(r) = r^l \quad \text{où} \quad R(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \quad (15.112)$$

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation de Laplace est

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \left(A_l r^l + \frac{B_l^m}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (15.113)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie azimutale, seuls les termes avec $m = 0$ contribuent :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (15.114)$$

Notez que les constantes A_l et B_l ne sont pas les mêmes ici que dans l'équation précédente.

Si on désire faire abstraction d'une connaissance quelconque de la mécanique quantique, alors il faut démontrer de manière indépendante la solution générale (15.113). Indiquons plutôt comment démontrer la solution générale (15.114) dans le cas d'une symétrie azimutale, ce qui est plus simple. On suppose alors que la solution est de la forme $\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. La séparation des variables nous donne l'équation (15.111) pour la fonction radiale, où la constante l est à priori quelconque. Les solutions $R(r)$ sont les mêmes que ci-haut. La fonction Θ , elle, satisfait à l'équation de Legendre (15.61) lorsqu'on l'exprime en fonction de $t = \cos \theta$. Des solutions à cette équation existent pour toutes les valeurs réelles de l , mais c'est uniquement quand l est un entier non négatif que ces solutions sont finies à $\cos \theta = \pm 1$, ce qui est requis ici. Dans ce cas, les solutions sont les polynômes de Legendre et on trouve en fin de compte la solution générale (15.114).

Exemple : potentiel autour d'une sphère métallique dans un champ uniforme

Une sphère conductrice est placée dans un champ électrique uniforme. Trouvons comment l'introduction de cet objet perturbe le potentiel électrique.

Dans le but de minimiser son énergie, la sphère conductrice va accumuler des charges négatives dans la direction $-z$ et des charges positives dans la direction $+z$, de façon à créer une distribution dipolaire induite. Voyons comment ceci fonctionne quantitativement. On sait que le potentiel à l'infini a la forme $\Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ ou encore $\Phi = -E_0 r P_1(\cos \theta)$. En raison de la symétrie azimutale, on écrit la solution sous la forme (15.114). Quand $r \rightarrow \infty$, seul P_1 doit contribuer et donc $A_l = 0$ pour $l \neq 1$ et $A_1 = -E_0$. D'autre part, Φ doit être constant sur la sphère ($r = a$) :

$$A_1 a \cos \theta + \sum_l \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) = const. \tag{15.115}$$

Pour que cette identité soit valide $\forall \theta$, il faut que les coefficients des puissances de $\cos \theta$ soient identiques de part et d'autre :

$$B_l = 0 \quad \text{si } l > 1 \quad -E_0 a + B_1/a^2 = 0 \quad B_0/a = const. \tag{15.116}$$

La solution est donc

$$\Phi(\mathbf{r}) = -E_0(r - a^3/r^2) \cos \theta + B_0/r \tag{15.117}$$

On voit que $B_0 = q$, la charge nette déposée sur la sphère, c.-à-d. une donnée du problème. La dépendance supplémentaire en $1/r^2$ est celle d'un dipôle électrique induit par le champ externe. Le moment dipolaire correspondant a comme valeur absolue $p = E_0 a^3$. Nous aurions pu conclure dès le départ que la charge induite sur la sphère ne comporterait aucun moment multipolaire supérieur, pour la raison suivante : comme le champ extérieur dans lequel la sphère est plongée ne possède aucun gradient ou dérivée d'ordre supérieur, l'énergie électrostatique de la sphère ne peut être abaissée en créant un quadripôle induit (ou aucun moment d'ordre supérieur). De tels moments multipolaires sont alors inutiles et ne sont pas induits.

Exemple : charge ponctuelle dans une sphère conductrice

Une charge ponctuelle q est placée à une distance a du centre d'une sphère conductrice creuse de rayon b . Trouvons le potentiel partout (à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère) dans les cas $a < b$ (la charge est à l'intérieur de la sphère).

