

# **La Mécanique Rationnelle**

## **Formation de base des scientifiques et des ingénieurs**

version 2004/2005



Professeur J.-Ph. Ansermet

Institut de Physique des Nanostructures

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
PHB-Ecublens, 1015 Lausanne

**La mécanique rationnelle**  
Formation de base des scientifiques et des ingénieurs

<b>Préface</b>	<b>3</b>
La mécanique et la formation scientifique, Cadrage historique, Cinématique rectiligne	
<b>1<sup>ère</sup> partie : Sensibilisations aux objectifs de la mécanique</b>	<b>15</b>
- La balistique élémentaire	17
- L'oscillateur harmonique	28
o Energie de l'oscillateur harmonique	40
- Sensibilisation au problème du chaos	45
<b>2<sup>ème</sup> partie : les bases de la mécanique newtonienne</b>	<b>54</b>
- La cinématique du point matériel	57
o Vecteurs, repères, coordonnées cylindriques, sphériques	60
o Les rotations	68
- La mécanique newtonienne	78
- Systèmes de points matériels, lois de conservation	83
- Energie, puissance, travail	91
<b>3<sup>ème</sup> partie : Pratique de la mécanique</b>	<b>100</b>
- Liaisons	102
- Systèmes ouverts	114
- Loi de la gravitation de Newton	117
- Les forces en électromagnétisme	130
- Forces de frottement	135
- Mouvement relatif	141
o Dynamique Terrestre	157
- Discussions qualitatives	168
- Collisions	178
<b>4<sup>ème</sup> partie : Le corps solide indéformable</b>	<b>191</b>
- Cinématique du solide indéformable	192
- Bases de la dynamique du solide	203
- Les effets gyroscopiques	208
- Tenseur d'inertie	215
- Mouvement avec axe de direction fixe	228
- Equations d'Euler	247
<b>5<sup>ème</sup> partie : Déformations</b>	<b>264</b>
- Systèmes linéiques	265
- Le tenseur des contraintes	279
- Les constantes élastiques	283
<b>6<sup>ème</sup> partie : Le formalisme de Lagrange</b>	<b>289</b>
- Les équations de Lagrange	290
- Applications diverses	297
- Les pendules couplés	313
- Principes variationnels	328
<b>7<sup>ème</sup> partie : La relativité restreinte</b>	<b>336</b>
- Cinématique Relativiste	394
- Aperçu de dynamique relativiste	357

**PREFACE*****La mécanique et la formation scientifique******Cadrage historique******Cinématique rectiligne***

## **La mécanique et la formation scientifique**

*« Les postulats de la mécanique tiennent en quelques lignes. Comme il ne s'agit pas plus de les démontrer que n'importe quel autre principe, un Cours de Mécanique rationnelle est une collection d'exemples qui leur servent d'illustration. Les Cours ne diffèrent donc que par le choix des exemples et l'esprit dans lequel on les traite, ce qui suffit à les rendre très dissemblables. »<sup>1</sup>*

L'Objectif d'un cours de mécanique est de savoir mettre sous forme mathématique une situation physique. Les expériences décrites dans un cours de mécanique font partie de la vie courante : chute sur un plan incliné, toupies, ressorts, pendules etc... Grâce à cette familiarité avec les phénomènes à décrire, toute l'attention peut se porter sur l'effort de mathématisation.

Ce traité s'adresse à des étudiants de première année, par la force des choses de niveaux de formation très variés. L'ordonnance des chapitres a pour but de captiver l'attention de ceux qui ont déjà des notions de mécanique, et en même temps prendre en charge ceux qui ont un bagage mathématique minimal. L'ambition première d'un cours de mécanique doit être de permettre aux étudiants à se familiariser avec l'emploi des mathématiques en tant que langage de l'ingénieur et du physicien. Selon le philosophe et historien des sciences Alexandre Koyré:<sup>2</sup>

" (...) on ne doit pas oublier que l'observation ou l'expérience, au sens de l'expérience spontanée du sens commun ne joua pas un rôle majeur - ou si elle le fit, ce fut un rôle négatif, celui d'obstacle - dans la fondation de la science moderne. La physique d'Aristote, et plus encore celle des nominalistes parisiens (14<sup>ème</sup> siècle)(...) était beaucoup plus proche de l'expérience du sens commun que celle de Galilée et de Descartes. Ce n'est pas "l'expérience", mais "l'expérimentation" qui joua - plus tard seulement - un rôle positif considérable. L'expérimentation consiste à interroger méthodiquement la nature; cette interrogation présuppose et implique un langage dans lequel formuler les questions, ainsi qu'un dictionnaire nous permettant de lire et d'interpréter les réponses. Pour Galilée, nous le savons bien, c'était en courbes, cercles et triangles, en langage mathématique ou même plus précisément en langage géométrique - non celui du sens commun ou de purs symboles - que nous devons parler à la nature et recevoir ses réponses. "

L'étude de la mécanique contribue à développer un esprit scientifique. L'étudiant au niveau universitaire se doit de passer de l'état d'utilisateur servile de quelques formules à celui **d'acteur** sachant générer des résultats dans un contexte nouveau et à celui de **juge** pouvant estimer les limites d'applicabilité des schémas théoriques qu'il invoque.

### **La mécanique comme préparation aux cours de mathématiques**

Souvent un cours de mécanique sert d'introduction ou de motivation aux notions et aux outils mathématiques qui seront présentés dans les cours d'analyse et d'algèbre linéaire. Il n'est pas forcément préférable d'avoir reçu un enseignement mathématique formel avant de rencontrer des situations où ce savoir mathématique devient nécessaire ! Par conséquent, de petites considérations mathématiques apparaissent naturellement dans ce traité, mais purement d'un

<sup>1</sup> H. Bouasse, 'Cours de mécanique rationnelle et expérimentale', Paris 1910

<sup>2</sup> disait (Histoire de la pensée scientifique, p.168-169)

pont de vue pragmatique et aussi furtif que possible. Cette mathématisation nécessite un entraînement et de l'encouragement. Il faut se souvenir que l'insistance mathématique de l'activité scientifique est une affaire vieille de 400 ans ! Galilée disait déjà :

" Philosophy is written in this grand book, the universe, which stands continually open to our gaze. But the book cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and to read the alphabet in which it is composed. It is written in the language of mathematics, and its characters are triangles, circles, and other geometric figures, without which it is humanly impossible to understand a single word of it; without these, one wanders about in a dark labyrinth".<sup>3</sup>

La science ne répond pas à la question 'pourquoi ?', mais 'comment ?'.<sup>4</sup> L'étude de la mécanique est particulièrement propice à l'illustration de ce point de vue sur les sciences. On y apprend en effet à utiliser un formalisme mathématique et à en déduire les conséquences physiques. C'est le cas par exemple avec la description du mouvement d'une toupie : "pourquoi ne tombe-t-elle pas ?" demande-t-on à la légère. Le traitement formel du problème du gyroscope remplace la question "pourquoi ?" par une description qui fait appel à des lois et des modèles.

### **Une introduction à des phénomènes physiques variés**

Il est important de s'habituer à l'utilisation des mathématiques, spécialement pour la description des phénomènes physiques plus complexes, car :

"Il s'avère qu'avec les sujets de physique de plus en plus avancés, les choses se déduisent mathématiquement beaucoup plus vite qu'elles ne peuvent être comprises en termes simples ou avec des concepts fondamentaux."<sup>5</sup>

Il est possible, dans le cadre de la mécanique rationnelle, de prendre connaissances de phénomènes divers, qui traditionnellement sont introduits dans des cours plus avancés. C'est ainsi qu'on peut parler d'oscillateurs harmoniques forcés en terme de réponse linéaire, qu'on peut examiner des effets de relaxation ou même d'hystérèse. Un problème fera voir une vision mécaniciste d'un « mode mou », concept des transitions de phases en physique du solide. A partir de l'effet Doppler relativiste, on évoquera l'effet Mössbauer et ses applications en magnétisme. La dynamique terrestre sera l'occasion d'introduire des méthodes de calcul des perturbations.

---

<sup>3</sup> Selon Dava Sobel, "Galileo's Daughter", Fourth Estate, London 1999

<sup>4</sup> ? in "Encyclopedia of Ignorance", Pergamon 1977

<sup>5</sup> Feynman, Lectures on Physics, I-20-6

## **Cadrage historique**

*Il faut reconnaître et apprécier le long chemin parcouru depuis les premières tentatives de description d'un phénomène aussi courant que la chute des corps à la surface de la Terre, passant par la formalisation de Newton, pour aboutir aux grands principes du 19<sup>ème</sup> siècle et la découverte du chaos au 20<sup>ème</sup> siècle. .*

### Aristote<sup>6</sup>

Diogène Laerte disait de lui qu'il avait un défaut de prononciation, que ses jambes étaient maigres, ses yeux petits et qu'il attirait l'attention par son accoutrement, ses bagues et sa coupe de cheveux.

Lui, c'est Aristote !

Aristote étudia avec Platon à Athènes pendant 20 ans. A 49 ans, il fonde le Lyceum. Alexandre lui donne un support financier considérable. Il aurait exigé des pêcheurs et des chasseurs du royaume d'informer Aristote de tous les faits qui pourraient l'intéresser. Il est amusant de constater qu'en fin du 20<sup>ème</sup> siècle, le Prix Nobel Pierre-Gilles de Gennes préconisait, dans un discours à la Sorbonne intitulé "De la fermeture éclair au laser", que les professeurs fassent des séjours dans l'industrie pour y découvrir les problèmes fondamentaux posés par la pratique industrielle.

Aristote écrivit beaucoup. En ce qui concerne la chute des corps, une analyse moderne des textes anciens ne permet pas de dire si, pour Aristote :

- les corps tombaient en proportion de leur poids
- le vide était impossible
- s'il existait un vide, tous les corps tomberaient à la même vitesse dans le vide.

A la mort d'Aristote, ses notes furent vendues à la librairie d'Alexandrie. Après le 2<sup>ème</sup> siècle de cette ère, peu de nouveaux textes furent produits. Seuls des commentaires et des encyclopédies voyaient le jour.

Du 7<sup>e</sup> au 10<sup>e</sup> siècle, les anciens documents étaient recopiés, perdus et altérés dans les monastères. Du 10<sup>ème</sup> au 12<sup>ème</sup> siècle, les textes anciens furent enseignés à nouveau. Les erreurs de copie et de traduction entraînèrent de grandes confusions. Les experts d'alors concentraient toute leur énergie à essayer de déterminer ce qui était vraiment dit dans les textes originaux. L'Église d'abord considéra avec suspicion les textes anciens ainsi redécouverts. Puis, grâce en particulier à Saint-Thomas d'Aquin, la conception aristotélicienne du monde prit part dans les visions chrétiennes instaurées par l'Église. Dès lors, toute attaque contre Aristote était une attaque contre l'Église elle-même.

A cause de ce long et tortueux processus de transmission des pensées et des travaux d'Aristote, Galilée pouvait citer Aristote sous le pire éclairage, lui faisant dire que le

---

<sup>6</sup> Source : Leon Cooper, Prix Nobel de Physique 1972, "An introduction to the meaning and structure of physics"

mouvement vers le bas d'une masse d'or ou de plomb, ou de n'importe quel objet pesant, est d'une rapidité en proportion de sa taille.

La "tabula rasa" de Descartes doit aussi être envisagée dans ce contexte d'explosion d'un carcan vieux de 500 ans où toute pensée, toute observation et toute connaissance était confinée à ce qui était écrit "dans Aristote". Descartes tenta de construire une vision du monde. Il vit l'univers tout entier sauf peut-être Dieu et l'âme humaine, comme une vaste machine. Dieu créa la matière et lui impartit le mouvement; depuis, le monde évolue selon les lois de la mécanique.

A la fin du XIV<sup>ème</sup> siècle, les concepts de la mécanique ont bien évolué par rapport à la vision aristotélicienne. Le tableau suivant suggère quelques points de repère.

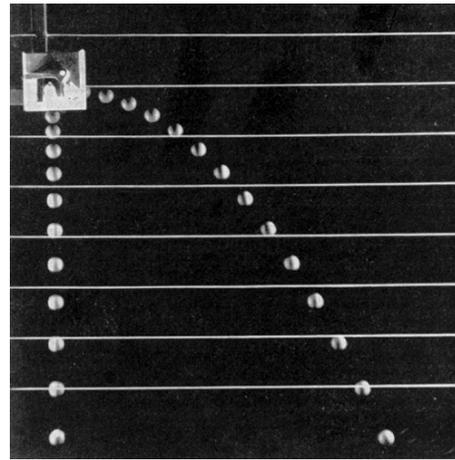
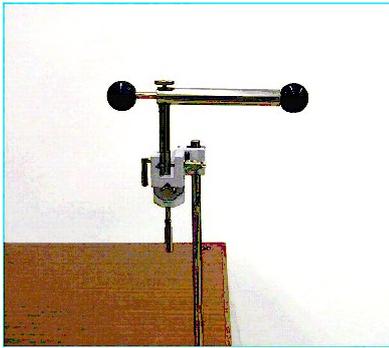
<b>Aristote</b>	<b>concepts à la fin du 16<sup>e</sup> siècle</b>	
Univers clos	Univers infini	Giordano Bruno
Univers plein	Univers vide	
L'espace a un point unique	L'espace est le même dans toutes les directions	Copernic
Particules tombent ou montent	Particules en mouvement uniforme sauf si elles entrent en collision	Descartes
Mouvement par rapport à l'espace	Mouvement par rapport à l'objet	Oresme

### La science de Galilée<sup>7</sup>

Galilée écrivit un traité sur le mouvement. Il s'agit d'un dialogue entre le maître, un observateur neutre et ouvert, et un représentant des vues traditionnelles.

Galilée définit le mouvement uniforme : vitesse constante et direction constante. C'est pour lui le mouvement "naturel". Toute déviation de cette uniformité sera attribuée à une force. Il définit le mouvement rectiligne uniformément accéléré. Pour lui, cette définition est utile, parce qu'elle représente un mouvement qui s'observe dans la nature : la chute des corps. Et il le prouve expérimentalement.

<sup>7</sup> L'université de Rice au Texas a préparé un site WEB à propos de [Galilée](http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/) et son temps. Ce site mérite le détour ! (<http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/>)



*Démonstration d'auditoire* : deux billes sont lâchées simultanément, l'une sans vitesse initiale, l'autre avec une vitesse initiale horizontale. Elles touchent le sol simultanément.

Galilée explique le mouvement d'un projectile en considérant les projections du mouvement (même si ce ne sont pas ses termes) selon deux directions perpendiculaires. Quand une balle est lancée horizontalement, elle ne subit aucune force horizontale, sa vitesse horizontale reste constante. On peut le constater sur l'image. En revanche, dans la verticale, elle n'a pas de vitesse initiale, elle suit un mouvement identique à une chute libre.

Galilée pose le problème du choix du référentiel, c'est-à-dire du corps solide par rapport auquel le mouvement se mesure :

*"un boulet est lâché du sommet d'un mât d'un navire avançant par rapport à la côte à la vitesse  $v_0$  constante. Vu du navire : le boulet fait une chute verticale, le long du mât. Vu de la côte : le boulet décrit une parabole."*

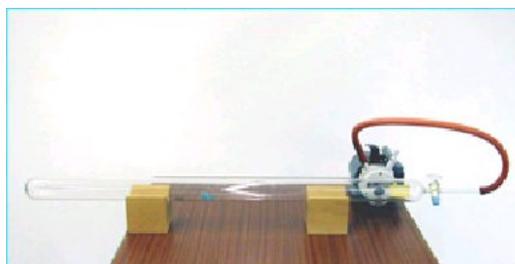
En faisant toutes sortes d'expériences avec des pendules, Galilée fit la découverte qui donna lieu aux conséquences les plus profondes. Une balle de plomb et une balle de liège de la même taille, pendues à des fils de même longueur, se balançaient à la même vitesse. Cela était étonnant, car après tout, les oscillations d'un pendule sont un peu comme une chute, et les corps lourds devraient tomber plus vite que les corps légers. Galilée commença à suspecter que ce fait "évident" pourrait ne pas être vrai. Ses doutes le conduisirent aux fameuses expériences de la tour penchée, d'où il fit tomber des balles de toutes sortes. Elles frappaient le sol presque simultanément. Un caillou arrivait au même moment qu'un boulet de canon, ou presque au même moment. Galilée perçut très vite la raison de cette inégalité des temps de chute : la résistance de l'air. Une fois de plus, il le prouva par l'expérience : il fit tomber des poids différents dans l'eau. La vitesse de chute variait grandement dans ce cas, car l'eau offrait une résistance plus élevée que l'air. De ces expériences il conclut que dans le vide, une plume tomberait aussi vite que du plomb. A son époque, cette affirmation devait rester sans preuve, car il était bien connu que la Nature avait horreur du vide. Il restait à son élève Torricelli de se débarrasser de ce préjugé aristotélicien.

## Les démonstrations d'auditoire

Professeur de mathématiques à l'université de Padoue, Galilée suscitait l'envie de ses collègues par ses leçons à l'auditorium "Maximum". En plus du groupe de ses étudiants réguliers, il avait de jeunes nobles de toute l'Europe assis à ses pieds. Parmi eux le futur prince de Suède, Gustave Adolphe. De ce maître, ils apprenaient la construction des ponts, la planification des ports, la fortification, et la construction d'artillerie. Il conçut pour eux un fort futuriste dont la forme polygonale permettait de couvrir l'entier du terrain, un fort sans aucun des angles morts connus pour être dangereux. Deux générations plus tard, un Français nommé Vauban connut la gloire en employant le même système.

Les collègues de Galilée lui en voulaient. Ils disaient de lui qu'il se comportait comme un charlatan ou un jongleur, qu'il ne possédait pas la moindre trace de dignité académique. Et en effet ses classes étaient un peu comme le stand d'un magicien de foire. Il sifflait en direction d'un tube d'orgue, qui lui répondait avec la même note : "RESONANCE" disait Galilée. Il faisait tirer au pistolet dans la montagne, et comptait les secondes entre le flash de l'explosion et le son. Ainsi les étudiants apprenaient que le son se déplace à des vitesses finies. Il construisit des dispositifs à calculer qui permettaient aux étudiants de s'épargner la moitié des travaux d'arithmétique. Plus tard, en tant qu'architectes ou ingénieurs, ils économisèrent les matériaux de construction avec des tubes creux, car Galilée leur avait démontré leur robustesse à l'aide d'os de chien.

Pour les étudiants, l'aspect le plus extraordinaire de son enseignement était la possibilité de voir les choses de leurs propres yeux, au lieu de simplement en entendre parler, philosophant pour ou contre Aristote. Galilée se moquait de telles pédanteries et de la croyance que la vérité pouvait être trouvée en se penchant sur de vieux manuscrits. Sa méthode était de chercher la vérité dans la nature.



*Démonstration d'auditoire : une plume et une pièce de monnaie tombent en même temps dans un tube évacué.*

Aristote avait établi une distinction claire entre les objets lourds, qui avaient tendance à descendre, et les corps légers, qui montaient. L'air par exemple, montait. L'idée de Galilée que l'air avait un poids était une révision révolutionnaire du sens commun et des apparences. Car il eut l'idée folle de peser le gaz invisible de la vie, qui ne pouvait même pas être senti, sauf si le vent soufflait. Son expérience était simple et ingénieuse. Il équilibra une vessie de porc pleine d'air avec un récipient contenant de l'eau. Ensuite, il creva la vessie. Le plateau de la balance descendit, indiquant que le poids de l'air était mesurable. Ces démonstrations devaient avoir l'air d'une révolution aux yeux de ses étudiants. Elles marquent le début de la physique expérimentale.

Les apparences sont trompeuses en astronomie et en physique. Les êtres humains ne sont pas naturellement équipés pour deviner les secrets de la nature. Cela nous rend tout aussi humble de le reconnaître que de réaliser que le lieu de séjour de l'homme n'est pas le centre de l'univers. La conclusion que les lois de la nature ne sont pas évidentes, qu'elles ne peuvent pas être conçues par simple raisonnement, était aussi riche d'enseignement que la révolution copernicienne. Une fois que cela fut accepté, la vieille manière de philosopher fut discréditée. Une fois que cela fut accepté, l'homme occidental commença son investigation et sa conquête de la nature.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> d'après "And There Was Light, The Discovery of the Universe", Rudolf Thiel

## Cinématique à une dimension

Considérons un point se déplaçant "sur un axe cartésien Ox. On notera volontiers sa position au cours du temps par  $x = x(t)$ . On entend par ceci que la position est repérée par la coordonnée  $x$ , que  $x$  varie dans le temps, et que  $x(t)$  est la fonction du temps.

Pour calculer la vitesse, on notera souvent  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , le symbole  $\Delta$  indique un accroissement de ..... (la grandeur qui suit).