Travaillons en coordonnées sphériques, avec la charge située sur l'axe z . Le potentiel Φ satisfait à l'équation de Poisson $\nabla^2 \Phi = -4\pi q \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{z})$. La solution générale de cette équation inhomogène est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène $\nabla^2 \Phi = 0$. Écrivons donc $\Phi = \Phi_q + \Phi_s$, où $\Phi_q = q/|\mathbf{r} - a\mathbf{z}|$ est le potentiel créé par la charge ponctuelle et Φ_s est le potentiel créé par la charge induite sur la sphère. La charge induite sur la sphère se répartit de façon à ce que Φ soit constant sur la sphère. On suppose que la sphère est neutre (la charge induite totale est nulle). Comme Φ_q satisfait à l'équation de Poisson ci-haut, Φ_s doit satisfaire à l'équation de Laplace. On peut donc l'exprimer comme suit, à l'intérieur ($\Phi_s^{(int)}$) et à l'extérieur ($\Phi_s^{(ext)}$) :

$$\Phi_s^{(int)}(\mathbf{r}) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \Phi_s^{(ext)}(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \tag{15.118}$$

Nous avons utilisé la symétrie azimutale du problème et la condition que $\Phi_s^{(int)}$ doit être fini quand $r = 0$ et $\Phi_s^{(ext)}$ fini quand $r \rightarrow \infty$. D'autre part, d'après le développement (3.10) on peut écrire

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \begin{cases} q \sum_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) & (r < a) \\ q \sum_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & (r > a) \end{cases} \quad (15.119)$$

Sur la sphère ($r = b$) le potentiel total peut être écrit à la fois à l'aide de $\Phi_s^{(int)}$ et de $\Phi_s^{(ext)}$:

$$\begin{aligned} \Phi(b, \theta) &= \sum_l \left(A_l b^l + q \frac{a^l}{b^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l \frac{B_l + q a^l}{b^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (15.120)$$

Comme cette expression doit être une constante indépendante de θ , chaque coefficient de P_l doit être nul, sauf peut-être celui de P_0 . On a donc $A_l = -q a^l / b^{2l+1}$ et $B_l = -q a^l$, pour $l > 0$. Le potentiel de la sphère est alors $A_0 + q/b = B_0 + q/b$. Comme la sphère est neutre, le potentiel à l'infini doit être q/r : on en conclut que $A_0 = B_0 = 0$. La solution complète est donc

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{q}{a} + \sum_{l=1} \frac{q r^l}{a^{l+1}} (1 - (a/b)^{2l+1}) P_l(\cos \theta) & (r < a) \\ &= \frac{q}{r} + \sum_{l=1} \frac{q a^l}{r^{l+1}} (1 - (r/b)^{2l+1}) P_l(\cos \theta) & (a < r < b) \\ &= \frac{q}{r} & (r > b) \end{aligned} \quad (15.121)$$

Remarquez que le potentiel à l'extérieur de la sphère est isotrope, en dépit du fait que la distribution de charge sur la sphère et à l'intérieur de celle-ci n'est pas isotrope. C'est une propriété générale : le potentiel à l'extérieur d'une sphère conductrice sera toujours q/r si aucune charge n'est située à l'extérieur, qu'importe la distribution spatiale de la charge q à l'intérieur de la sphère. C'est une conséquence du théorème d'unicité où les conditions aux limites sont ici fixées sur la sphère et à l'infini.

15.F.5 Séparation des variables en coordonnées cylindriques

Dans ce cas l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (15.122)$$

On cherche des solutions particulières de la forme

$$\Phi(r, \varphi, z) = R(r)Q(\varphi)Z(z) \quad (15.123)$$

Alors l'équation de Laplace devient (multipliée par r^2 et divisée par Φ) :

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (15.124)$$

Le terme du milieu doit être constant, car il ne dépend que de φ :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = -n^2 Q \Rightarrow Q(\varphi) = e^{\pm in\varphi} \quad (15.125)$$

Notre équation devient ensuite (divisée par r^2)

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (15.126)$$

Le dernier terme doit maintenant être constant :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 Z \Rightarrow Z(z) = e^{\pm kz} \quad (15.127)$$

(Il se peut que k prenne des valeurs imaginaires). L'équation pour R se réduit donc à :