De même pour l'accélération :  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Quelle valeur faut-il prendre pour  $\Delta t$  ? On peut définir une vitesse et une accélération **instantanée** en prenant la limite quand  $\Delta t$  tend vers zéro. Vos cours de maths vous diront pour quelles fonctions  $x(t)$  et  $v(t)$  les limites suivantes existent :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

On utilisera les notations suivantes :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

La notation  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  sera très utilisée. Pour visualiser un concept de mécanique (vitesse tangentielle, accélération centripète, théorème du moment cinétique), on fera recours à un  $\Delta t$  fini.

Il est fréquent que la dérivée par rapport au temps prenne des formes variées qu'il faudra maîtriser. On considère ici sans en donner le sens physique les exemples suivants :

$$x = x(t) = \cos(\omega t + \Phi)$$

$\omega, \Phi$  constants

$$x = \cos(\theta)$$

$\theta$  fonction du temps

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\text{où } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}\dot{\theta} \text{ et non pas } \frac{d}{dt}(\theta^2)$$

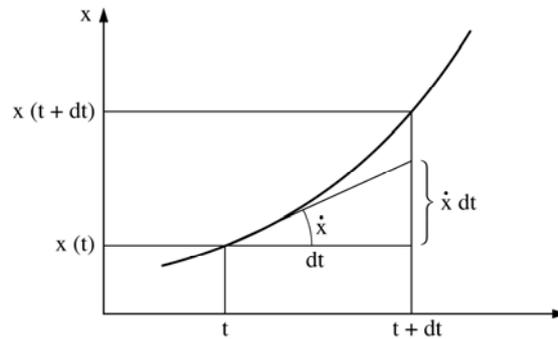
Ces fonctions sont de la forme :

$$x = f(g(t))$$

On reprendra ici la règle de dérivation de fonctions de fonctions. On part de :  $\dot{x} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$

d'où on tire  $x(t+dt) = x(t) + \dot{x} dt$  avec un abus de notation très fréquent en physique.

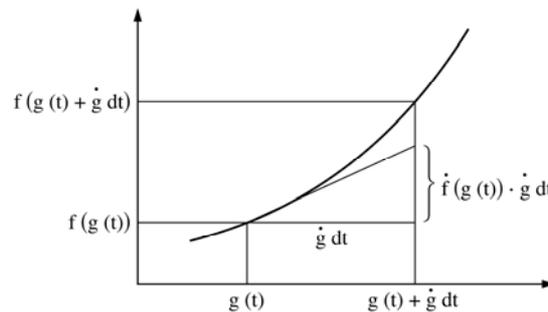
Un dessin permet de se représenter le sens de cette équation, qui sera bientôt connue comme « un développement limité au premier ordre. »



Pour la composition de fonctions on a alors, en appliquant cette règle pour f et pour g :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{f(g(t+dt)) - f(g(t))}{dt} = \\ &= \frac{1}{dt} \{ f[g(t) + \dot{g}(t) dt] - f(g(t)) \} = \\ &= \frac{1}{dt} \{ f[g(t)] + \dot{g}(t) dt \dot{f}[g(t)] - f(g(t)) \} = \\ &= \dot{g}(t) \dot{f}[g(t)] \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne est une application du développement limité appliqué à l'argument de f augmenté de  $\dot{g}(t) dt$ . Une représentation graphique permet de mieux saisir le sens des termes.



Pour les exemples de fonctions ci-dessus, cette règle de dérivation donne :

$$x = x(t) = \cos(\omega t + \Phi) \quad \dot{x} = -\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

$$x = \cos(\theta) \quad \dot{x} = -\dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad \dot{E} = I \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

### Le modèle du point matériel

Il arrive souvent qu'on puisse décrire le mouvement d'un objet et même prédire correctement son mouvement par les lois de la dynamique en associant l'objet à un point géométrique auquel on attribue la masse de l'objet. C'est ce qu'on appelle un **point matériel**.

La mécanique donne un cadre simple dans lequel la notion de modèle peut être perçue de façon tout à fait explicite. On devrait s'étonner de prime abord que les objets suivants puissent être considéré comme des « points » :

- une locomotive en ligne droite
- un homme qui se jette d'un pont attaché à un élastique
- une sphère d'acier au bout d'un fil très long

**Note** : Il s'agit d'un modèle ! C'est-à-dire que cela ne peut être qu'une approximation. On verra les limites de ce modèle quand on étudiera la mécanique du corps solide indéformable. Par exemple, si on considère une sphère au bout d'un fil, le modèle du point matériel doit être abandonné, quand la longueur du fil est de l'ordre de grandeur du diamètre de la sphère ou quand la précision de la prédiction est poussée assez loin.

### Le mouvement rectiligne uniforme

**Définition** : un point matériel se déplaçant en ligne droite, à une vitesse constante.

La **trajectoire** du point matériel est la droite.

On définit un axe de coordonnées  $x$  associé à la droite, un point  $O$  sur l'axe. La définition stipule  $dx/dt = \dot{x} = v_o = \text{constante}$ .

On cherche  $x = x(t)$ . On voit que  $x = v_o t + x_o$  satisfait la définition, avec  $x_o$  constant.

$x = v_o t + x_o$  est appelé **l'équation horaire** du point matériel.

L'équation horaire du point matériel est une équation paramétrique de sa trajectoire, où le paramètre est le temps ! (voir la série d'exercices "[paramétrer une courbe](#)").

### Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

**Définition** : un point matériel se déplace en ligne droite avec une accélération constante  $a_o$ .

On cherche  $x = x(t)$  tel que  $\ddot{x} = a_o$ .

On voit que  $x(t) = (1/2) a_o t^2 + v_o t + x_o$  satisfait la définition avec  $a_o$  et  $v_o$  constants.

A priori, toutes les valeurs de  $a_o$  et  $v_o$  sont permises.

En mécanique, elles sont spécifiées par les **conditions initiales**.

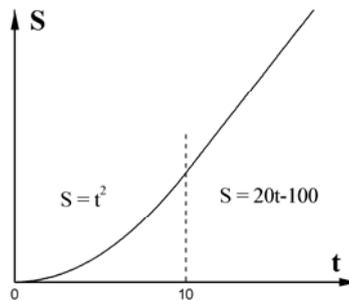
En effet on a, à  $t = 0$  :

$$x(0) = x_o$$

$$v(t) = a_o t + v_o \quad v(0) = v_o$$

### Graphiques

Une voiture se déplace en ligne droite de telle manière que sa position en fonction du temps est la fonction représentée par le graphe donné. Etablir le graphe de la vitesse en fonction du temps, et de l'accélération en fonction du temps.



### Tintin

Tintin roule en voiture sur une route rectiligne qui croise une voie de chemin de fer rectiligne perpendiculaire. Il est à une distance  $d$  de l'intersection quand il aperçoit un train qui avance vers le croisement à une vitesse  $V$  constante. La locomotive est à une distance  $L$  de l'intersection à ce moment-ci. Tintin avance à une vitesse  $v$  jusqu'à cet instant. Il veut s'assurer de passer l'intersection avant le train. Il décide alors d'accélérer. Son accélération  $a$  est constante.

Faire un schéma de la situation. Mettre les données sous forme mathématique. Donner la condition sur l'accélération  $a$  pour que Tintin arrive à passer l'intersection avant le train.

1<sup>ère</sup> partie :

# SENSIBILISATION AUX OBJECTIFS DE LA MECANIQUE

***La balistique élémentaire***

***L'oscillateur harmonique***

***Sensibilisation au problème du chaos***

ET SI ON PARLAIT  
DE VRAT MÉCANIQUE ?



Avant d'énoncer les grands principes de la mécanique sous la forme de postulat, il est bon de s'exposer à quelques problèmes de mécanique. Cela permet de réaliser les ambitions et les limitations du projet qui fait la quintessence de la mécanique rationnelle. Les problèmes de balistique dans le champ de la pesanteur et le modèle de l'oscillateur harmonique sont deux exemples simples qui permettent de mettre en scène les éléments de la démarche mécaniste. On part d'une loi physique, la deuxième loi de Newton sous la forme  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , et l'usage de coordonnées familières, les coordonnées cartésiennes, permettent d'exprimer la dynamique considérée sous la forme d'équations différentielles. Celle de l'oscillateur harmonique n'est pas triviale. On y voit la nécessité de développer des outils mathématiques pour intégrer de telles équations. L'exploitation des résultats sur la résonance d'un oscillateur harmonique met aussi en évidence la nécessité de développer un savoir-faire dans l'usage des nombres complexes. La balistique est un exemple immédiat, sans ces difficultés mathématiques. Il permet toutefois de montrer le rôle de la loi du mouvement et des conditions initiales pour prédire le mouvement en tout temps. On a ainsi accès à un exemple simple de déterminisme simple.

Un exemple de loi physique donné sous la forme d'une série permet d'analyser la complexité qui peut surgir de lois de prime abord déterministe. Il s'agit là d'un aperçu sur le chaos, juste pour garder les esprits ouverts sur les complexités qui peuvent surgir d'une modélisation simple.

## La balistique

*Le premier exemple de mécanique sera celui de la trajectoire d'objets modélisables en tant que point matériel, soumis à l'effet de la pesanteur : un champ de force constant. La loi « Force = masse \* accélération » sera supposée connue, du moins dans le cadre d'une telle application rudimentaire.*

*La balistique élémentaire donne l'occasion de passer d'une description à une dimension d'un problème de mécanique à une première appréhension d'un problème à deux dimensions. La description cinématique se fait en coordonnées cartésiennes, donc reste très simple. La notion de projection est immédiate. Les habitudes prises éventuellement dans un enseignement antérieur, qui consiste à inclure les repères dans la définition du problème, sont à abolir. Au fil des leçons, l'étudiant prendra l'habitude de les choisir.*

*La balistique donne aussi l'occasion d'illustrer la notion la plus élémentaire du déterminisme : avec une loi physique et des conditions initiales, on prédit l'état du système, en tout temps.*

### Projectile sous l'effet de la pesanteur

*L'objectif formel de cette première approche de la mécanique est de donner un exemple d'application de la deuxième loi de Newton sous la forme  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$  en coordonnées cartésiennes.*

#### Etape 1 : loi de la dynamique

Dans la section précédente, nous nous sommes limité à la donnée de mouvements spécifiés par leur vitesse et leur accélération. Il s'agissait donc de considération purement cinématique. Maintenant nous voulons conduire une analyse de la dynamique d'un système. Pour cela, nous avons besoin d'une loi qui stipule comment un système évolue quand il est soumis à une ou plusieurs forces. Ainsi, nous invoquons une loi physique, connue comme la deuxième loi de Newton :<sup>4</sup>

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Nous verrons plus loin dans le cours comment utiliser cette loi en toute généralité. Ici, nous prendrons l'approche de Galilée, qui consistait à analyser le mouvement dans deux directions perpendiculaires de l'espace : la verticale et l'horizontale.

#### Etape 2 : modèle de force

On observe que l'attraction terrestre donne lieu à une force verticale ressentie par un point matériel de masse  $m$  qui est proportionnelle à la masse  $m$ . La constante de proportionnalité est  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ . Galilée avait déjà observé que cette force était proportionnelle à la masse, en observant le mouvement de pendules. Cette description d'une observation approximative est souvent appelée loi phénoménologique. Il ne s'agit que d'un modèle. Nous verrons que la rotation de la Terre implique une variation systématique du  $g$  apparent, du pôle à l'équateur. De même, la présence d'une grotte ou d'une montagne peut changer la valeur de  $g$ .

---

<sup>4</sup> R. Feynman : "The character of a physical law", MIT press 1965

L'importance de tels effets dépend du degré de précision avec lequel on veut bien travailler. Enfin, si le projectile s'éloigne considérablement de la Terre, il faudra se référer à la loi de la gravitation de Newton, car l'attraction diminue comme le carré de la distance au centre de la Terre.

Faut-il invoquer d'autres forces ? Dans une première étape, notre modèle suppose que l'air n'agit pas ou seulement de façon négligeable sur le mouvement.

### Etape 3 : point matériel

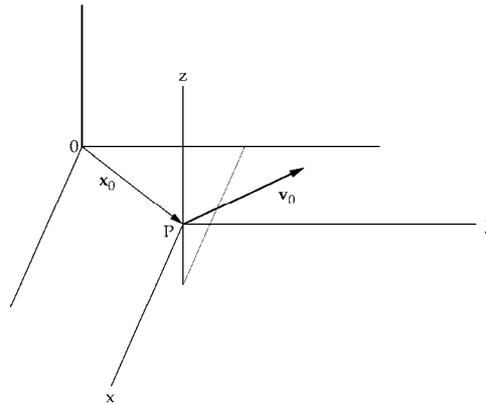
On décrit l'objet considéré comme un point matériel de masse  $m$ . Il subit donc une seule force :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g}$$

$\mathbf{g}$  est un vecteur, sa direction est verticale vers le bas. Son module (sa grandeur) vaut  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

### Etape 4 :

Cette étape constitue souvent la première étape, les autres faisant partie de la donnée, ou étant implicites. Un dessin permet de communiquer au lecteur de la résolution du problème plusieurs des éléments d'information sans recourir à de longues phrases. Les conventions graphiques sont souvent facilement reconnues.



Dans cet exemple, on va d'abord être naïf et prendre un repère mal commode, c'est-à-dire qui rend les équations assez compliquées. Ce sont des choses qui arrivent dans la pratique. On suppose une situation physique dans laquelle le point matériel au temps  $t=0$  est au point P, avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

Le système d'axes cartésiens centré en O n'apporte rien. Alors on choisit de prendre celui

centré en P où P est au bout de  $\vec{x}_0 = \vec{OP}$ . Dans ce repère, à  $t = 0$

$$\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \end{pmatrix}$$

### Etape 5

Pour chaque direction de l'espace (Ox, Oy, Oz) la force dans cette direction est égale à la masse fois l'accélération dans cette direction. Plus loin, on verra que cela revient à projeter mathématiquement la loi  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g}$  dans le repère associé aux axes cartésiens. On obtient ainsi les **équations du mouvement**

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = -gm$$

Très souvent dans le cadre de ce cours, l'obtention des équations du mouvement sera considérée comme l'accomplissement de l'analyse du problème. Il arrive très souvent que la résolution des équations du mouvement ne soit pas possible, ou bien nécessite un bagage mathématique qu'on n'a pas, ou bien encore, ne peut être réalisé que numériquement.

### Etape 3 : intégration des équations du mouvement

Ce cours commence par l'exemple de la balistique élémentaire et les oscillateurs harmoniques parce que ces deux exemples permettent d'aller jusqu'au bout. L'étudiant peut ainsi pleinement apprécier les objectifs de la mécanique.

Il est important de réaliser que les équations du mouvement génèrent une famille de mouvements possibles. La situation est assez triviale en balistique : on peut avoir un mouvement vertical, ou bien une parabole. On peut facilement s'imaginer que les équations du mouvement pour un pendule constitué d'une masse ponctuelle au bout d'un fil sans masse donnent lieu à des familles de solutions moins triviales. On pourrait avoir le mouvement pendulaire plan, bien familier. On peut aussi avoir un mouvement complexe à trois dimensions. Et enfin, en lançant la masse avec juste la bonne vitesse horizontale, on peut obtenir un mouvement circulaire plan ! Le type de mouvement qu'on obtient peut varier, non pas parce que la dynamique change (de nouvelles forces ne sont pas introduites), mais par le choix des conditions initiales.

En résumé, pour résoudre le problème complètement, il faut se donner des **conditions initiales**. Celles-ci sont par exemple données en spécifiant, à un instant donné, la vitesse et la position. On supposera par exemple, au temps  $t=0$ , une vitesse  $\vec{v}_o$  et une position  $\vec{x}_o$ .

Les équations du mouvement sont des équations différentielles. Ici, on prend l'approche qui consiste à se poser la question élémentaire: "quelle est la fonction du temps  $x(t)$ ,  $y(t)$  ou  $z(t)$  telle que sa dérivée seconde par rapport au temps égale ...", le second membre correspondant. Il est facile de voir que la solution a la forme :

$$x(t) = v_{ox} \cdot t + x_o = v_{ox} \cdot t$$

$$y(t) = v_{oy} \cdot t + y_o = v_{oy} \cdot t$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oz} \cdot t + z_o = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oz}t + z_o$$

La solution prend la forme d'une **équation paramétrique de la trajectoire**, où  $t$  est le paramètre. La trajectoire est une parabole. Pour éliminer le temps, on tire  $t$  de  $y$  et pose :

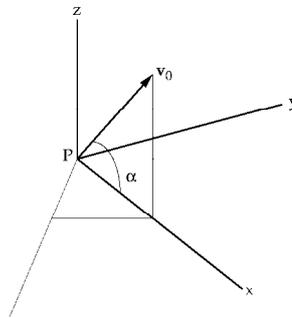
$$\frac{x}{y} = \frac{v_{ox}}{v_{oy}}$$

$$z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{y}{v_{oy}} \right)^2 + v_{oz} \cdot \left( \frac{y}{v_{oy}} \right)$$

On trouve ainsi une parabole dans le plan défini par  $\frac{x}{y} = \frac{v_{ox}}{v_{oy}}$ . Certains seront surpris que ce résultat ne soit pas aussi simple que ce qu'ils ont peut-être été habitués à voir. Pourquoi?

Cela vient du choix du système de coordonnées.

Pour retrouver une forme de solution plus familière, on peut choisir un système de coordonnées de telle manière que le plan Oxz contienne le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$



Dans ce repère,  $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ 0 \\ v_{oz} \end{pmatrix}$

$$m\ddot{x} = 0 \quad x(t) = v_{ox} \cdot t$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad y(t) = 0$$

$$m\ddot{z} = -gm \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{oz} \cdot t$$

On a ainsi obtenu une expression mathématique synthétique qui rend compte de l'observation. Son intérêt est essentiellement historique : la hauteur d'une balle qui tombe sans vitesse initiale ( $v_{ox} = 0$ ) est la même en tout temps que celle d'une balle qui a une vitesse initiale horizontale ( $v_{ox} \neq 0$ ).

Pour passer de l'équation paramétrique de la trajectoire à sa forme cartésienne, utilisons  $x = x(t)$  pour écrire  $t$  en fonction de  $x$  :

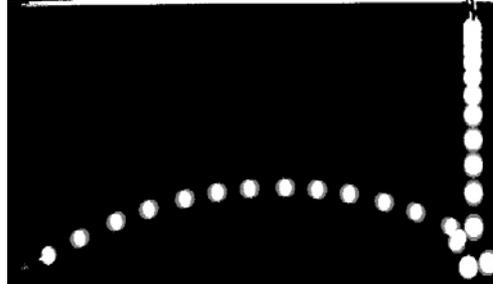
$$y = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_{ox}} \right)^2 + v_{oz} \cdot \left( \frac{x}{v_{ox}} \right)$$

A partir de ce résultat, toutes sortes de questions peuvent être analysées :

- jusqu'où ira le projectile ?
- quelle est l'inclinaison de  $\mathbf{V}_0$  pour une distance de tir optimale ?
- etc...

Démonstration d'auditoire : une table à air est légèrement inclinée, le grand bord restant horizontal. Deux plots sont lâchés en même temps aux deux coins opposés de la table. On observe que le plot qui a une vitesse initiale non nulle, percute le plot en chute libre pour autant que la vitesse initiale pointe vers l'autre plot. On observe aussi l'écart vertical de plus en plus grand entre deux images du plot, alors que l'écart horizontal est constant entre deux images



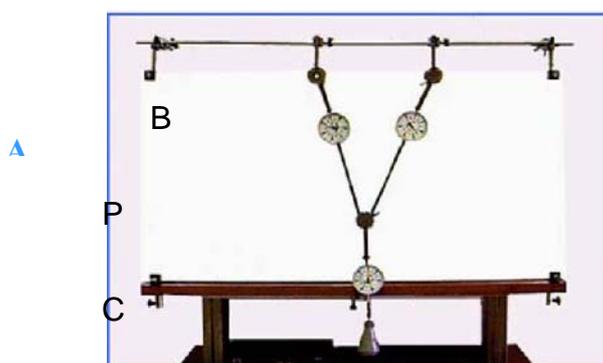
### La loi du parallélogramme des forces

*“En science, réputée être la fille de la logique et de la raison pure, on remarque, peut-être avec surprise, que la sage-femme doit y accomplir un acte de création”.*<sup>5</sup>

Cette loi bien connue de tous fut découverte par Simon Stevin (1548-1620). C'est lui, qui, vingt ans plus âgé que Galilée, avait fait l'expérience de la chute des corps démontrant que le temps de chute est indépendant de la masse. Les objets lâchés simultanément d'une hauteur de 30 pieds tombaient sur une planche. Le son permettait de détecter l'instant de la chute.

### Démonstration d'auditoire : l'expérience de Stevin

Deux forces **A** et **B** agissent sur P. Quel est **C** pour que P soit immobile?

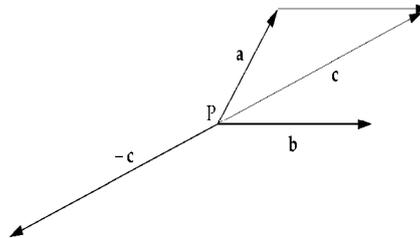


Une force a une intensité et une direction. Représentons-la par une flèche. Soit deux forces appliquées. Il existe une résultante qui est une force.

On cherche cette résultante. On suppose que les flèches-forces s'additionnent comme les vecteurs.

<sup>5</sup> Leon Cooper, op. cit.

On devrait en faire la vérification expérimentale : en appliquant  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  en P, il faut exercer  $-\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$  pour que P reste immobile.



Après des siècles de pratique, on dit " les forces sont des vecteurs ". Bien sûr les forces ne sont pas des vecteurs, ce sont des forces. Leur représentation en vecteur est parfaitement valable car elle est prédictive.

### Résistance de l'air

Le modèle selon lequel la force exercée sur le projectile est  $m\mathbf{g}$  est-il bon ?

Si on considère une chute libre sur une très grande hauteur, par exemple, on sait bien que la vitesse ne croît pas jusqu'à l'infini, on en déduit immédiatement qu'il faut ajouter quelque chose à notre modèle. La résistance de l'air joue un rôle. Nous affinons notre modèle de force en posant :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse. Maintenant " $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ " projeté sur le même système d'axe cartésien que le dernier choisi donne :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -b\dot{y}$$

$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

### Intégration analytique

Qu'en est-il de  $y(t)$  ?

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) = -\frac{b}{m} \dot{y}$$

Cette équation dit que  $\dot{y}$  décroît si  $\dot{y}$  est positive,  $\dot{y}$  croît si  $\dot{y}$  est négative. Comme  $\dot{y}(t=0) = 0$ ,  $\dot{y}$  reste à 0. Donc  $y(t) = 0$

Considérons  $x(t)$  :

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m} \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\frac{b}{m} \dot{x}$$

Changeons de variable  $\dot{x} = v$  :

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} v$$

Cette équation est fréquemment rencontrée en physique. Elle a la solution

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-bt/m}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(0) e^{-bt/m}$$

Quelle est la fonction dont la dérivée vaut  $\dot{x}(0) e^{-bt/m}$  ? C'est une fonction à la forme :

$$x(t) = \dot{x}(0) \cdot \left( \frac{-m}{b} \right) e^{-bt/m} + A$$

La condition initiale est

$$x(0) = 0$$

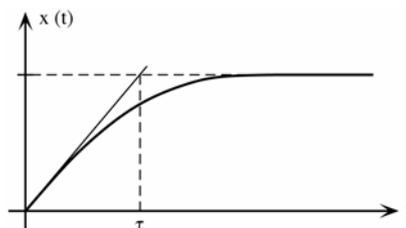
$$0 = \dot{x}(0) \cdot \left( \frac{-m}{b} \right) + A$$

$$A = \frac{m}{b} \dot{x}(0)$$

$$x(t) = \dot{x}(0) \cdot \frac{m}{b} \left( 1 - e^{-bt/m} \right)$$

On peut écrire  $\frac{m}{b} = \tau$

$$x(t) = \dot{x}(0) \cdot \tau \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$



Que se passe-t-il à  $t \Rightarrow \tau$  ?

$$x(t \rightarrow \infty) \rightarrow \dot{x}(0) \cdot \tau$$

Sous l'effet de la friction, le déplacement horizontal ne peut pas être plus grand que  $\dot{x}(0) \cdot \tau$  !

On examine maintenant  $z(t)$  :

$$m \ddot{z} = -mg - b \dot{z}$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau} \dot{z}$$

avec  $\tau = \frac{m}{b}$

Au début  $\dot{z}$  est petit,  $\ddot{z} \approx -g$ , c'est le cas traité plus haut. Puis le terme en  $\dot{z}$  domine,  $\dot{z}$  suit une équation comme  $v$  (ci-dessus) donc  $\ddot{z} \rightarrow 0$  et :

$$\dot{z} \Big|_{\text{limite}} = g \cdot \tau$$

Une grosse masse implique  $\tau$  grand et l'effet de friction ne devient sensible que si le temps est de l'ordre de grandeur de  $\tau$ . Pratiquement, si on examine la chute d'une balle de ping-pong, on peut espérer voir l'effet de la friction. Mais avec une balle d'acier, on ne peut pas !

On peut considérer l'équation en  $z$  comme étant composée de termes qui s'expriment en terme de  $z$ , et des termes indépendants de  $z$ . Pour intégrer une équation différentielle linéaire avec une telle structure, il existe une méthode standard. Elle consiste à chercher d'abord une solution particulière de l'équation différentielle avec le terme constant. On constate que

$$z = -g t \tau$$

est une solution. La solution générale de l'équation homogène (sans second membre),

$$\ddot{z} = -\frac{1}{\tau} \dot{z}, \text{ est donnée par}$$

$$\dot{z} = A e^{-t/\tau},$$

d'où  $z = -A \cdot \tau e^{-t/\tau} + B$ . Alors la solution générale de l'équation différentielle complète est

$$z(t) = -g t \tau - A \tau e^{-t/\tau} + B$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales

$$\dot{z} = -g \tau + A e^{-t/\tau}$$

$$\dot{z}(0) = -g \tau + A$$

$$0 = z(0) = -A \tau + B$$

Finalement,

$$z(t) = -g t \tau - \tau \left( \dot{z}(0) + g \tau \right) e^{-t/\tau} + \left( \dot{z}(0) + g \tau \right) \tau = -g t \tau + \left( \dot{z}(0) \cdot \tau + g \tau^2 \right) \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

On peut arriver au même résultat en commençant par intégrer l'équation différentielle pour  $z$  en posant le changement de variable

$$a = -g - \frac{1}{\tau} \dot{z}$$

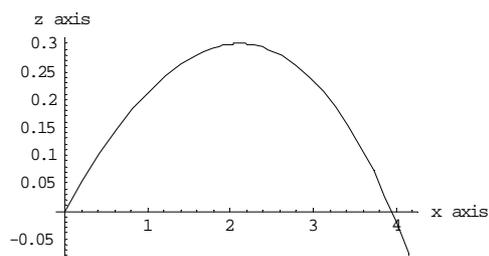
Alors  $\ddot{z} = -\tau a = a$ . On reconnaît cette équation différentielle pour l'avoir déjà rencontrée pour la direction  $x$ . La variable  $a$  est donc une fonction exponentielle du temps. Ayant  $a$ , on peut finir la résolution en intégrant en intégrant pour  $\dot{z}$ . Les conditions initiales permettent de conclure.

### Intégration numérique

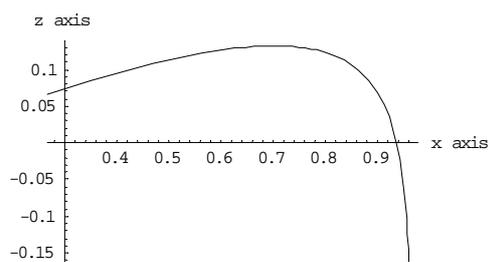
Il existe des outils très commodes, et d'autres très puissants, pour trouver des solutions numériques à des équations différentielles. MATHEMATICA par exemple, permet d'explorer des équations du mouvement aussi simple que celles de la balistique. La syntaxe, bien que souvent délicate, est remarquablement simple pour cette application. Un exemple, volontairement modeste dans son usage de MATHEMATICA, est présenté ci-dessous.

```
g=9.8;
tmax=0.5282;
vo=10;
a=15 Degree;
xo=0;vxo=N[vo Cos[a]];
zo=0;vzo=N[vo Sin[a]];
k=0.8;
ntrajjectory[k]=NDSolve[{
  nx''[t]==-knx'[t],
  nz''[t]==-knz'[t]-g,
  nx[0]==xo, nx'[0]==vxo,
  nz[0]==zo, nz'[0]==vzo
}, {nx, nz}, {t, 0.0, 1.0}][[1];

ntrajjectoryPlot[k]=ParametricPlot[Evaluate[{nx[t], nz[t]}/.ntrajjectory[k]], {
t, 0, tmax}, AxesLabel->{"x axis", "z axis"}];
```

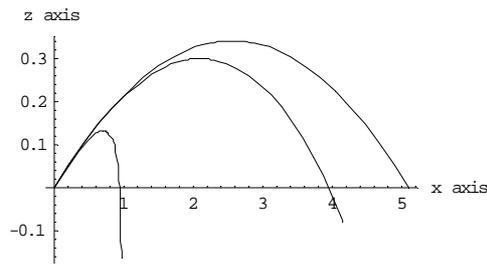


La même résolution avec plus de friction ( $k=10$ ) donne :



On peut aussi faire un graphe avec plusieurs trajectoires correspondant à différentes valeurs du coefficient de frottement :

```
Show[nTrajectoryPlot[0.0], nTrajectoryPlot[0.8], nTrajectoryPlot[10.]];
```



### L'accident

Un accident de la circulation survient dans une rue de Lausanne. Une voiture renverse un piéton. L'enquêteur appelé sur les lieux constate :

- deux traces parallèles de freinage d'une longueur de 60 m et commençant 15 m avant l'axe du passage pour piéton (largeur 4 m),
- des débris de phares à 15 m après l'axe du passage,
- les phares de la voiture sont à une hauteur de 1 m,
- la voiture peut avoir une accélération de freinage de  $-5.2 \text{ m/s}^2$ .

Quelles sont les responsabilités ? (Vitesse du véhicule et position du piéton par rapport au passage, au moment du choc).

### Boules de neige

Un étudiant du cours de physique générale s'engage dans une bataille de boules de neige avec un ami. Cet ami parvient à rattraper les boules et à les renvoyer immédiatement.

L'étudiant sait qu'une boule de neige peut être envoyée à deux angles de tirs différents, mais avec la même vitesse, et arriver au même point d'impact. Cependant les temps de vols sont différents. Aussi, pour gagner la partie, l'étudiant décide de jeter deux boules de neige, à des instants différents, une sur une trajectoire supérieure à l'autre. La balle supérieure créera une diversion. Pendant que l'ami se préparera à l'attraper, la seconde boule arrivera et les deux balles le frapperont simultanément ! Si les amis sont à 25 m l'un de l'autre et ils lancent les boules avec une vitesse initiale de 20 m/s :

- a) Quels sont les angles de tirs ?
- a) Combien de temps faut-il attendre avant de jeter la deuxième boule ?

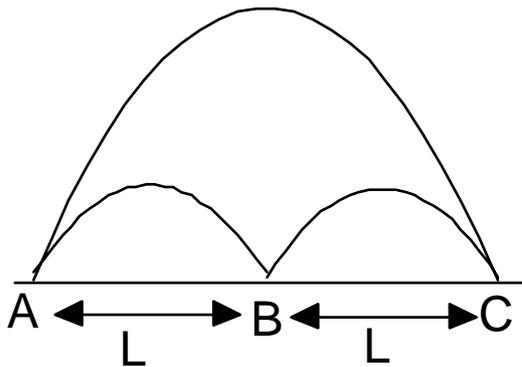
### Relaxation exponentielle

Un corps soumis à la pesanteur, de masse  $m$ , subit une force de friction proportionnelle à sa vitesse :  $\vec{F} = -b\vec{v}$  ( $b > 0$ ).

- a) Quelle est la vitesse limite ?
- b) Montrer que sa vitesse évolue en fonction du temps comme  $v(t) = v_0 \left( 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right)$ . Exprimer  $\tau$  et  $v_0$  en termes de  $m$ ,  $b$  et  $g$ .
- c) Esquisser cette fonction et son asymptote et la tangente à l'origine. Donner la valeur du temps à l'intersection des deux droites.

### Baseball : stratégie de "défense"

Le joueur A doit passer sa balle au joueur C. Il a le choix entre la lancer directement à C, ou de passer par le joueur intermédiaire B. Les joueurs A, B et C sont sur une ligne droite. Les distances entre A et B et entre B et C sont égales à  $L$ . Les joueurs lancent tous avec la même vitesse initiale  $v_0$ . Cette vitesse  $v_0$  est telle que le joueur A peut tout juste lancer à C, c'est-à-dire qu'il doit lancer de A à C avec un angle initial de 45 degrés. Quand A lance à B et quand B lance à C, les joueurs A et B ajustent l'angle de tir pour atteindre B et C, respectivement, avec un temps de vol minimal.



On suppose qu'il faut un temps  $\Delta t$  au joueur B pour rattraper la balle et la lancer à C. On se demande si, pour un  $L$  donné, il existe des valeurs de  $\Delta t$  qui font qu'il soit plus rapide à A d'envoyer la balle via B plutôt que de la passer directement à C ?

- Quel est le temps de la passe de A à C et la vitesse  $v_0$  en fonction de  $L$  et  $g$  ?
- Quel est l'angle de la passe de A à B pour  $v_0$  donné et le temps de vol ?
- Discuter (en général, c'est-à-dire pour toute valeur possible de  $v_0$ ) s'il est plus rapide de lancer directement de A à C ou de passer par B.

## L'oscillateur harmonique

Pour une deuxième application de la loi de Newton «  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  », on va considérer une classe de mouvements qui jouent un rôle très important en mécanique et en physique : l'oscillateur harmonique ! Bien des systèmes mécaniques peuvent être considérés en première approximation comme des oscillateurs harmoniques. De plus, de nombreux chapitres avancés de physique théorique feront appel à une généralisation de ce concept.

L'objectif du cours étant essentiellement d'apprendre à mettre sous forme mathématique un phénomène physique, il est bon de commencer par observer des oscillateurs. Comme premier exemple, on considère le mouvement d'une masse suspendue dans l'air par un ressort.



Il est possible d'observer un mouvement oscillatoire similaire sur un tout autre système, par exemple, une barre rigide suspendue à un fil métallique tendu. On appelle un tel système un pendule de torsion.



en première approximation, ces oscillateurs ont une amplitude constante. Bien sûr, il suffit d'attendre assez longtemps pour noter une décroissance de l'amplitude. En revanche, si la masse suspendue à un ressort est plongée dans de l'eau, l'amortissement est immédiatement visible. De même, si le fil du pendule de torsion est chauffé, l'amortissement se passe en quelques dizaines de seconde au lieu de quelques minutes !

### Généralité du phénomène

On verra plus loin dans le cours (formalisme de Lagrange) que les petits mouvements autour d'une position d'équilibre ont les caractéristiques d'un oscillateur harmonique. Ce type de mouvement est donc très fréquent. Il se généralise à toutes sortes de situations physiques,

telles que les circuits électriques RLC, les résonateurs à quartz ou toute autre structure vibrante.

Les oscillateurs harmoniques permettent d'introduire la notion de résonance. Les résonances sont parfois utiles, en particulier pour détecter des signaux faibles. C'est le cas du circuit résonant d'une radio pour détecter les ondes hertziennes. C'est aussi la stratégie proposée ci-dessous pour détecter la résonance d'un moment magnétique atomique.

### Actualité

On peut trouver des considérations d'oscillateur harmonique partout, même dans des sujets d'actualité. Ici, un dispositif résonant est proposé pour la détection mécanique de résonance magnétique, avec pour objectif de détecter le moment magnétique d'un seul atome.<sup>9</sup>

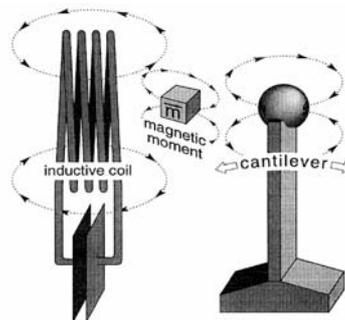
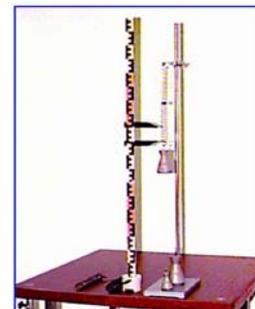


FIG. 1. Inductive coil and magnet-tipped cantilever, each coupled to a magnetic moment  $m$ .

### Modélisation de la force d'un ressort

#### Démonstrations d'auditoire:

La force exercée par un ressort est trouvée approximativement proportionnelle à son allongement.



Des expériences rudimentaires montrent que la force  $F$  d'un ressort est proportionnelle à son élongation en première approximation. Si  $x$  est une coordonnée qui définit la position du bout mobile du ressort par rapport à sa position d'équilibre, alors

$$F = - kx$$

où  $k$  est une constante appelée la constante élastique du ressort. On verra plus tard dans le cours que ce type de force se rencontre souvent, comme par exemple :

- dans les petites oscillations autour d'une position d'équilibre
- dans les petites déformations d'un corps solide.

Fort de cette observation, nous sommes justifié pour définir un nouveau modèle mécanique.

<sup>9</sup> PRL 70(22) 3506 (1993)

## L'oscillateur harmonique

**Définition** : un point matériel astreint à se déplacer en ligne droite et soumis à une force de rappel proportionnelle à la distance à un point fixe sur cette droite.

On se donne  $m$ , la masse du point matériel et un axe des coordonnées  $x$  le long de la droite, dont l'origine  $O$  est la position de l'extrémité du ressort au repos. La force de rappel est  $F = -k x$ , où  $k$  est une constante. On fait appel à la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$F = m a$$

où  $a$  vaut simplement  $\ddot{x}$ . Ainsi, l'équation du mouvement est:

$$m \ddot{x} = -k x$$

Voici une nouvelle équation différentielle non triviale. C'est une des rares équations différentielles dont on peut fournir une solution analytique ! <sup>10</sup>

### **L'équation différentielle comme recette de calcul**

*La discussion qui suit a pour de familiariser l'étudiant avec la notion d'équation différentielle, en jouant un peu avec une calculatrice., <sup>11</sup>*

Nous avons obtenu  $m a = -k x$ . Cette loi permet de calculer  $a$  pour chaque valeur de  $x$ , d'où peut être déduit un accroissement de vitesse :  $\Delta v = a \Delta t$ , et par conséquent un déplacement  $\Delta x = (v + \Delta v)\Delta t$ . Posons comme **conditions initiales** :  $t = 0$ ,  $x = 1.0$ ,  $v = 0$ . Soit  $m = 1.0$ ,  $k = 2.5$ . Pue importe ici les unités. A partir de  $x = 1.0$  nous trouvons la valeur de  $a$ . De là, nous pouvons trouver la nouvelle valeur de  $x$ , d'où la nouvelle valeur de  $a$ , etc... Prenons un incrément de temps  $\Delta t = 0.025$ .

t	a	v	x
0	-2.5	0	1
0.025	-2.496	0.06	0.999

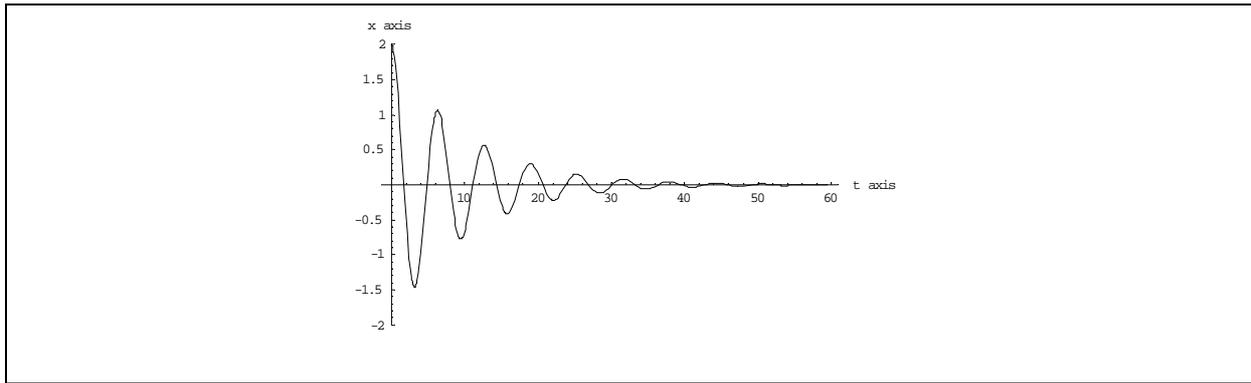
$x$  varie trop lentement pour cette démonstration. Prenons alors un  $\Delta t$  plus grand, soit 0.1.

t	a	v	x
0	-2.5	0	1
0.1	-2.438	-0.25	0.975
0.2	-2.313	-0.498	0.925
0.3	-2.130	-0.729	0.852
0.4	-1.895	-0.942	0.758
0.5	-1.612	-1.132	0.645
0.6	-1.289	-1.294	0.516
0.7	-0.934	-1.423	0.374
0.8	-0.556	-1.516	0.222
0.9	-0.162	-1.572	0.065

<sup>10</sup> Mechanics, Berkley Physics Course vol. 1, C. Kittel, W. Knight, Ruderman, Mac Graw Hill 1973

<sup>11</sup> Mechanics, A. Douglas Davis, Acad. Press College Division 1986





### Solution analytique

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique peut s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Dans le cadre de cette sensibilisation aux équations différentielles, il suffira d'adopter la démarche très simple qui consiste à essayer une solution, en l'occurrence :

$$x = \cos(\omega t)$$

C'est une solution, car en effet :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

et l'équation différentielle est satisfaite, pour autant qu'on prenne  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On remarque que  $x = \sin(\omega t)$  est aussi une solution. Une solution générale est de la forme :

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Pour trouver A et B, il faut spécifier les **conditions initiales**. Prenons par exemple  $x = \Delta l$  et  $v = v_o$

à  $t = 0$ . Il vient :

$$x(t=0) = B = \Delta l$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$$

$$v(0) = A\omega = v_o$$

La justification formelle de cette approche appartient au cours de mathématiques.