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (15.128)$$

En introduisant la variable $u = kr$ on obtient l'équation de Bessel :

$$u^2 R'' + uR' + (u^2 - n^2)R = 0 \quad (15.129)$$

Les solutions sont connues :

$$R(r) = J_n(kr) \quad \text{ou} \quad R(r) = N_n(kr) \quad (15.130)$$

Notez que l'ordre de la fonction de Bessel (ou de Neumann) est l'exposant angulaire n . La solution générale est donc

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{m,n} (A_{mn} J_n(k_m r) + B_{mn} N_n(k_m r)) (\cos(n\varphi) + C_{mn} \sin(n\varphi)) (\cosh(k_m z) + D_{mn} \sinh(k_m z)) \quad (15.131)$$

On a supposé que k peut prendre un ensemble discret de valeurs $\{k_m\}$. Si k prend des valeurs imaginaires, alors on doit remplacer les fonctions de Bessel et de Neumann par les fonctions de Bessel modifiées I_n et K_n .

Le cas où $k = 0$ doit être considéré séparément. Le potentiel ne dépend alors pas de s et le problème est réduit à celui de l'équation de Laplace sur le plan xy . L'équation radiale est dans ce cas

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0 \quad (15.132)$$

dont la solution est $R(r) = r^{\pm n}$, sauf si $n = 0$, dans lequel cas elle est $R = \text{const.}$ ou $R = \log r$. On peut donc écrire la solution générale :

$$\Phi(r, \varphi, z) = A_0 + B_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) (\cos(n\varphi) + C_n \sin(n\varphi)) \quad (15.133)$$

G Vecteurs et tenseurs

L'objectif de cette annexe est d'introduire les notions de composantes covariantes et contravariantes de vecteurs et de tenseurs. Pour rendre la discussion plus intuitive, nous travaillerons dans l'espace cartésien à trois dimensions, mais les concepts seront immédiatement généralisables à l'espace-temps quadri-dimensionnel.

Composantes covariantes et contravariantes

Considérons une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dans l'espace tridimensionnel. Cette base n'est pas nécessairement orthonormée. Tout vecteur \mathbf{A} peut être décomposé selon cette base :

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = A^i \mathbf{e}_i \quad (15.134)$$

où on applique la convention de sommation sur les indices répétés. Les 3 quantités A^i sont appelées *composantes contravariantes* du vecteur \mathbf{A} . La raison de cette appellation est donnée dans ce qui suit, et est au coeur de la présente annexe. Supposons qu'on procède à un changement de base, c'est-à-dire qu'on définit une nouvelle base \mathbf{e}'_i :

$$\mathbf{e}'_i = S_i^j \mathbf{e}_j \quad (15.135)$$

où la matrice S est non singulière (indice de rangée à gauche, indice de colonne à droite). Le vecteur s'exprime également dans l'une ou l'autre base :

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A'^i \mathbf{e}'_i = A'^i S_i^j \mathbf{e}_j \quad (15.136)$$

Donc $A^j = A'^i S_i^j$. Les composantes A^j doivent s'exprimer en fonction des composantes A'^i par l'intermédiaire d'une matrice \tilde{S} :

$$A'^j = \tilde{S}^j_i A^i \quad (15.137)$$

qui n'est autre que la transposée de l'inverse de S :

$$\tilde{S}^j_i S_k^i = \delta_k^j \quad \text{ou} \quad \tilde{S} S^T = 1 \quad (15.138)$$

Autrement dit, les composantes contravariantes se transforment à l'aide de la matrice inverse transposée de celle utilisée pour transformer les vecteurs de base (d'où l'expression *contravariante*).

À la base $\{\mathbf{e}_i\}$ on associe une *base duale* $\{\mathbf{e}^i\}$ (l'indice est maintenant en haut) définie par la relation

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (15.139)$$

Comme la relation entre une base et sa duale est la même pour toutes les bases ($\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'^i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_j^i$) et qu'elle a la même structure que la relation (15.136), on en déduit immédiatement que les vecteurs de la base duale se transforment aussi comme les composantes contravariantes lors d'un changement de base :

$$\mathbf{e}'^j = \tilde{S}^j_i \mathbf{e}^i \quad (15.140)$$

Autrement dit, la base duale est contravariante.