*La suite de cette section va au-delà d'un discours introductif et peut être consultée ultérieurement, quand le cours de mathématiques aura abordé les nombres complexes et les équations différentiels.*

### **Oscillateur harmonique amorti**

En pratique, les oscillateurs ont leur amplitude qui décroît au cours du temps, à moins qu'ils soient forcés. Pour une description plus réaliste, c'est-à-dire une meilleure modélisation,

supposons que l'oscillateur est soumis à une force supplémentaire représentant les frottements. Il arrive souvent que l'approximation par laquelle la force de frottement est proportionnelle à la vitesse, et opposée à la vitesse, soit une bonne approximation. Ce n'est pas la seule possible, et ce n'est pas toujours la meilleure. Nous parlerons des forces de frottement plus tard. Ainsi la force de frottement de la forme est posée

$$\vec{F}_f = -b \vec{v}$$

Pour notre système de coordonnées,  $F_f = -b \frac{dx}{dt}$ . L'application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton fournit

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}.$$

Pour se conformer à une notation usuelle, nous notons

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2 \quad \frac{b}{2m} = \gamma$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

C'est dans le cadre d'un cours de mathématiques qu'une méthode systématique est introduite pour résoudre une telle équation différentielle. Elle consiste à prendre comme fonction d'essai  $x = e^{\lambda t}$ . Il faut alors

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2) = 0.$$

Comme ( $e^{\lambda t} \neq 0$ ) il faut  $(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2) = 0$ , d'où :

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

et la solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions trouvées :

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t} \left( A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} t} \right)$$

Nous avons observé des mouvements avec beaucoup d'oscillations avant un amortissement important. C'est-à-dire que l'amortissement est faible :  $\gamma^2 \ll \omega_o^2$ . Alors, on peut écrire avec des racines carrées réelles :

$$\lambda_1 = -\gamma + i \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - i \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

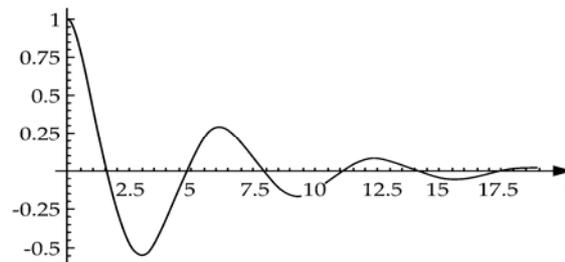
et la solution générale peut s'écrire :

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + A^* e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right)$$

Les constantes sont choisies de manière à ce que la fonction  $x(t)$  soit réelle. La solution générale peut aussi s'écrire :

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \text{ avec } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

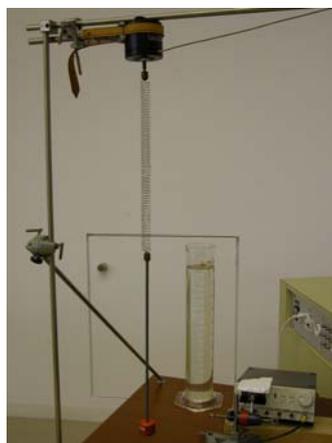
L'allure générale de la courbe est la suivante :



Quand  $\omega_0 = \gamma$  on dit qu'il y a amortissement *critique*, quand  $\omega_0 < \gamma$ , qu'il y a amortissement *sur-critique*.

### Le phénomène de résonance

Démonstration d'auditoire : un poids accroché à un ressort, immergé dans de l'eau, l'autre extrémité du ressort oscillant de haut en bas sous l'action d'un piston qui peut être mu à une fréquence variable. On observe un maximum d'amplitude quand la fréquence est ajustée à la fréquence de l'oscillation libre. Si on retire le poids de l'eau, on observe au début de l'expérience des battements entre l'oscillation propre et l'excitation. Il faut attendre un temps de l'ordre du temps d'amortissement de l'oscillation libre pour obtenir un mouvement harmonique.



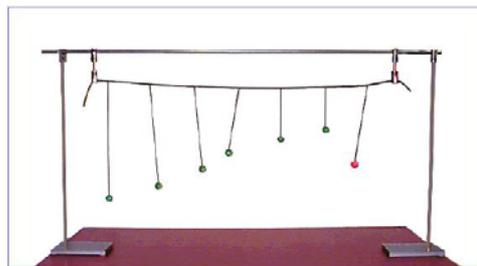
Lorsque l'oscillateur harmonique est soumis à une force extérieure, on parle d'oscillateur harmonique **forcé**. Exprimé sous forme mathématique, cela veut dire qu'on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t)$$

où  $F(t)$  est une force extérieure. On considère ici le cas où l'excitation est **harmonique** :  $F(t) = f \cos(\omega t)$ . L'expérience montre que l'amplitude de l'oscillation devient très grande quand  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ . De plus, l'oscillation est d'autant plus grande que  $\frac{\omega_0}{2\gamma}$  est grand. Ce quotient est appelé le facteur de qualité (voir section « considérations d'énergie »).

#### Démonstrations d'auditoire :

Plusieurs masses sont suspendues sur un tube en caoutchouc. Seul un pendule a la même longueur que celui situé à l'extrémité du tube. Quand ce dernier est excité, seul le pendule qui a la même longueur que celui-ci se met à osciller de manière importante.



L'Exploratorium de San Francisco présente une expérience similaire, avec des bandes d'acier en forme d'anneaux de plusieurs diamètres. Les anneaux sont tous montés sur un haut-parleur. On observe la résonance de chaque anneau successivement quand la fréquence du haut-parleur est augmentée progressivement.



Le pont de Tacoma s'est effondré quand un fort vent a engendré une résonance dont l'amplitude est devenue si grande que le pont ne pouvait plus résister. Ici il faut noter un

phénomène curieux : l'amplitude obtenue avant rupture est plus grande que la déformation que le matériau aurait toléré en mode statique !



Pour rendre compte de ces phénomènes, on considère les solutions de l'équation du mouvement

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = \alpha_o \cos(\omega t)$$

avec  $\alpha_o = \frac{f}{m}$ . On choisit de s'intéresser seulement au cas stationnaire, c'est-à-dire qu'on suppose que la force a été appliquée pendant un temps long comparé à  $\tau$ . Alors le système oscille à cette fréquence  $\omega$ .

Il est commode d'obtenir la solution en cherchant d'abord celle d'un problème équivalent pour une variable complexe. Le problème complexe se déduit du premier en considérant le même système subissant une force déphasée de  $\frac{\pi}{2}$ . Exprimons l'équation du mouvement pour une variable  $y$  sous l'effet de cette force déphasée. Il vient alors le système d'équations :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = \alpha_o \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_o^2 y = \alpha_o \sin(\omega t)$$

En multipliant la deuxième équation par  $i$  et en sommant, avec  $z = x + i y$ , on obtient :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_o^2 z = \alpha_o e^{i\omega t}$$

Chercher la solution stationnaire, c'est chercher la solution de la forme  $z = z_o e^{i\omega t}$ . Pour trouver la solution du problème initial pour  $x$ , il suffit de prendre  $x = \text{Re}(z)$ . En substituant pour  $z$  dans l'équation du mouvement, il vient:

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_o^2\right) z_o e^{i\omega t} = \alpha_o e^{i\omega t}$$

$$z_o = \frac{\alpha_o}{\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_o^2\right)}$$

Écrivons  $z_o$  sous la forme  $z_o = \rho e^{i\phi}$ . Alors le module de  $z$  est donné par :

$$\rho = \frac{\alpha_o}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_o^2 - \omega^2)^2\right)}}$$

et sa phase par

$$\tan(\phi) = \frac{\text{Im}(z_o)}{\text{Re}(z_o)} = \frac{-\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

L'amplitude à la résonance  $\omega = \omega_o$  est  $\rho(\omega = \omega_o) = \frac{\alpha_o \tau}{\omega_o}$ . Le déphasage est  $\pi/2$ .

L'amplitude à la fréquence nulle (force constante) est  $\rho(\omega = 0) = \frac{\alpha_o}{\omega_o^2}$ .

Le rapport de l'amplitude à la résonance et de celle à la fréquence nulle vaut :

$$\frac{\rho(\omega = \omega_o)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_o \tau$$

Plus l'amortissement est faible, plus  $\tau$  est grand et plus grande est l'amplitude de l'oscillation. (voir section « considération d'énergie » et le facteur de qualité). On est ainsi parvenu à rendre compte des différentes observations faites avec un système physique modélisé par un oscillateur harmonique amorti forcé.

## Oscillateur harmonique v, a, E

Vérifier que la solution du problème de l'oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} = -kx \quad (k < 0)$$

peut s'écrire  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  et trouver la valeur de  $\omega$ .

Calculer la vitesse  $v(t)$  et l'accélération  $a(t)$ .

Trouver  $a(t_0)$  avec  $v(t_0)=0$  et  $v(t_1)$  avec  $a(t_1)=0$ .

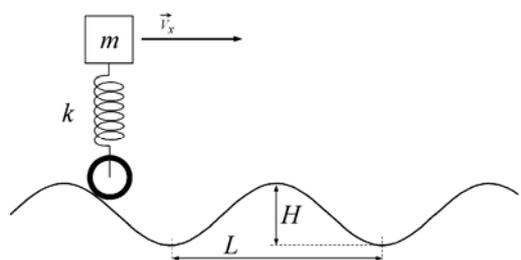
Vérifier que la grandeur  $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$  est indépendante du temps.

### Champ de bosse – réponse linéaire

*Il existe de nombreux systèmes physiques résonants dont on cherche à connaître la réponse à une excitation harmonique, c'est-à-dire sinusoïdale, à des temps éloignés du moment de l'enclenchement de l'excitation.*

Un point matériel pesant, de masse  $m$ , avance avec une vitesse horizontale  $v$  constante. La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort de constante élastique  $k$ , de longueur au repos nulle (pour simplifier !). Au bout du ressort, une roulette sans masse suit le profil du sol. Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. Il est simplement supposé qu'il n'intervient pas dans le mouvement de la masse.

- Le profil du parcours (la tôle ondulée) est supposé avoir une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est  $H$  et leur longueur  $L$ . Donner l'équation horaire  $H(t)$  du point de contact entre la roue et la route (on prendra l'origine des temps à l'origine géométrique, à mi-chemin entre un creux et une bosse de la sinusoïde).
- Avec  $H(t)$ , en déduire l'équation du mouvement du point matériel (mouvement dans la direction verticale).
- Trouver l'amplitude des vibrations du point matériel en fonction de la vitesse. Donner la condition de résonance. Que peut-on dire de la vitesse du véhicule pour que le confort soit maximum.

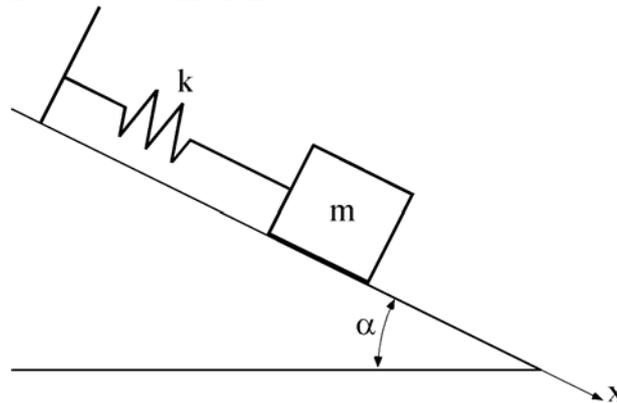


### Oscillateur sur plan incliné

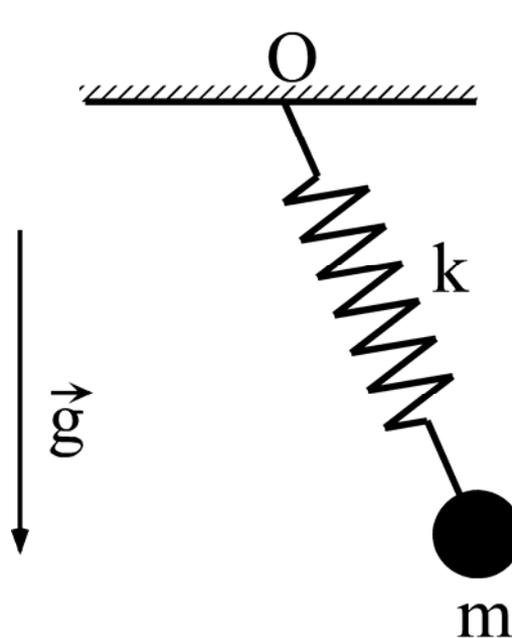
Un point matériel pesant, de masse  $m$ , est astreint à se déplacer sur une droite inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Il n'y a pas de frottement. Le point matériel est retenu par un ressort de longueur au repos  $L$  et de constante élastique  $k$ .

- Etablir le bilan des forces.
- Trouver l'équation du mouvement.

c) Quelle est la période des oscillations ?



### Oscillateur-pendule



Un pendule est formé d'une masse considérée comme un point matériel de masse  $m$ , suspendue à un ressort de constante élastique  $k$  et soumis à la pesanteur. Pour simplifier, le ressort est supposé de longueur au repos nulle. Le pendule n'est pas supposé astreint à se déplacer dans un plan vertical.

- Choisir un système de coordonnées et un repère.
- Exprimer la force de rappel en terme de ces coordonnées.
- Obtenir les équations du mouvement.
- Exprimer l'énergie cinétique pour ce choix de coordonnées.
- La composante verticale du moment cinétique, calculée en utilisant le point  $O$  comme point de référence, est une constante du mouvement. Trouver un argument le justifier.
- Quelles conditions initiales fournissent un mouvement circulaire horizontal ?

### Considération d'énergie pour l'oscillateur harmonique

La discussion suivante complète la description de la phénoménologie de l'oscillateur harmonique. Elle invoque des notions d'énergie.<sup>13</sup>

On considère à nouveau la solution de l'oscillateur harmonique, sans amortissement :

$$x = A \sin(\omega_1 t + \Phi)$$

$$\dot{x} = A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \Phi)$$

On appelle énergie cinétique la quantité

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)$$

On appelle énergie potentielle le travail effectué pour amener la masse de la position  $x$  à 0, 0 étant la position de repos du ressort. La notion de travail et d'énergie potentielle sera étudiée formellement plus tard. L'énergie potentielle d'un ressort de constante  $k$ , d'élongation  $x$ , vaut :

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

On appellera énergie totale la grandeur définie par  $E = K + V$ . Dans ce cas particulier, on a

$$E = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2. E \text{ est indépendant du temps.}$$

S'il y a amortissement, la grandeur  $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$  dépend du temps.

En effet avec  $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \Phi)$  on a  $\dot{x} = Ae^{-\gamma t} \{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\}$  Un

système résonant est, typiquement, faiblement amorti :

$$\gamma \ll \omega_1$$

Alors le premier terme est négligeable devant le deuxième dans l'expression de la vitesse :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \cong$$

$$\frac{1}{2} mA^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega t + \Phi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \Phi)$$

Au même ordre d'approximation :

$$\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \approx \omega_o$$

Avec  $m\omega_o^2 = k$ ,

il vient

---

<sup>13</sup> Chapitre « Travail, puissance, énergie »

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

### Facteur de qualité

La période est  $\frac{2\pi}{\omega_1}$ . La perte sur une période vaut :

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{1}{\tau} E.$$

On utilise très souvent en technique le concept de facteur de qualité défini comme :

$$Q =$$

$$2\pi \frac{(\text{énergie emmagasinée dans l'oscillateur})}{\text{énergie dissipée dans un cycle}} \text{ De la définition de Q, il vient :}$$

$$Q = \omega_1 \tau.$$

Pratiquement, on peut traiter Q comme le nombre de battement de l'oscillateur dans le temps qu'il faut pour que l'amplitude décroît d'un facteur e, fois  $2\pi$ . Une autre intuition du sens du facteur de qualité vient de l'évolution de l'énergie. L'énergie E de l'oscillateur harmonique décroît comme

$$e^{-2\gamma t} = e^{-t/\tau} = e^{-\omega_1 t/Q}$$

Plus Q est grand, plus l'énergie se dissipe lentement.

Le facteur de qualité est utilisé pour décrire des systèmes résonants. Le terme « qualité » vient sans doute du résultat suivant. Nous avons vu que l'amplitude à la résonance était l'amplitude de la déviation statique multipliée par le coefficient  $\omega_1 \tau$ , c'est-à-dire, le facteur Q ! Le facteur de qualité est souvent de 100, il peut être de 10'000, par exemple pour un quartz !

Ce résultat permet de comprendre l'expérience suivante du musée des sciences de San Francisco<sup>14</sup> : le visiteur tire sur une masse énorme pendue au bout d'un pendule à l'aide d'un fil rattaché à l'énorme masse par un petit aimant. En tirant avec une force constante, presque aucune déviation n'est observée. En revanche, si le visiteur a la patience d'exercer la traction au bon rythme, pendant un temps de l'ordre du temps d'arrêt si on observait le pendule osciller librement, alors il arrive à produire une oscillation sensible !

### Considérations sur l'énergie et la puissance dissipée d'un système résonant

Lorsque nous étudierons de façon détaillée les notions de travail et d'énergie mécanique, nous verrons que la puissance apportée au système vaut  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Il y a un va-et-vient périodique d'énergie entre la source de la force F et l'oscillateur harmonique. Ce qui importe cependant, c'est la moyenne sur un cycle. Elle est non-nulle parce que le système dissipe une partie de l'énergie reçue à cause des frottements.

<sup>14</sup> Voir [www.exploratorium.com](http://www.exploratorium.com)

On calcule donc :

$$P = \langle F v \rangle = \langle f \cos(\omega t) \operatorname{Re}(\dot{z}) \rangle$$

$$\dot{z} = i\omega\rho e^{i\phi} e^{i\omega t} = i\omega\rho (\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi))$$

$$P = \langle f \cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi) (-\omega\rho) \rangle =$$

$$\langle (-\omega\rho f) \cos(\omega t) (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \rangle =$$

$$\langle (-\omega\rho) f \cos^2(\omega t) \sin(\phi) \rangle = \frac{-1}{2} f \omega\rho \sin(\phi) =$$

$$= \frac{1}{2} m\alpha_o^2 \frac{\omega^2 / \tau}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}$$

$$P = \frac{1}{2} m\alpha_o^2 \tau \frac{1}{\left( \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{(\omega / \tau)^2} + 1 \right)}$$

La puissance absorbée P vaut la moitié du maximum de P,  $\frac{1}{2} m \alpha_o^2 \tau$ , quand

$$\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{(\omega / \tau)^2} = 1,$$

c'est-à-dire quand

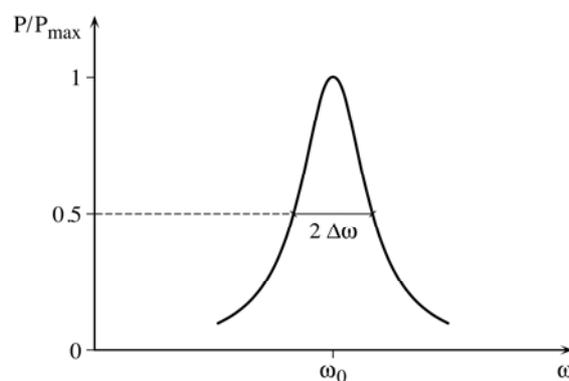
$$(\omega_o - \omega)(\omega_o + \omega) = (\omega / \tau)$$

$$\Delta\omega 2\omega_o \cong (\omega_o / \tau)$$

$$2\Delta\omega = 1 / \tau$$

où  $2\Delta\omega$  est la largeur à mi-hauteur de la raie représentant l'absorption P en fonction de la fréquence appliquée. Les résultats sur le facteur de qualité donnent ainsi :

$$Q = \frac{\omega_o}{2\Delta\omega}$$



### La notion d'impédance

En réponse harmonique, la vitesse  $v$  se déduit du déplacement  $z$  en multipliant  $z$  par le facteur  $i\omega$ . L'amplitude  $v_0$  de la vitesse est ainsi :

$$v_0 = \frac{\alpha_0(i\omega)}{\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0^2\right)} = \frac{\alpha_0}{\left(i\omega + \frac{\omega_0^2}{i\omega} + \frac{1}{\tau}\right)}$$

L'impédance est une grandeur introduite dans de nombreux domaines de la physique. Ainsi on écrira pour :

- l'oscillateur harmonique :  
force = impédance x vitesse
- les circuits RLC :  
tension = impédance x courant
- les ondes électromagnétiques :  
champ électrique = impédance x champ magnétique
- les ondes acoustiques :  
pression = impédance x vitesse de déformation

Pour l'oscillateur harmonique, l'impédance  $Z$  est ainsi :

$$Z = m \left( i\omega + \frac{\omega_0^2}{i\omega} + \frac{1}{\tau} \right)$$

L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance. En passant à travers la résonance, l'admittance dans le plan complexe parcourt un cercle. En effet, posons

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega \quad \text{avec} \quad \Delta\omega \ll \omega_0$$

d'où  $\omega_0^2 \cong \omega^2 + 2\omega\Delta\omega$ . Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{m}{Z} &= \frac{1}{\left( i\omega + \frac{\omega^2 + 2\omega\Delta\omega + 1}{i\omega} + \frac{1}{\tau} \right)} = \\ &= \frac{1}{-2i\Delta\omega + \frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{1/\tau}{\frac{1}{\tau^2} + 4\Delta\omega^2} + i \frac{2\Delta\omega}{\frac{1}{\tau^2} + 4\Delta\omega^2} \end{aligned}$$

Nommons x et y les parties réelle et imaginaire de l'admittance par unité de masse. On a

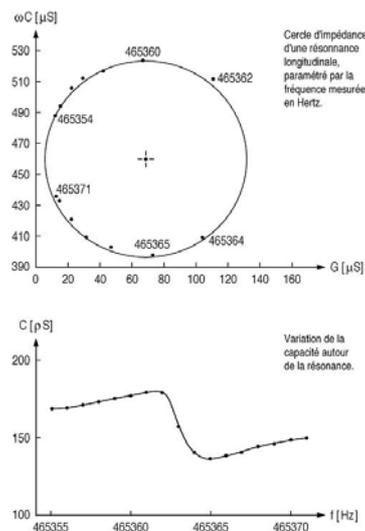
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 4\Delta\omega^2} = x\tau$$

$$x^2 + y^2 - x\tau = 0$$

$$(x - \tau/2)^2 + y^2 = \frac{\tau^2}{4}$$

C'est bien l'équation d'un cercle dans le plan complexe de l'admittance.

Exemple : une mesure de l'admittance d'un cristal piezoélectrique présentant une résonance électromécanique.<sup>15</sup>



<sup>15</sup> données prises par l'auteur

## ***Sensibilisation au problème du chaos***

### ***Introduction : évolution de la pensée scientifique***

La balistique est enseignée dans tous les cours introductifs de mécanique. La raison en est simple : pour ces problèmes, il suffit de travailler en coordonnées cartésiennes et l'intégration des équations du mouvement est des plus simples ! Les oscillateurs harmoniques ont l'avantage de présenter une équation du mouvement sous la forme d'une équation différentielle qui présente un véritable défi. Mais dans ce cas-ci comme dans le précédent, les solutions ont un comportement tout simple. Avec des conditions initiales données, on peut prédire l'évolution du système aussi bien que remonter dans les temps antécédents au moment initial. En particulier, si on change un petit peu les conditions initiales, la solution change un peu, mais sans plus.

On verra d'autres systèmes physiques avec le même comportement simple, qu'on peut dénommer comme déterminisme laplacien. Le cas historique notoire est le succès de la loi de la gravitation universelle de Newton qui permet de rendre compte de la forme et des propriétés des orbites des planètes, énoncées par Kepler. Ce succès fulgurant a frappé l'imagination de l'humanité. Cette nouvelle science moderne, mécaniste, allait-elle pouvoir tout expliquer ? Nous devons reconnaître que beaucoup d'entre nous sommes attiré par l'espoir d'une telle simplicité, tant elle est pure. Ainsi deux siècles d'enthousiasme créèrent une habitude de pensée qui constitua un obstacle épistémologique tout à fait caractéristique. Il aura fallu un génie pour nous sortir de cette torpeur simplificatrice ! Poincaré, mathématicien, réalisa que les solutions des équations de la mécanique ne suivaient pas toutes des schémas aussi simples.

Il fallut cependant encore des décennies avant qu'une prise de conscience plus large s'établisse. Des chercheurs redécouvrirent par eux-mêmes les intuitions de Poincaré, vers le milieu du 20<sup>ème</sup> siècle. L'accès à des solutions numériques obtenues par des ordinateurs de plus en plus accessibles contribua à développer le sens général de cette complexité.<sup>16</sup> De nos jours, la théorie du chaos est reprise par tout un chacun. Les sociétés internationales créent des divisions de physique des systèmes « non linéaires », organisant des congrès. Les livres de vulgarisation sur le chaos abondent. La sensibilité aux conditions initiales, la possibilité de bifurcation très loin d'un équilibre connu sont entrées dans la conscience collective.

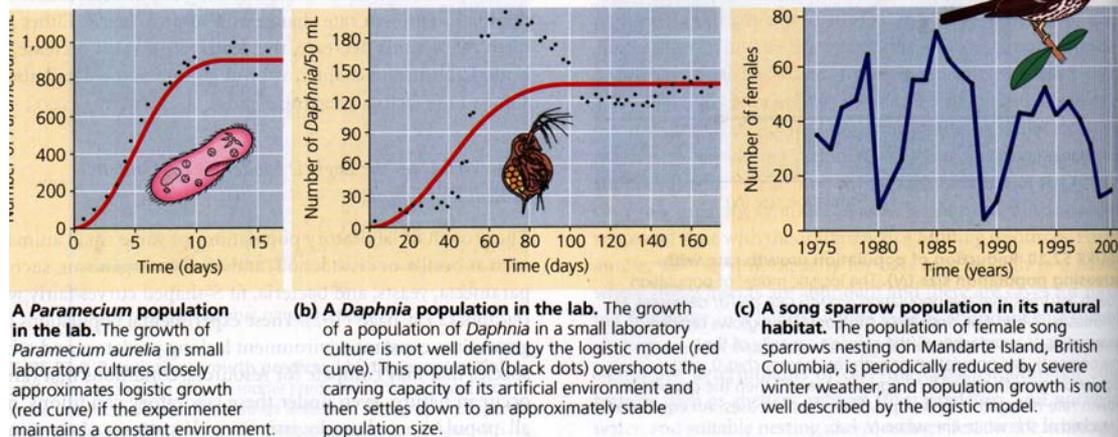
---

<sup>16</sup> *Chaos*, James Gleick, Penguin Books 1988

## Un exemple : modélisation de l'évolution d'une population animale

Cette introduction au chaos est une occasion de s'essayer à une modélisation mécaniste en dehors du domaine propre à la mécanique. Suivant un exemple d'importance historique dans le développement du chaos, on va examiner la question de l'évolution d'une population animale. Un livre de biologie récent<sup>17</sup> fait état de trois comportements : certaines espèces évoluent vers une population stable (toutes conditions restant constantes). Il peut y avoir une approche monotone de la population d'équilibre, ou quelques oscillations. Dans d'autres cas, la population n'a de cesse de fluctuer et il n'est pas possible de trouver un motif répétitif dans cette évolution.

FIGURE 52.12 How well do these populations fit the logistic population growth model? The dots on these graphs are the actual data points.



On commence la modélisation en examinant une loi d'évolution des populations de la forme :

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

En discrétisant le temps en intervalles de longueur  $dt$ , on a entre deux temps  $t_i$  et  $t_{i+1}$  les populations  $N_i$  et  $N_{i+1}$  données par :

$$N_{i+1} - N_i = dt \ r N_i$$

ce qu'on écrira dans ce qui suit :

$$N_{i+1} = 4\lambda N_i$$

en posant :

$$4\lambda = 1 + dt \ r$$

Il est possible d'évaluer la prédiction de ce modèle avec un tableur. On trouvera bien vite un comportement exponentiel ! C'est le genre d'évolution qu'on aimerait voir se réaliser sur son compte en banque, où  $4\lambda - 1$  est le taux d'intérêt du placement et  $N_i$  le solde à la fin de

<sup>17</sup> Biology, Campbell, Reece, Benjamin Cummings 2002, 6th edition

l'année  $i$ . Dans le cadre d'une modélisation des populations, il faut bien admettre que le modèle ne rend pas compte du tout des observations.

On va affiner le modèle en exprimant la notion selon laquelle la population ne croît plus aussi bien quand elle atteint une certaine taille  $K$ . Ainsi, on réduit le taux de croissance en multipliant le coefficient de croissance  $r$  par le rapport  $\frac{(K - N)}{K}$ . L'équation différentielle devient :

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{(K - N)}{K}$$

La discrétisation en intervalles de temps  $dt$  fournit après un peu d'algèbre :

$$\frac{N_{i+1}}{K} = \frac{N_i}{K} (1 + r dt) \left( 1 - \frac{r dt}{1 + r dt} \frac{N_i}{K} \right)$$

Pour simplifier l'écriture, on passe à une variable  $n_i = \frac{N_i}{K}$ , qui représente la population normalisée à la population critique  $K$ :

$$n_{i+1} = 4\lambda n_i \left( 1 - \frac{4\lambda - 1}{4\lambda} n_i \right)$$

*On peut imaginer que le coefficient  $\lambda$  représente un taux de succès de la reproduction.*

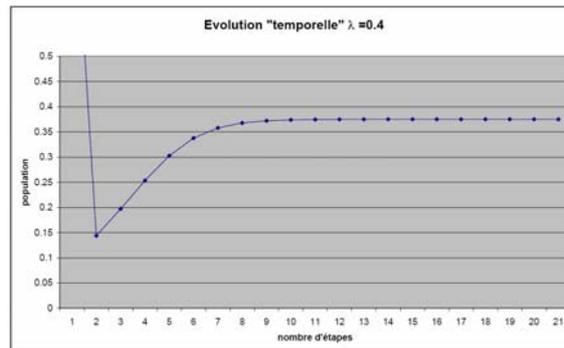
## L'émergence du chaos

Le terrain est prêt pour s'engager dans une petite expérience mathématique<sup>18</sup> qui permet de découvrir comment un système peut devenir chaotique dans son évolution. Il s'agit d'un "jeu" mathématique inventé par un biologiste Robert May pour modéliser un système de proie et de prédateur. On décide de calculer le nombre d'individus qui survivent d'une année " $n$ " à une année " $n+1$ " à l'aide de la règle simplifiée suivante :

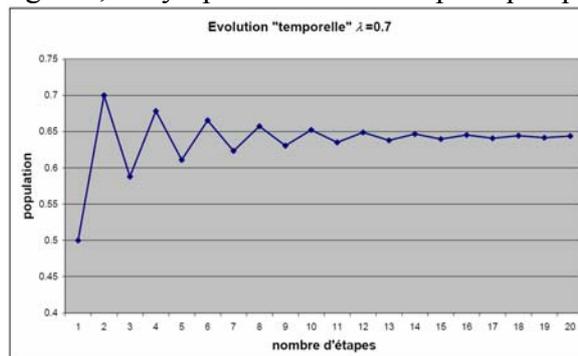
$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n)$$

Il est possible d'explorer le comportement de ce système dynamique simplement avec une machine à calculer. Ci-dessous, quelques exemples de caculs sont donnés. Quand  $\lambda$  est petit, on arrive à une valeur stationnaire. La population stationnaire dépend de façon monotone de la valeur du coefficient  $\lambda$ .

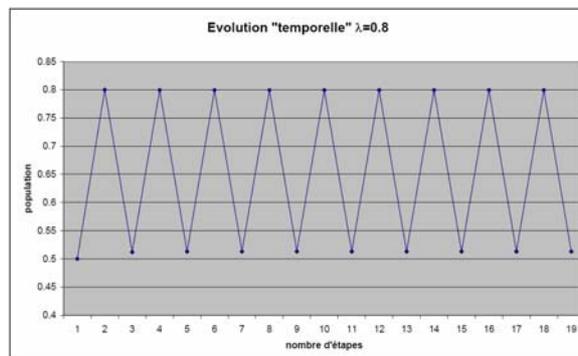
<sup>18</sup> voir par exemple <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/Iteration.html>



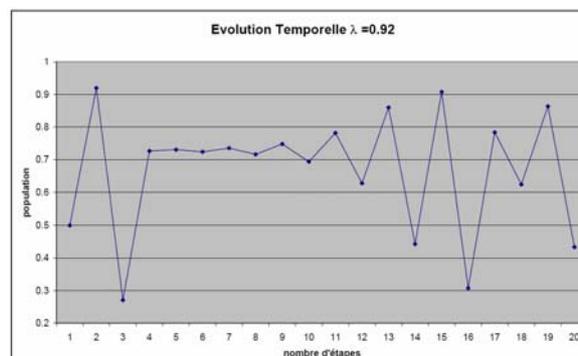
Quand  $\lambda$  est un peu plus grand, l'asymptote est atteinte après quelques oscillations.



Quand  $\lambda$  est encore un peu plus grand, on observe des cycles limites avec des périodes de deux, quatre ou huit ans.

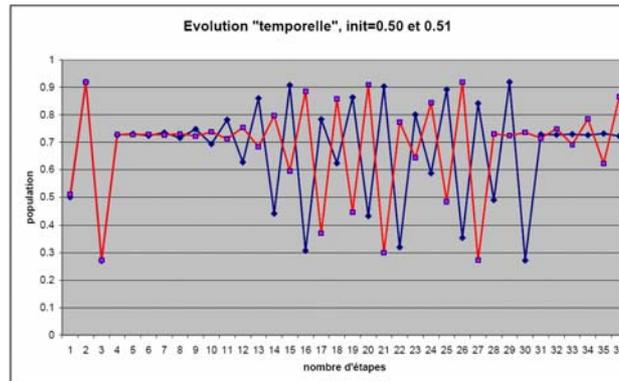


Au-delà d'un certain seuil de la valeur de  $\lambda$ , toutes sortes de valeurs apparaissent. C'est l'émergence du chaos !



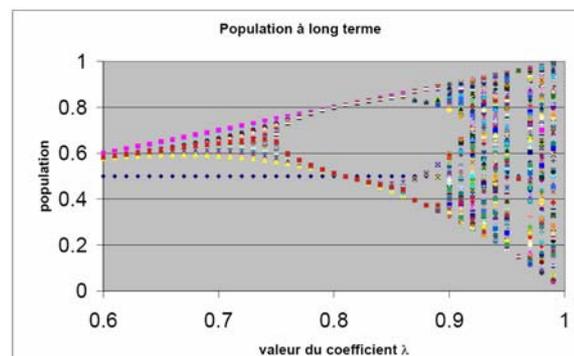
De plus, le moindre changement dans les conditions initiales du calcul donne lieu à des séries complètement différentes. Des systèmes extrêmement simples ont cette sensibilité infiniment

grande aux conditions initiales. Sur la base de cette simple constatation, il faut donc s'interroger sur toute prédiction sur l'avenir d'un « système » aussi complexe que la psychologie d'un enfant, quand des systèmes déterministes aussi pur que celui-ci donne déjà lieu à des comportements imprédictibles !



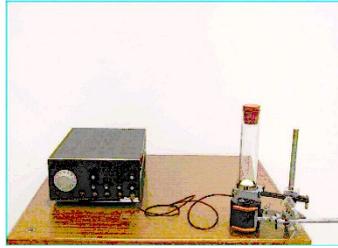
Il apparaît que la population change drastiquement quand  $\lambda$  dépasse un seuil. C'est un grand problème de toute prédiction de l'évolution d'un système complexe. C'est une question qu'on doit se poser pour ce qui concerne le réchauffement global. Si le taux de gaz carbonique dans l'atmosphère augmente un peu plus, est-ce que la température va changer drastiquement si on dépasse un seuil ? L'augmentation de la température que nous observons est-elle simplement une partie d'un très grand cycle ?

L'évolution sur des temps très longs peut être calculée avec un tableur pour une valeur de départ de 0.5 avec toute une série de valeurs de  $\lambda$ . Ces évolutions à long terme sont présentées ci-dessous sur un graphique de  $x$  (quelques valeurs après un grand nombre d'itérations) en fonction de  $\lambda$ . Il apparaît une évolution asymptotique simple pour  $\lambda$  petit. Au delà d'un seuil, il y a **bifurcation** sur toutes sortes de valeurs possibles. Cette possibilité de bifurcation doit inquiéter celui qui veut prédire de manière « scientifique ».



Curieusement, le graphique semble générer une structure dite « fractale », quand il est examiné de près ... Il y a donc des régularités dans ce chaos !

## Démonstrations d'auditoire



Une boule de ping-pong rebondit sur une plate-forme à laquelle on impose un mouvement de va-et-vient régulier.

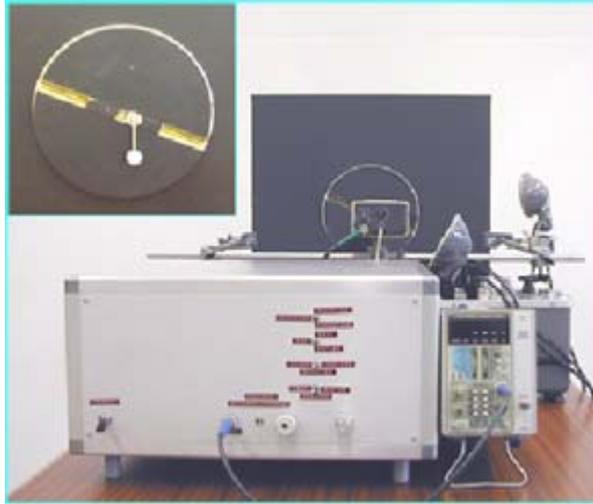
La balle de ping-pong rebondit sur le piston. Le son émis permet d'apprécier le mouvement de la balle. Il n'y a rien de régulier dans ce mouvement, en général. Toutefois, il existe des fréquences d'oscillations du piston qui donne lieu à un mouvement périodique. Ce mouvement peut être modélisé assez facilement et une simulation numérique peut fournir la trajectoire. On constate ici encore une très grande sensibilité aux conditions initiales.

On peut observer de façon expérimentale cette sensibilité aux conditions initiales, à l'aide d'un pendule formé de deux fléaux.



Deux pendules doubles sont montés sur une potence. Chaque pendule est composé de deux barres égales, la partie inférieure est formée d'une barre articulée aux deux autres par un roulement à bille.

Quand le pendule est lancé avec de petites amplitudes, les oscillations sont régulières et les deux pendules se suivent. En revanche, si les pendules sont lâchés avec une grande amplitude, ils ne font que un ou deux balancements ensemble avant de prendre des motifs complètement différents.

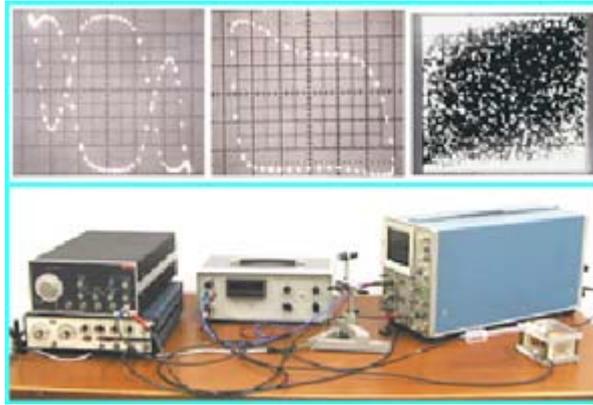


Ce pendule est monté de manière excentrique sur une plaque tournante dans un plan vertical. Le mouvement chaotique est apprécié grâce à un éclairage stroboscopique.

Des pendules couplés par des effets magnétiques présentent aussi des comportements chaotiques notoires !



Avec un peu d'électronique, il est possible de suivre la position et le couple de force sur un écran d'oscilloscope. En abscisse, on reporte le courant produisant le champ magnétique, en ordonnée, la position de l'aimant permanent (détectée par un gaussmètre). On observe ici qu'il existe des domaines de fréquence du courant et d'amplitude du courant, pour lesquels le système est chaotique : toutes sortes de combinaisons (courant, position) sont possibles, et ainsi l'écran se couvre de points. Sous d'autres valeurs du courant et de la fréquence, le système suit une orbite cyclique caractérisée par une ligne, quand bien même complexe, dans le plan des valeurs (courant, position).



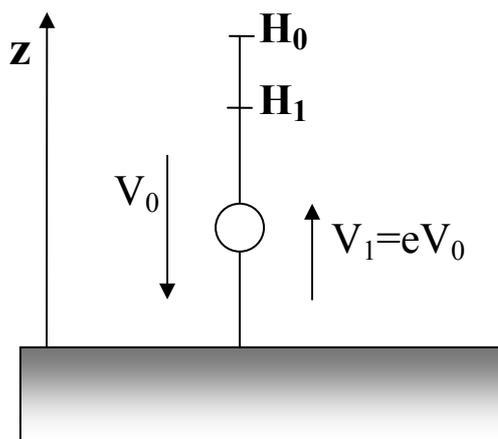
En bas à droite, la cellule qui contient un aimant libre de rotation autour d'un axe vertical, et une bobine produisant un champ horizontal. Sur l'écran de l'oscilloscope, on rapporte l'orientation de l'aimant en fonction du courant.