Tout vecteur peut également être représenté de manière unique sur la base duale, mais cette fois par des composantes dites *covariantes* :

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A'_i \mathbf{e}'^i \quad (15.141)$$

Il est maintenant évident que les composantes covariantes méritent ce nom parce qu'elles se transforment de la même manière que les vecteurs de base :

$$A'_i = S_i^j A_j \quad (15.142)$$

Les composantes covariantes s'obtiennent par projection du vecteur sur la base originale :

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (15.143)$$

Tenseurs

Si $\{\mathbf{e}_i\}$ est une base de l'espace vectoriel V , alors les produits $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ forment une base de l'espace produit tensoriel $V \otimes V$. on peut aussi utiliser la base duale, ou deux bases mixtes : $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$, $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$ et $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$. Dans cet espace produit, on définit des tenseurs de rang 2, caractérisés par des composantes à deux indices :

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad (15.144)$$

On constate immédiatement que, lors d'un changement de base, ces composantes se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= S_i^k S_j^l T_{kl} \\ T'^{ij} &= \tilde{S}^i_k \tilde{S}^j_l T^{kl} \\ T'^i_j &= \tilde{S}^i_k S_j^l T^k_l \\ T'_i^j &= S_i^k \tilde{S}^j_l T_k^l \end{aligned} \quad (15.145)$$

Par abus de langage, on donne le nom de tenseur aux composantes elles-mêmes, et on appelle T_{ij} un tenseur covariant, T^{ij} un tenseur contravariant, alors que les ensembles T_i^j et T^i_j sont qualifiés de *tenseurs mixtes*.

On définit généralement des tenseurs de rang N , sur l'espace produit tensoriel $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (N facteurs), qui comportent N indices. Un tenseur de rang un est un vecteur. Un tenseur de rang zéro est un scalaire (une quantité invariante, c'est-à-dire qui est indépendante de la base utilisée).

Tenseur métrique

La base $\{\mathbf{e}_i\}$ peut bien sûr être exprimée dans la base duale :

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \quad (15.146)$$

Les coefficients g_{ij} sont également les produits scalaires des vecteurs de base :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \delta_j^k = g_{ij} \quad (15.147)$$

La relation inverse s'exprime ainsi :

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad \text{où} \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_k^j \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij} \quad (15.148)$$

Comme les vecteurs de base \mathbf{e}_i et \mathbf{e}^i sont respectivement covariants et contravariants, les quantités g_{ij} et g^{ij} se transforment bien comme les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur de rang 2. On l'appelle le *tenseur métrique*.

Le tenseur métrique peut être utilisé pour passer d'une composante covariante à contravariante et vice-versa. Ceci est vrai (par définition) pour les vecteurs de base, mais aussi pour les composantes. Explicitement :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A^i g_{ij} \mathbf{e}^j &\implies A_j = g_{ij} A^i \\ \mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A_i g^{ij} \mathbf{e}_j &\implies A^j = g^{ij} A_i \end{aligned} \quad (15.149)$$

Plus généralement, le tenseur métrique peut être appliqué de cette manière à tout indice, covariant ou contravariant :

$$T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl} \quad , \quad T_i^j = g^{jk} T_{ik} \quad , \text{ etc.} \quad (15.150)$$

Contraction

On appelle contraction d'un indice covariant et d'un indice contravariant la somme sur les valeurs égales de ces indices, comme dans un produit scalaire. Ainsi, dans l'expression $A^i \mathbf{e}_i$, on dit que les deux indices sont contractés. Autre exemple : le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} s'exprime ainsi :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^i \mathbf{e}_i) \cdot (B_j \mathbf{e}^j) = A^i B_j \delta_i^j = A^i B_i \quad (15.151)$$

Les indices d'un tenseur de rang deux peuvent aussi être contractés : T^i_i .

En général, la contraction de deux indices mène soit à une quantité invariante, soit à une quantité de rang inférieur de deux à la quantité originale. Par exemple, d'un tenseur de rang 4 R_{iklm} (comme le tenseur de courbure géométrie riemannienne), on peut former un tenseur de rang deux par contraction : $R_{ik} = R^l_{ilk} = g^{ml} R_{mil k}$.