### Rebonds multiples

La théorie du chaos est au-delà des prérogatives de ce traité d'introduction à la mécanique. Le problème suivant est un petit amusement mathématique.

On lâche sans vitesse initiale une balle d'une hauteur  $h$  sur un sol plan. Le coefficient de restitution (rapport de la vitesse de rebond par rapport à la vitesse incidente) vaut  $e < 1$ .

- A quelle hauteur la balle remonte-t-elle au  $n$ -ième rebond ?
- Quel est le nombre (théorique) total de rebonds ? Quelle est leur durée totale ? Quel est le paradoxe classique ainsi évoqué ?



## 2<sup>ème</sup> partie :

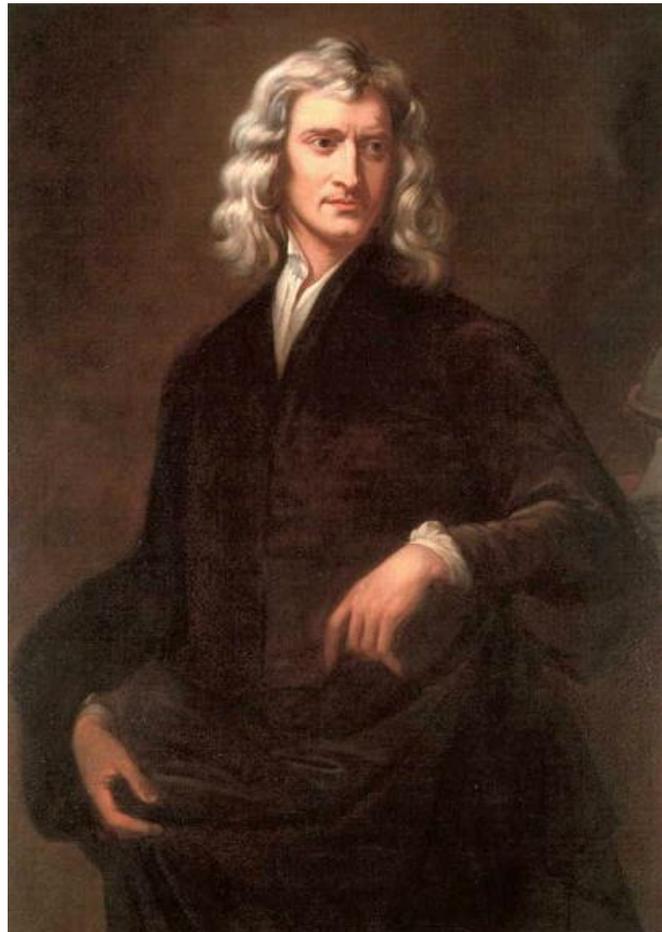
# Les bases de la mécanique newtonienne

***Cinématique du point matériel***

***Les trois lois de Newton***

***Lois de conservations, systèmes de points matériels***

***Energie, puissance, travail***



## ***Les bases de la cinématique***

Dans les exemples de la balistique et de l'oscillateur harmonique, les concepts de vitesse et d'accélération avaient une allure d'évidence, car on travaillait en coordonnées cartésiennes. Il suffisait alors d'invoquer la notion intuitive selon laquelle une vitesse est une dérivée première par rapport au temps des coordonnées cartésiennes (de même pour l'accélération). Pour aller plus en avant, il est nécessaire maintenant de passer par une introduction formelle à la cinématique. Le concept clé est bien évidemment celui de référentiel. Il a une importance historique (voir «Le sentier des mécaniciens»). De plus, c'est avec la notion de référentiel que s'articule le concept d'accélération de Coriolis. Enfin, la question du choix du référentiel conduira à la théorie de la relativité !

Ce chapitre insiste sur une difficulté conceptuelle pour le débutant : Il n'est pas évident pour tous qu'il y a changement de vitesse (accélération) quand une vitesse change d'orientation, sans changer de module.

### **Référentiel**

On appelle référentiel un ensemble de  $N$  points ( $N \geq 4$ ) non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres. Par extension, on appelle aussi référentiel l'ensemble de tous les points immobiles par rapport aux  $N$  points considérés.

Les vitesses et les accélérations sont définies ou mesurées, par rapport à un référentiel qu'on se doit de spécifier.

Pratiquement, un référentiel peut être

- le laboratoire
- le centre du soleil et 3 étoiles fixes
- un carrousel
- le référentiel "du centre de masse" (notion introduite plus tard)
- un système d'axes cartésiens.

Il est fréquent de matérialiser un référentiel par un système d'axes cartésiens. De là vient la confusion chez certains entre référentiel et repère ! Dans les problèmes de balistique résolus en coordonnées cartésiennes, il est sous-entendu que le système d'axes constitue un référentiel et qu'un repère est lié à ce référentiel. Il est indispensable, pour la bonne compréhension de tout le cours de mécanique, de faire la distinction entre le référentiel et le repère. La cinématique en coordonnées généralisées met en évidence cette distinction de façon particulièrement saisissante, puisque dans ce cas, on utilise un repère lié au point matériel en mouvement, plutôt qu'un repère lié au référentiel.

### **Trajectoire** :

On appelle trajectoire le lieu géométrique des points occupés par un point matériel au cours du temps.

**Equation horaire** :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 

La fonction  $\mathbf{r}(t)$  donne la position d'un point matériel en tout temps  $t$ . On l'appelle l'équation horaire. Prédire cette donnée est au fond le but ultime de la mécanique.

**Equation du mouvement** :

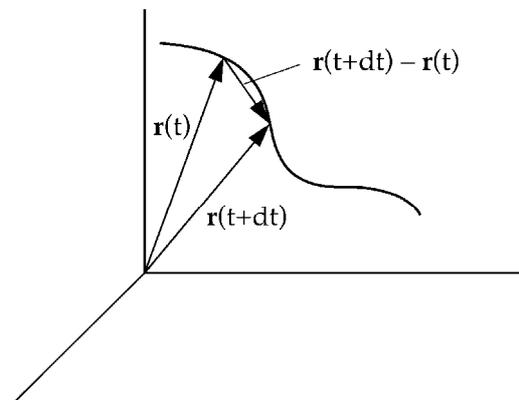
Ce terme désignera les équations différentielles qui régissent le mouvement étudié, quand elles prennent une forme finale, prête à une intégration numérique, par exemple.

**Vitesse**

La vitesse vectorielle instantanée se définit très naturellement par une dérivée vectorielle :

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

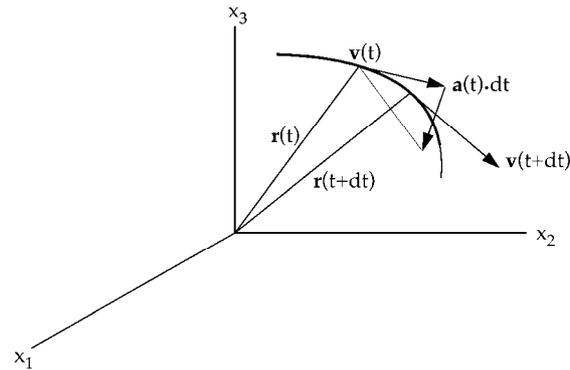
L'interprétation géométrique de cette limite suggère que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Souvent, on s'autorise en physique à se contenter d'une telle intuition matérielle des choses. Parfois, il faudra se méfier de telles évidences. Mais ici, il n'y a pas de problèmes, tant que le mouvement est régulier, qu'il n'y a pas de choc, notamment, ou de rebond.

**Accélération vectorielle instantanée**

Par analogie avec la définition de la vitesse, l'accélération vectorielle est donnée naturellement par :

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Cependant, il faut faire attention: l'accélération ne se visualise pas aussi bien que la notion de vitesse !



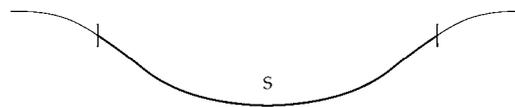
Il est bon, en particulier dans la manipulation d'expressions algébriques représentant des grandeurs physiques, de veiller à garder la cohérence des unités. On se souviendra que la vitesse a les unités d'une longueur divisée par un temps, l'accélération, celles d'une longueur divisée par le carré d'un temps. Typiquement, avec le système international d'unités (SI) :

vitesse :  $[v] = \frac{m}{s}$

accélération:  $[a] = \frac{m}{s^2}$

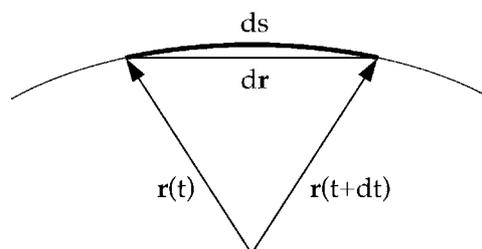
### Accélération normale et tangentielle

On appelle abscisse curviligne  $s$  la mesure de la longueur parcourue le long de la trajectoire.



La vitesse **scalaire** est  $\frac{ds}{dt} = v = |v|$ . C'est la vitesse indiquée par l'odomètre d'une voiture. Si la trajectoire est donnée de façon paramétrique comme une fonction de  $s$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  avec  $s = s(t)$ , la vitesse vectorielle peut s'écrire :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$



Posons  $\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ .  $\hat{\tau}$  est un vecteur unité. En effet, par inspection du dessin il apparaît à la limite  $dt \rightarrow 0$  :

$$|d\mathbf{r}| = ds, \text{ donc } \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{ds} = 1$$

Pour l'accélération, la dérivation fait apparaître deux termes :

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (v \cdot \hat{t}) = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt}$$

Le 1<sup>er</sup> terme est l'accélération tangentielle :

$$\frac{dv}{dt} \hat{t}.$$

Le 2<sup>ème</sup> terme est l'accélération normale. Cette désignation vient du fait qu'elle est normale à la tangente. En effet, puisque

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$$

$$\frac{d}{dt} (\hat{t} \cdot \hat{t}) = 0 = 2 \hat{t} \frac{d\hat{t}}{dt}$$

Donc  $\frac{d\hat{t}}{dt}$  est perpendiculaire à  $\hat{t}$ .

Cette analyse aboutit à la notion très importante suivante. Quand une vitesse change de direction et pas d'amplitude (vitesse scalaire constante), il y a une accélération. La conséquence en mécanique est cruciale : une force agit !

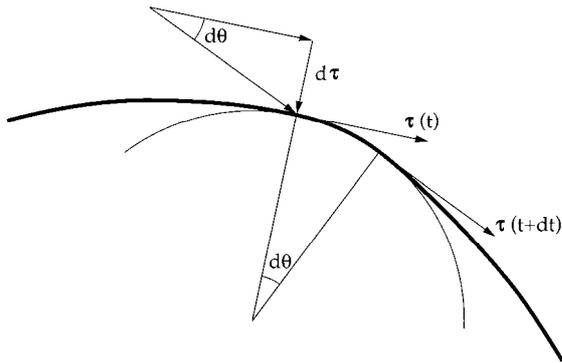
De  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$ , il vient

$$v \frac{d\hat{t}}{dt} = v \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\hat{t}}{ds}$$

La géométrie analytique fournit le résultat:

$$\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \frac{1}{R}$$

où  $R$  est le rayon de courbure. Donc, l'accélération normale vaut  $\frac{v^2}{R}$  où  $R$  est le rayon de courbure. On peut comprendre le sens de ces formules-ci par l'argument suivant. Il faut d'abord se convaincre de l'approximation d'une courbe infinitésimale par un arc de cercle. C'est une approximation du deuxième ordre. Sur ce cercle, le vecteur tangent évolue en fonction de l'angle  $d\theta$  de la manière indiquée :



De cette figure, il vient :

$$\left| \frac{d\hat{\tau}}{ds} \right| = \frac{|d\hat{\tau}|}{ds} = \frac{d\theta \cdot 1}{R \cdot d\theta} = \frac{1}{R}$$

### Le mouvement circulaire uniforme

Il est bon d'être bien au clair sur les propriétés du mouvement circulaire uniforme. On y trouve de façon limpide le fait qu'une vitesse scalaire peut être constante, mais l'accélération non nulle.

On pose qu'un point se déplace sur un cercle à vitesse scalaire constante. Si on définit un système d'axe cartésien dont l'origine est au centre du cercle, et qu'on utilise les coordonnées polaires, on a :

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = R\dot{\phi} = R\omega$$

avec  $\dot{\phi} = \omega$  constant. Par intégration, en prenant des conditions initiales qui conviennent, on a :

$$\phi = \omega t$$

Par conséquent, l'équation horaire de ce point est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \phi)$$

$$z = \text{constante}$$

Comme  $x^2 + y^2 = R^2$ , la trajectoire est un cercle de rayon R. De plus  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2 \omega^2$ . Le cercle est parcouru à une vitesse scalaire  $v = |\mathbf{v}| = R\omega$ , où R est le rayon du cercle. Bien que le cercle soit parcouru à vitesse uniforme, l'accélération n'est pas nulle !!! En effet :

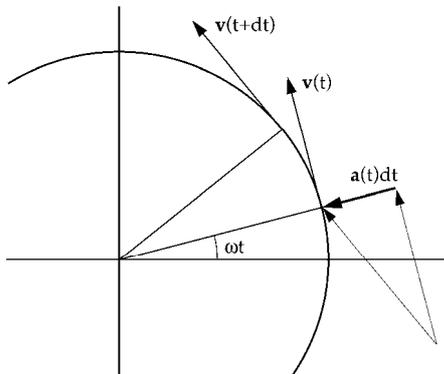
$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = R^2 \omega^4$$

Le module de l'accélération vaut  $a = R\omega^2$ . Le fait que l'accélération soit non nulle vient du fait que la **direction** de la vitesse change.

La construction suivante permet de s'en rendre compte.



Des expressions pour l'accélération comparées à l'équation horaire, il vient :

$$\mathbf{a} // \mathbf{r} \quad \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Puisque  $\mathbf{a}$  est dirigée vers le centre du cercle, on l'appelle **accélération centripète**.

### Point matériel sur une ellipse

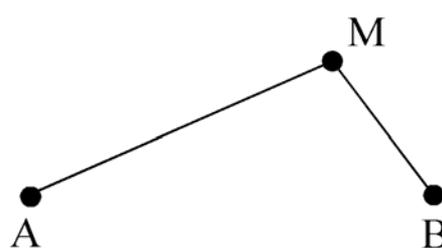
Un point matériel se déplace dans le plan  $Oxy$  de façon que son vecteur position soit donné par  $\vec{r} = a \cdot \cos(\omega t) \hat{i} + b \cdot \sin(\omega t) \hat{j}$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives telles que  $a > b$ , et  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$  sont les vecteurs unitaires des axes  $Ox$  et  $Oy$ . Obtenir la vitesse et l'accélération. Esquissez ces deux vecteurs. L'accélération est-elle dirigée vers le foyer de l'ellipse ou vers  $O$  ?

### Ellipse

Un point matériel se déplace dans le plan  $Oxy$  de façon que son vecteur position soit donné par  $\vec{r} = a \cdot \cos(\omega t) \hat{i} + b \cdot \sin(\omega t) \hat{j}$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives telles que  $a > b$ , et  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$  sont les vecteurs unitaires des axes  $Ox$  et  $Oy$ . Montrer que le point matériel se déplace sur une ellipse.

*Facultatif* : un point matériel  $M$  se déplace dans un plan par rapport aux points fixes  $A$  et  $B$  de façon que la condition  $\|AM\| + \|BM\| = \text{constante}$  soit vérifiée. Montrer que le point matériel se déplace sur une ellipse.



## Repères, Vecteurs,

### Coordonnées sphériques et cylindriques

Pour se lancer dans la description du mouvement d'un point matériel dans l'espace à trois dimensions, il est nécessaire de perfectionner son outillage mathématique et géométrique. En cherchant à appliquer la deuxième loi de Newton, on sera naturellement confronté à projeter des forces dans des directions particulières. Il est bon de définir la projection d'une force sur un axe par une opération bien définie mathématiquement. La description des rotations est couramment faite en mécanique par le biais d'une expression faisant intervenir le produit vectoriel. Ce chapitre rappelle la notion de produit vectoriel est introduit la description des rotations infinitésimales. Enfin, ce chapitre introduit les définitions des coordonnées cylindriques et sphériques. Les repères naturellement associés à ces coordonnées sont définis. Les composantes des vitesses et accélérations projetées dans ces repères sont obtenues pour usage ultérieur dans les problèmes à contraintes (voir chapitre « contraintes »)

### Produit scalaire

Il s'agit ici de rappeler quelques propriétés élémentaires du produit scalaire, dans le but essentiellement de fixer les notations. Considérons un système d'axes cartésiens et un point P de coordonnées (x,y,z). Le vecteur  $\mathbf{a}=\mathbf{OP}$  a les composantes (x,y,z). Soit un autre vecteur  $\mathbf{b}$  de composantes (x',y',z'). Le produit scalaire peut être défini par :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xx' + yy' + zz'$$

On considère maintenant deux vecteurs orthogonaux. On peut (dans une attitude typique de la mécanique) définir un système d'axes de coordonnées avec l'axe des x le long du premier vecteur  $\mathbf{a}$  et l'axe des y le long du deuxième,  $\mathbf{b}$ . Alors le produit scalaire vaut :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

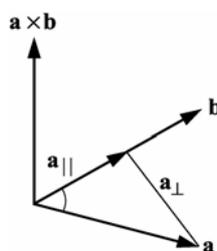
Dans le cas général, on peut décomposer un des vecteurs en un vecteur parallèle et un vecteur perpendiculaire à l'autre vecteur :

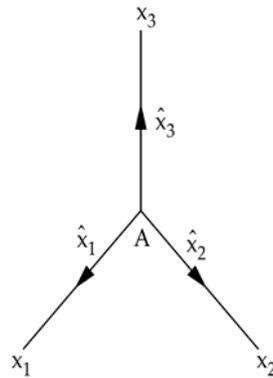
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \text{ avec } \mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ et } \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{a}_{\perp} = 0$$

Alors, on a :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}_{\parallel}||\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cos\theta|\mathbf{b}|$$

où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs.



Repère

Considérons un système d'axes cartésiens  $Ax_1x_2x_3$ . On appelle vecteur unité un vecteur dont la norme vaut 1.

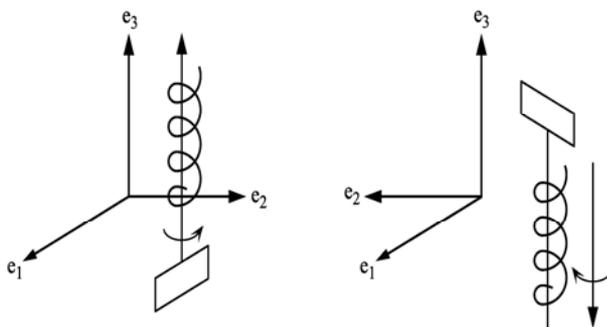
Les trois vecteurs  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$  représentent les vecteurs unités dans les directions 1, 2 et 3. Dans une notation plus synthétique (à voir au cours d'algèbre linéaire) :

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$$

$$\text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On appelle  $(A, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  un repère .

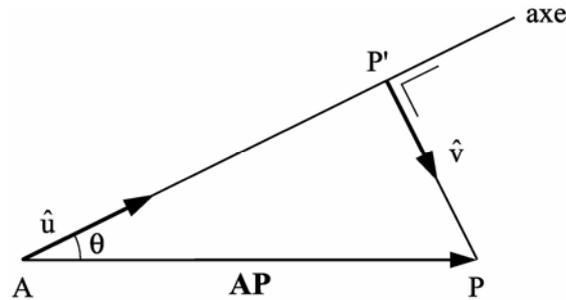
Dans ce traité, quand on parlera de repère, il s'agira toujours d'un repère "orthonormé direct". Direct veut dire que les vecteurs unités obéissent à la règle du tire-bouchon ou de la main droite...



Le tire-bouchon tourne comme  $\mathbf{e}_1$  tourne sous l'action de  $\mathbf{e}_2$  si  $\mathbf{e}_2$  représentait une force attachée à l'extrémité de  $\mathbf{e}_1$ . Il tourne en avançant dans le sens de  $\mathbf{e}_3$ . On peut aussi imaginer que ce même mouvement hypothétique de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  est suivi par les doigts de la main droite. Le pouce de la main droite est alors dans la direction de  $\mathbf{e}_3$ .

## Projection d'un vecteur sur axe

On considère un vecteur  $\mathbf{AP}$  et un axe de coordonnées cartésiennes. La projection de  $\mathbf{AP}$  sur l'axe est  $|\mathbf{AP}| \cdot \cos \theta$  où  $|\mathbf{AP}|$  est la norme du vecteur  $\mathbf{AP}$  et  $\theta$  l'angle entre le vecteur et l'axe. On notera que cette grandeur a un signe qui dépend de la valeur de l'angle  $\theta$ .



Soit  $\hat{u}$  le vecteur unitaire dans la direction de l'axe. La projection de  $\mathbf{AP}$  sur l'axe vaut  $\mathbf{AP} \cdot \hat{u}$  car en général  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  et par conséquent  $\mathbf{AP} \cdot \hat{u} = |\mathbf{AP}| \cdot \cos \theta$ . Soit  $\hat{v} \perp \hat{u}$  dans le plan (APP'). La somme vectorielle

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AP}' + \mathbf{P}'\mathbf{P}$$

peut s'écrire  $\mathbf{AP} = (\mathbf{AP} \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} + (\mathbf{AP} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{v}$ .

Cette formule peut paraître d'allure étrange. Pourtant, elle exprime un résultat bien connu quand il s'agit des coordonnées cartésiennes pour lesquelles on peut écrire:

$$\mathbf{AP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

*Cette formulation vectorielle des projections sera utilisée dans ce qui suit. On y fera également appel dans les cas délicats de projection où l'inspection d'un dessin ne suffit plus.*

## Produit vectoriel

Soient deux vecteurs donnés par leurs composantes sur un repère  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Le produit vectoriel se calcule selon la règle :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Le produit mixte  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  peut se calculer comme le déterminant:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Des règles du calcul des déterminants, il vient ainsi

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

Quand deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul. Par conséquent :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

Cela signifie que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est perpendiculaire au plan contenant  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

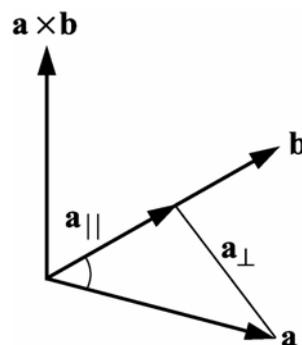
On veut maintenant établir la relation entre le module du produit vectoriel de deux vecteurs et les modules des deux vecteurs. Pour se faire, on décompose un des vecteurs en un vecteur parallèle et un vecteur perpendiculaire à l'autre vecteur :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\parallel} \text{ avec } \mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ et } \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{a}_{\perp} = 0$$

Alors  $\mathbf{a}_{\parallel} \times \mathbf{b} = 0$  et  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{b}$ . Par conséquent, le module du produit vectoriel est donné par

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}_{\perp}| \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{b}|$$

Pour la 1<sup>ère</sup> égalité on peut s'imaginer calculer le produit vectoriel en composantes en utilisant le repère porté par  $\mathbf{a}_{\perp}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .



### Autres propriétés du produit vectoriel

Si  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$  alors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{c}$ , donc  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont dans le même plan et il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$

Une formule souvent utilisée est :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

Une façon de la démontrer est de faire le développement de l'expression :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_2 & c_3 - b_3 & c_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_3 & c_1 - b_1 & c_3 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_1 & c_2 - b_2 & c_1 \end{vmatrix}$$

De même il peut être montré :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$$

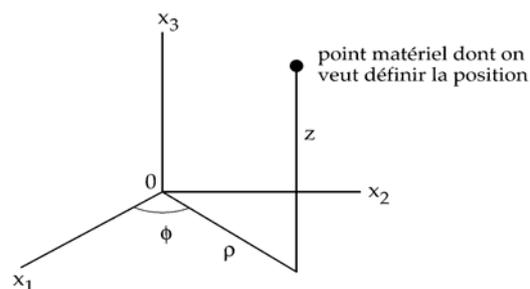
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$$

## Coordonnées cylindriques et sphériques

*En apprenant à travailler avec des systèmes de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes, l'étudiant se familiarise avec la notion de repère et l'idée de choisir la meilleure manière de paramétrer un problème.*

### Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont  $\rho, \phi, z$  définies dans la figure suivante.



La relation entre coordonnées cartésiennes et cylindriques s'obtient immédiatement par inspection de la figure.

$$x_1 = \rho \cos \phi$$

$$x_2 = \rho \sin \phi$$

$$x_3 = z$$

Utiliser les coordonnées cylindriques pour décrire le mouvement d'un point matériel signifie que l'équation horaire est donnée par:

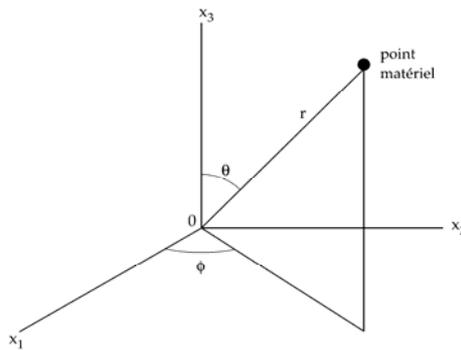
$$\rho = \rho(t)$$

$$\phi = \phi(t)$$

$$z = z(t)$$

### Coordonnées sphériques

La position du point matériel est donnée par les coordonnées  $(r, \theta, \phi)$



La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est donnée par :

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

Le mouvement du point matériel est donné par:

$$r = r(t)$$

$$\phi = \phi(t)$$

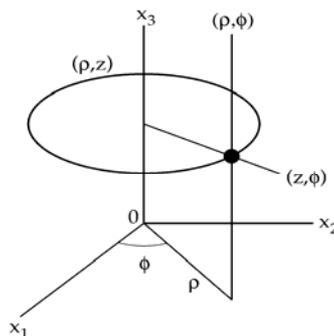
$$\theta = \theta(t)$$

### *Lignes de coordonnées*

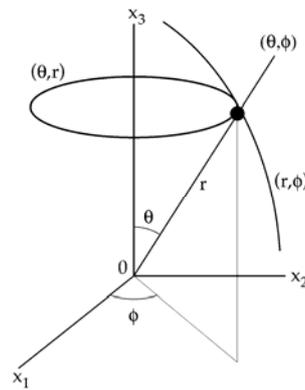
On va maintenant définir un repère lié au point matériel dont l'orientation est donnée par les lignes de coordonnées.

**Définition** : une ligne de coordonnée est le lieu géométrique des points qui ont 2 coordonnées de valeurs fixes.

Pour les coordonnées cylindriques, les lignes de coordonnées sont dénotées dans le graphique ci-dessous par les deux coordonnées maintenues constantes.



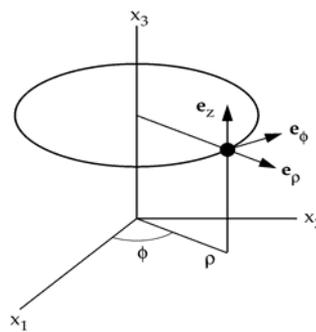
De même pour les coordonnées sphériques :



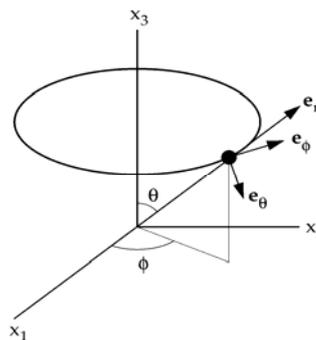
### Repères associés

Des considérations géométriques simples suffisent à montrer que les vecteurs tangents à chaque ligne de coordonnées sont orthogonaux. Il suffit alors de prendre des vecteurs tangents de norme 1 pour former un repère.

*coordonnées cylindriques*



*coordonnées sphériques*



### Composantes de la vitesse et de l'accélération sur les repères associés aux coordonnées cylindriques et sphériques

On verra qu'il est souvent bénéfique d'utiliser les coordonnées cylindriques ou sphériques. Dans ce cas, on voudra connaître les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère associé aux coordonnées. On peut partir des relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques, dériver une fois pour la vitesse, deux fois pour l'accélération et finalement regrouper les termes en reconnaissant les composantes cartésiennes des vecteurs unités du repère associé. On verra plus loin une manière plus élégante. Celle-ci a l'avantage d'être

immédiate, mais laborieuse. On trouve les résultats suivant, qui devraient figurer dans un formulaire de base de la mécanique.

### Coordonnées cylindriques

$$\mathbf{v} = \dot{p}\mathbf{e}_p + p\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{p} - p\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_p + (p\ddot{\phi} + 2\dot{p}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

### Coordonnées sphériques

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta$$

## Coordonnées

Ecrire en coordonnées cartésiennes (x,y,z), cylindriques ( $\rho$ ,  $\phi$ ) et sphériques (r,  $\theta$ ,  $\phi$ )

- l'équation d'une sphère centrée à l'origine.
- l'équation d'un cylindre parallèle à l'axe z, de longueur L, dont l'axe passe par l'origine.

## Produit vectoriel

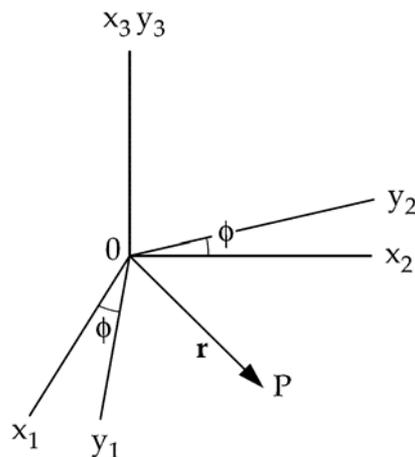
- Dessiner  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
- Des charges électriques q négatives passent dans un ruban conducteur à une vitesse v. Un champ magnétique B est appliqué perpendiculairement au ruban. Dessiner  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$ ,  $q\vec{v} \times \vec{B}$ .
- Soit une grandeur physique définie par un vecteur  $\vec{L}$ , telle que  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ .
- Décrire le mouvement de  $\vec{L}$ .
- Démontrer  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

## Rotations

*La notion de rotation, bien que familière à tous, demeure difficile à comprendre et à manipuler quand elle est exprimée sous forme mathématique. Et pourtant, elle est centrale en mécanique. On peut bien s'imaginer que le mouvement d'un solide nécessite une description des rotations. En fait, la notion de rotation intervient aussi en cinématique du point matériel, pour la raison suivante.*

*Comme nous l'avons vu avec les problèmes de balistique, pour traiter un problème de mécanique, nous projetons les équations vectorielles du mouvement dans des directions orthogonales. Nous verrons qu'un problème de mécanique est souvent simplifié si le repère choisi est en mouvement. C'est le cas par exemple lorsqu'on travaille avec des coordonnées cylindriques ou sphériques. Par conséquent, on va aborder cette question de la représentation des rotations en examinant le mouvement d'un repère, en posant que son origine est fixe. Nous verrons qu'il s'agit toujours d'une rotation.*

Dans ce qui suit, nous adoptons le point de vue selon lequel le vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  est donné. Ses projections sur deux repères différents sont liées. Les lois de transformation peuvent être obtenues de la manière suivante. Vu le caractère introductif de cette présentation, on la basera sur un exemple concret : une rotation d'axe  $Ox_3$  d'un angle  $\phi$ .



Les projections des vecteurs unitaires d'un repère sur l'autre s'obtiennent par inspection de la figure

$$\hat{y}_1 = \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \phi \hat{x}_2$$

$$\hat{y}_2 = -\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2$$

Il suffit d'effectuer le produit scalaire de  $\mathbf{r}$  avec ces équations pour obtenir les coordonnées de  $\mathbf{r}$  dans les deux repères :

$$\mathbf{r} \cdot \hat{y}_1 = \cos \phi \mathbf{r} \cdot \hat{x}_1 + \sin \phi \mathbf{r} \cdot \hat{x}_2$$

$$\mathbf{r} \cdot \hat{y}_2 = -\sin \phi \mathbf{r} \cdot \hat{x}_1 + \cos \phi \mathbf{r} \cdot \hat{x}_2$$

Avec les conventions d'écriture habituelles, cela s'écrit :

$$y_1 = \cos \phi \cdot x_1 + \sin \phi \cdot x_2$$

$$y_2 = -\sin \phi \cdot x_1 + \cos \phi \cdot x_2$$

Il est commode d'employer une notation matricielle:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si la troisième coordonnée est ajoutée, on a:

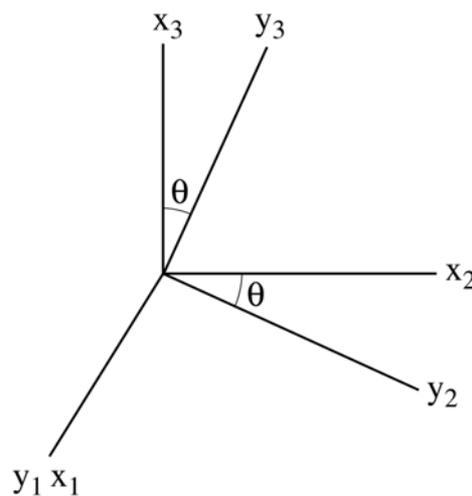
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On désignera par A cette matrice et on désignera symboliquement la transformation par :

$$(y_i) = A(x_i)$$

### Composition des rotations

On considère une deuxième rotation, celle-ci dans le plan  $Ox_2x_3$



Cette rotation sous forme matricielle donne :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On notera B cette deuxième matrice et on notera symboliquement :

$$(y_i) = B(x_i)$$

On considère alors la composition des rotations, en prenant soin de spécifier l'ordre dans lequel les rotations sont faites. On pose que la première rotation est celle définie par la matrice B. Alors les coordonnées du vecteur **OP** deviennent sous l'effet des deux rotations successives :

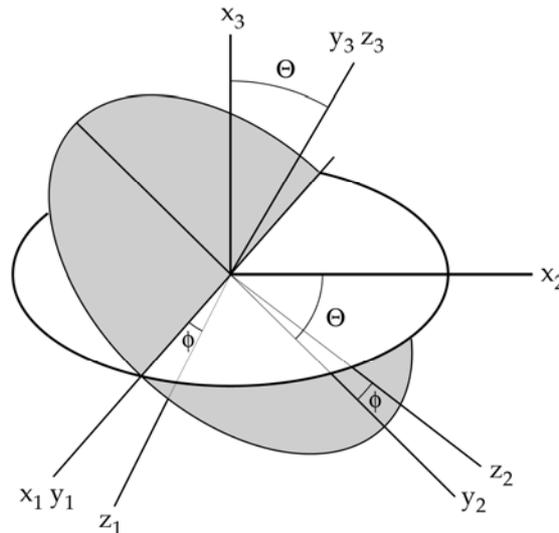
$$(y_i) = B(x_i)$$

$$(z_i) = A(y_i) = AB(x_i)$$

Cette notation n'a de sens que si le produit  $AB$  est défini. Il se trouve que le produit des matrices dans cet ordre donne, comme la notation le suggère, la matrice de la composition des rotations, dans cet ordre. Pour s'en convaincre, on calcule d'une part le produit  $AB$  :

$$AB = \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

D'autre part, on peut construire la figure qui exprime l'effet de la composition des rotations sur le repère.



On peut alors déterminer la matrice de la transformation résultante en projetant les vecteurs unités du repère transformé sur le repère initial. Par exemple, avec la notation convenue usuelle :

$$\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_2 = \sin \theta$$

$$\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_3 = \cos \theta$$

Ainsi, on peut se convaincre que les éléments de matrice de la transformation sont bien ceux obtenus par le produit  $AB$  des matrices de chaque rotation.

### Théorème d'Euler

Toute transformation d'un repère orthonormé direct à un autre qui laisse l'origine fixe, est une rotation. Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'Euler.

On commence par projeter un repère  $(O \hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3)$  dans le repère  $(O \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  en toute généralité :

$$\hat{z}_1 = (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_1) \hat{x}_1 + (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_2) \hat{x}_2 + (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_3) \hat{x}_3$$

$$\hat{z}_2 = (\hat{z}_2 \cdot \hat{x}_1) \hat{x}_1 + (\hat{z}_2 \cdot \hat{x}_2) \hat{x}_2 + (\hat{z}_2 \cdot \hat{x}_3) \hat{x}_3 \quad \hat{z}_3 = (\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_1) \hat{x}_1 + (\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_2) \hat{x}_2 + (\hat{z}_3 \cdot \hat{x}_3) \hat{x}_3$$

On peut écrire ces relations en terme des éléments de la matrice de la transformation :

$$\hat{z}_1 = \alpha_{11} \hat{x}_1 + \alpha_{12} \hat{x}_2 + \alpha_{13} \hat{x}_3$$

$$\hat{z}_2 = \alpha_{21} \hat{x}_1 + \alpha_{22} \hat{x}_2 + \alpha_{23} \hat{x}_3$$

$$\hat{z}_3 = \alpha_{31} \hat{x}_1 + \alpha_{32} \hat{x}_2 + \alpha_{33} \hat{x}_3$$

Soit P un point donné, représenté par le rayon vecteur  $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ . Les composantes du vecteur  $\mathbf{r}$  se calculent selon :

$$z_1 = \mathbf{r} \cdot \hat{z}_1 = (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_1)(\mathbf{r} \cdot \hat{x}_1) + (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_2)(\mathbf{r} \cdot \hat{x}_2) + (\hat{z}_1 \cdot \hat{x}_3)(\mathbf{r} \cdot \hat{x}_3)$$

Il en va de même pour  $z_2$  et  $z_3$  et ainsi :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{z}_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{z}_2 \cdot \hat{x}_2 & \hat{z}_2 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{z}_3 \cdot \hat{x}_1 & \hat{z}_3 \cdot \hat{x}_2 & \hat{z}_3 \cdot \hat{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On pourrait chercher la transformation inverse en calculant les projections de  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  dans  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3)$ . Par exemple :

$$\hat{x}_1 = (\hat{x}_1 \cdot \hat{z}_1)\hat{z}_1 + (\hat{x}_1 \cdot \hat{z}_2)\hat{z}_2 + (\hat{x}_1 \cdot \hat{z}_3)\hat{z}_3$$

L'élément (1,2) de cette matrice est justement l'élément (2,1) de la matrice précédente. De même pour les autres éléments de la matrice. On peut donc écrire :

$$\hat{x}_1 = \alpha_{11}\hat{z}_1 + \alpha_{21}\hat{z}_2 + \alpha_{31}\hat{z}_3$$

$$\hat{x}_2 = \alpha_{12}\hat{z}_1 + \alpha_{22}\hat{z}_2 + \alpha_{32}\hat{z}_3$$

$$\hat{x}_3 = \alpha_{13}\hat{z}_1 + \alpha_{23}\hat{z}_2 + \alpha_{33}\hat{z}_3$$

Ainsi la matrice de la transformation inverse est obtenue en intervertissant le numéro de ligne et de colonne de la matrice de la transformation directe. La résultante de cette opération sur les lignes et les colonnes s'appelle la transposée d'une matrice. Elle est définie par ses éléments de matrice :

$$(\alpha^T)_{ij} = \alpha_{ji}$$

Nous avons obtenu  $(\alpha^T)_{ij} = \alpha_{ji} = (\alpha^{-1})_{ij}$ , c'est-à-dire, l'inverse de la matrice  $\alpha$  est sa transposée. Une matrice qui a cette propriété est dite orthogonale. Aux cours de mathématiques, il est montré qu'une transformation orthogonale admet toujours la valeur propre +1. Pour nous, cela veut dire que le système d'équation

$$\alpha \hat{u} = \hat{u}$$

a toujours une solution. Donc il y a toujours un axe fixe ! De plus, les angles entre les vecteurs et aussi les longueurs sont conservées dans une telle transformation. En effet :

$$(\alpha \mathbf{x}) \cdot (\alpha \mathbf{y}) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \left( \sum_j \alpha_{ij} x_j \right) \left( \sum_k \alpha_{ik} y_k \right) = \sum_{jk} \sum_i \alpha_{ji}^T \alpha_{ik} x_j y_k = \\ & = \sum_{j,k} \delta_{jk} x_j y_k = \sum_k x_k y_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

On peut conclure que la transformation qui amène un repère en un autre de même origine, est une rotation.

### Rotations infinitésimales

En mécanique, nous aurons affaire à des repères qui évoluent au cours du temps. Pour le calcul des dérivées temporelles, il faudra considérer le repère à l'instant  $t$  et  $t + dt$ . Entre  $t$  et  $t + dt$ , le repère aura subi une rotation infinitésimale, c'est-à-dire que l'angle de rotation sera "infinitement" petit.

Dans le premier exemple de rotation ci-dessus, si l'angle est infiniment petit, noté  $d\phi$ , les développements limités au premier ordre des éléments de matrice fournissent :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, une matrice infinitésimale doit avoir la forme  $\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$  où  $\mathbf{1}$  désigne la matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  n'a que des éléments infiniment petits ou nuls. En général, la composition des rotations se calcule comme le produit des matrices des rotations correspondantes. Dans le cas de rotations infinitésimales, nous avons le résultat simple suivant :

$$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$$

car on néglige les termes supérieurs au premier ordre. Par conséquent, à la composition des rotations infinitésimales correspond l'addition des matrices  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspondantes. Ce résultat implique que la transformation inverse est immédiate :

$$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}$$

car

$$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}.$$

#### Vecteur instantané de rotation

Dans le cadre de la cinématique, nous allons nous intéresser à l'évolution temporelle des vecteurs unités d'un repère entre un temps  $t$  et  $t + dt$ . Soit  $\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$  la matrice qui décrit cette rotation. On a :

$$\hat{e}_i(t + dt) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}) \hat{e}_i(t)$$

$$\hat{e}_i(t + dt) - \hat{e}_i(t) = \boldsymbol{\varepsilon} \hat{e}_i(t)$$

Les éléments de matrice de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont nuls ou proportionnels à  $dt$ . On peut donc écrire  $\boldsymbol{\varepsilon} = A dt$  où les éléments de  $A$  sont finis. Il vient alors :

$$\hat{e}_i(t + dt) - \hat{e}_i(t) = A dt \hat{e}_i(t)$$

Par conséquent, la dérivée des vecteurs unités peut s'écrire :

$$\frac{d\hat{e}_i(t)}{dt} = A\hat{e}_i(t)$$

La matrice A doit avoir des propriétés particulières, du fait qu'elle est directement liée à une rotation. Le fait que la norme des vecteurs unités soit conservée implique :

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(\hat{e}_i \hat{e}_i) = 2\hat{e}_i A\hat{e}_i = 2A_{ii}$$

Pour se convaincre de la dernière égalité, il suffit d'écrire  $\hat{e}_i A\hat{e}_i$  en termes matriciels. On écrira

par exemple  $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Le fait que les angles entre les vecteurs unités soient aussi constants

implique:

$$0 = \frac{d}{dt}(\hat{e}_i \hat{e}_j) = \hat{e}_i A\hat{e}_j + \hat{e}_j A\hat{e}_i = A_{ij} + A_{ji}$$

Ainsi la matrice A doit avoir la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a que trois coefficients qui déterminent cette transformation. **Par convention**, ces trois coefficients sont notés comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est cette convention qui va imposer qu'on ne travaille qu'avec des repères orthonormés *directs*.

On change maintenant de point de vue ! On considère l'évolution d'un vecteur  $\mathbf{r}$  rigidement lié au repère. Parce qu'il est rigidement lié, ses composantes  $(r_1, r_2, r_3)$  sont indépendantes du temps. L'évolution temporelle de  $\mathbf{r}$  est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3) \\ &= r_1 A\mathbf{e}_1 + r_2 A\mathbf{e}_2 + r_3 A\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = A\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On reconnaît ici un produit vectoriel pour autant qu'on pose l'existence d'un vecteur :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout vecteur lié au repère en rotation :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



### Formules de Poisson

De ces considérations découlent le résultat général suivant. Soit un repère  $(O \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  qui change son orientation dans le temps. Il existe un  $\boldsymbol{\omega}$  tel que

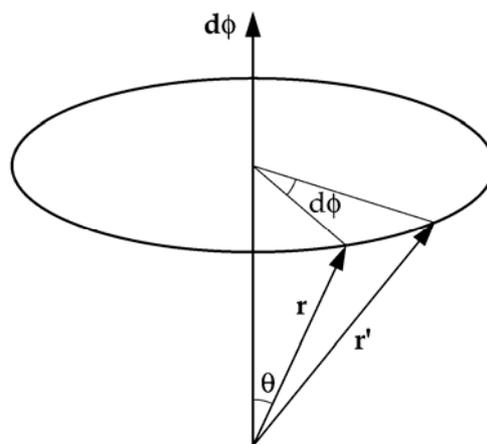
$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i \quad i = 1, 2, 3$$

On appelle ces relations les formules de Poisson. On va s'y référer très souvent très souvent.

### Interprétation géométrique du vecteur $\boldsymbol{\omega}$

La direction du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  s'obtient immédiatement. Comme  $\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$  si  $\mathbf{r}$  est parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ , il faut conclure que  $\boldsymbol{\omega}$  est sur l'axe de rotation. Il faut encore en déterminer la norme. On l'obtient par la considération géométrique suivante. D'une part, l'équation d'évolution pour un  $\mathbf{r}$  lié au repère en rotation implique

$$|\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}| |\boldsymbol{\omega}| dt \sin \theta$$



D'autre part, l'inspection de la figure fournit :

$$\frac{|\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)|}{|\mathbf{r}| \sin \theta} = d\phi$$

où  $d\phi = |\boldsymbol{\omega}| dt$ . Ces deux équations fournissent pour le module du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{d\phi}{dt}$$

On appelle le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  la **vitesse instantanée de rotation**.

### Application 1 : vitesses et accélérations en coordonnées cylindriques

Avec ce résultat, on est en mesure d'obtenir les composantes de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques de manière efficace. Avec les notations conventionnelles pour les coordonnées cylindriques, on part de :

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$$

Le vecteur instantané de rotation est dans la direction de  $z$  et de module  $\dot{\phi}$ . Les formules de Poisson fournissent :

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\phi} \times \mathbf{e}_\rho = \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\phi} \times \mathbf{e}_\theta = -\dot{\phi} \mathbf{e}_\rho$$

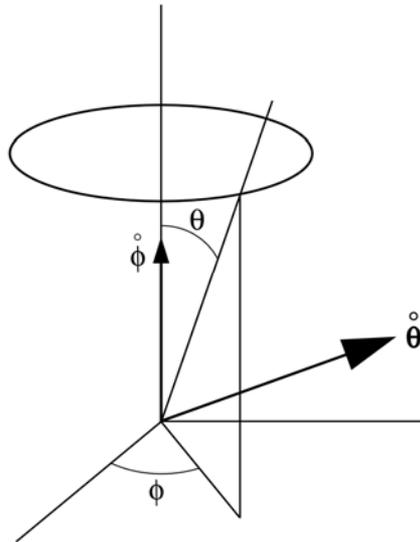
La vitesse et l'accélération s'obtiennent par dérivation par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\phi} \dot{\rho} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\phi} \mathbf{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta - \rho \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_\rho$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\theta$$

Le même calcul peut être conduit dans le cas des coordonnées sphériques. Il faudra considérer les vecteurs instantanés des rotations définies par les deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ . La composition des rotations se traduit simplement par l'addition de ces vecteurs instantanés de rotation.



### Application 2 : le mouvement circulaire

Un point matériel décrivant un cercle à vitesse scalaire constante subit une rotation dont le vecteur instantané est constant, normal au plan du cercle. Les résultats généraux ci-dessus permettent d'écrire pour l'évolution temporelle :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

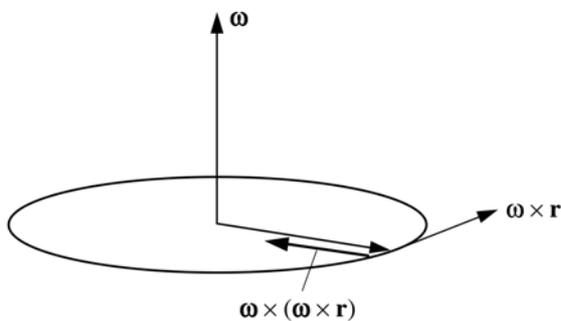
Cette équation implique pour le module de  $\mathbf{r}$  :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$$

c'est-à-dire que le module de  $\mathbf{r}$  est constant, comme il se doit. De plus

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

On trouve graphiquement que l'accélération est centripète. Cette expression de l'accélération centripète reviendra souvent.



### Coordonnées polaires, v, a

Soit un référentiel, des axes cartésiens attachés à ce référentiel et portant les vecteurs-unités  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . Soit  $(r, \theta)$  les coordonnées d'un point matériel. Soient  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  les vecteurs unités associés.

a) Montrez

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

b) Démontrez

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

### Cyclotron

Une particule de masse  $m$ , de charge  $q$ , se déplace dans un champ magnétique uniforme  $B$  parallèle à  $Oz$ . Une force  $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$  s'exerce alors sur la particule. La pesanteur est négligée.

a) Etablir les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes. Que peut-on dire du mouvement selon  $Oz$  ?

b) Montrer que la seconde loi de Newton peut s'écrire sous la forme  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ . Définir le terme  $\vec{\omega}$ .

c) En déduire que l'énergie cinétique  $K = \frac{1}{2}mv^2$  est une constante du mouvement.

d) Démontrez que les mouvements selon  $Ox$  et  $Oy$  sont harmoniques.

e) Démontrez que le mouvement selon  $Oxy$  est circulaire.

### Expérience du feutre sur la table tournante

On suppose que: la friction du feutre sur la table est négligée. Le problème de la trajectoire est traité par l'effet de la rotation du système d'axes de coordonnées choisis.

1) Décrire la trajectoire du feutre dans un référentiel fixe. La vitesse angulaire du disque central est  $\omega$ .

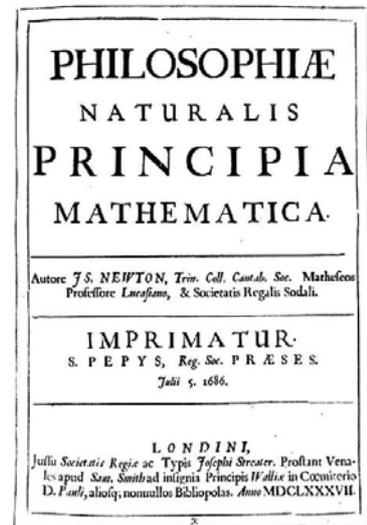
2) La trajectoire marquée sur la table tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  est la trajectoire du feutre vue dans un référentiel attaché à la table. Exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point du référentiel tournant en fonction des coordonnées de ce point dans le référentiel fixe. En déduire les équations horaires du mouvement dans le référentiel tournant. Esquisser la trajectoire.

3) Ecrire les équations du mouvement en utilisant les coordonnées, la vitesse et l'accélération mesurées dans le référentiel tournant.

4) Montrer que les équations horaires de 2) vérifient les équations du mouvement.

## La mécanique newtonienne

Ayant posé en cinématique la nécessité de définir un référentiel, la question se pose naturellement de savoir si n'importe quel référentiel peut être choisi. Newton, dans ses « Principia » répond à cette question par une loi, dite « première loi de Newton » ou loi d'inertie. Il pose ensuite comme deuxième loi une version généralisée de la loi que nous avons utilisé jusqu'ici. Cette généralisation vient de l'introduction par Newton de la notion de quantité de mouvement. Les développements de la physique théorique qui lui ont succédé ont révélé le génie de cette approche ! Enfin, Newton pose une troisième loi, naïvement appelée « loi d'action et de réaction ». On verra que cette loi peut en fait être comprise comme une expression d'une propriété fondamentale des forces d'interaction entre toutes particules.



*La mise en forme systématique, logique et déductive de la mécanique par Newton doit être vue comme un temps fort du développement de la science moderne. Newton la commence par un commentaire sur le temps et l'espace. Celui-ci sera discuté au moment où ces notions sont remises en question dans le cadre de la relativité restreinte. Ensuite, Newton introduit deux définitions. La première, celle de la quantité de matière, peut paraître triviale. Mais elle permet de faire comprendre la deuxième : la quantité de mouvement.*

### La quantité de matière : masse d'inertie

La masse  $M = \rho V$  ou  $\rho$  est la densité et  $V$  le volume est une grandeur **extensive** : la valeur de cette grandeur pour un système formé de deux sous-systèmes est la somme des valeurs de cette grandeur dans chaque sous-système. Dans le cas d'une distribution de masses, on peut définir la densité

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta M(\mathbf{x})}{\Delta v(\mathbf{x})}$$

La notion de masse n'est assurée que lorsqu'on peut définir une méthode pour mesurer cette quantité de matière. Cette méthode n'est peut-être pas pratique, mais elle permet de définir le concept de masse que l'on peut appeler la **masse d'inertie**. Une telle expérience « virtuelle » est souvent appelée « Gedankenexperiment ».

Démonstration d'auditoire : expérience avec le rail à air. On imagine qu'un dispositif placé entre deux plots du rail à air génère une détente qui libère les deux plots en les poussant loin l'un de l'autre.



Considérons qu'un des plots soit un multiple de l'étalon de masse. La mesure de la masse dans le sens donné ici est la recherche du multiple tel que les wagons se séparent à vitesses égales. La justification de cette mesure est fondée sur la troisième loi (loi d'action et de réaction).

### La quantité de mouvement<sup>19</sup>

Une grande idée, attribuée à Newton, est celle d'associer au *mouvement* une grandeur *extensive* qui caractérise **l'état** du mouvement. Dans des expériences de choc par exemple, un objet peut transférer tout ou partie de sa quantité de mouvement à un autre.

### Première loi de Newton et référentiel d'inertie

Selon Newton : " *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.*"

Ainsi, à la question de savoir qu'est-ce qui constitue un bon référentiel, la première loi de Newton donne une réponse pratique. Il faut que dans ce référentiel, le principe d'inertie soit vérifié. C'est-à-dire, dans la mesure où un objet peut être libre de force, il doit être ou bien immobile, ou bien en mouvement rectiligne uniforme. Le degré de précision des observations entre en jeu dans une telle évaluation. Si nous voulons décrire un objet lancé à quelques mètres dans le champ de la pesanteur, il suffit de considérer la Terre comme un référentiel d'inertie. En revanche, si nous voulons décrire le pendule de Foucault,<sup>20</sup> nous ne pouvons plus nous satisfaire de cette approximation. Il faut considérer un référentiel au-delà de la Terre comme référentiel d'inertie !

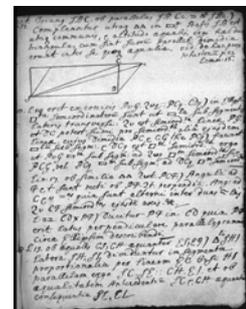
Un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié (dans la mesure de la précision des appareils utilisés pour l'étude des phénomènes considérés) est appelé un *référentiel d'inertie*.

Note historique : le principe d'inertie met définitivement fin à l'idée que si la pierre lancée par une catapulte continue son mouvement, c'est qu'une action s'exerce sur elle. Rappelons que pour Galilée déjà, le mouvement horizontal de cette pierre est uniforme, car aucune force ne s'exerce dans cette direction.

### **La notion de force**

<sup>19</sup> en anglais : 'linear momentum'

<sup>20</sup> Voir chapitre « mouvement relatif »



La **première loi de Newton** énonce que tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme *sauf si des forces "imprimées" le contraignent d'en changer.*

Alors Newton pose la définition suivante : une force (imprimée) est une action exercée sur un corps, afin de lui modifier son état, que ce soit un état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.

Newton a su apporter la distinction entre force et inertie. La force est la seule manière de faire varier le mouvement d'un corps. Si des actions différentes ont le même effet sur un point matériel, on dira que la même force agit. Newton établit la règle d'addition des forces. Elle a été évoquée avec l'expérience de Stévin quand on était confronté en balistique à la question de savoir comment additionner l'effet de la pesanteur et de la friction dans l'air. Les forces ont une direction, une intensité et un sens. Quand les forces sont perçues comme des vecteurs, cette loi d'addition semble triviale. Mais il faudra attendre J. W. Gibbs et O. Heaviside date au XIXe siècle pour avoir une description en termes de calcul vectoriel !<sup>21</sup>

### Deuxième loi de Newton

Selon Newton : "*Les changements de mouvement sont proportionnels à la force motrice ( $F \Delta t$ ), et se fait dans la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée à l'objet.*"

Dans le formalisme vectoriel moderne, cette loi s'exprime par :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

où  $\mathbf{F}$  est la résultante des forces appliquées. Il est tout à fait remarquable que Newton ait introduit la notion de quantité de mouvement. Il se trouve que ce concept garde son rôle central dans des théories plus avancées, comme la théorie de la relativité et la mécanique quantique, alors que la formulation commune «  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  » doit être abandonnée.

Démonstration d'auditoire : des expériences avec des chocs mous sur un banc à air (voir figure) montrent qu'il est raisonnable de prendre pour la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  :  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est la vitesse,  $m$  la masse. Les chocs mous sont obtenus en plaçant de la pâte à modeler sur un plot, et une pointe sur l'autre, qui s'enfonce dans la pâte à modeler dans la collision.

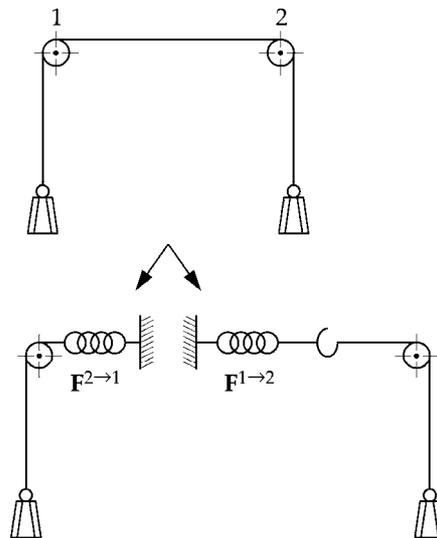
Lorsque  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  et  $m$  est **constante**, la deuxième loi donne la formulation bien connue  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  où  $m$  est la masse d'inertie. Mais exprimée en termes de quantité de mouvement, la deuxième loi est plus générale puisqu'elle inclut le cas d'une masse qui dépendrait du temps. C'est le cas des systèmes ouverts (voir le chapitre sur ce sujet).

<sup>21</sup> Gruber, Mécanique Générale, PPUR

### Troisième loi de Newton

Selon Newton: "A toute action, il y a toujours une réaction égale qui lui est opposée"; autrement dit, les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et opposées."

Dans sa version moderne, la troisième loi évoque une propriété générale des forces (voir chapitre 'systèmes de points matériels').<sup>22</sup> On verra que les forces élémentaires entre deux particules sont égales, opposées, et de plus, qu'elles sont parallèles au segment porté par les deux particules. L'expression mathématique de cette propriété-ci est différée à la section sur les lois de conservation. Cette forme moderne permet de déduire des principes de conservations très important en mécanique. En revanche, quand Newton dit "A toute action, il y a toujours une réaction égale qui lui est opposée"; il pense à des situations physiques simples comme un doigt qui s'appuierait contre une table ou une pierre tirée par une corde. Dans ces cas-là, on dit que les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et opposées. La figure ci-contre illustre une telle situation. Le système est virtuellement décomposé en deux parties, la partie ôtée est remplacée par la force qu'elle exerçait sur la première.



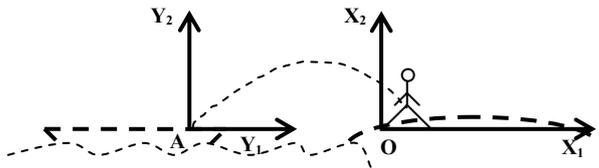
Ainsi, on a deux poids retenus par une corde passant par deux poulies. Décomposons ce système en deux sous-systèmes séparés équivalents, en remplaçant l'effet de l'autre sous-système par les forces  $F^{2 \rightarrow 1}$  et  $F^{1 \rightarrow 2}$  représentées ci-dessous par des ressorts.

La 3<sup>e</sup> loi dit :  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = 0$

<sup>22</sup> Feynman, Lecture notes on Physics

### Homme sur un bateau

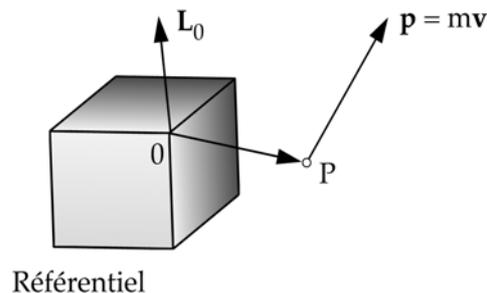
Un homme de masse  $m$  est au bord d'un bateau de masse  $M$ . Il saute sur la berge, à la même hauteur que le bateau. Le bateau est supposé toujours horizontal et l'eau sans viscosité. Le bord du bateau est à une distance  $d$  du bord de la berge. Sur la terre ferme, il peut sauter une distance  $D$ . Modéliser l'homme par un point matériel pour déterminer sa vitesse de saut par rapport à son support, que ce soit le bateau ou la terre ferme. Trouver l'angle optimal de saut depuis le bateau.



## **Moment Cinétique, Moment d'une force, Systèmes de points matériels, Centre de Masse, Principes de conservations**

Deux nouvelles grandeurs physiques sont définies : le moment cinétique et le moment d'une force. Ces deux grandeurs permettent d'exprimer une conséquence importante de la 3<sup>ème</sup> loi de Newton. Ces deux grandeurs joueront aussi un rôle prédominant dans la dynamique d'un corps solide.

### Moment cinétique d'un point matériel



Soit O un point du référentiel et un point matériel en P. On appelle **moment cinétique**  $L_o$  par rapport au point O la grandeur

$$L_o = OP \times p$$

où  $p = m\mathbf{v}$  est la quantité de mouvement du point matériel.

### Moment d'une force

On appelle  $M_o$  **moment de la force** F par rapport au point O, la grandeur :

$$M_o = OP \times F$$

Il faut faire attention de toujours spécifier le point de référence du moment cinétique et du moment de force, car ces deux grandeurs en dépendent !

Le moment cinétique et le moment de forces sont liés par une relation qui deviendra très importante quand on considérera la mécanique d'un système de point matériel, en particulier un solide.

### *Théorème du moment cinétique pour un point matériel*

$$\frac{dL_o}{dt} = M_o$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_o &= \frac{d}{dt} (\mathbf{OP} \wedge \mathbf{p}) = \\ &(\mathbf{O}\dot{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{p}) + (\mathbf{OP} \wedge \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F} \end{aligned}$$

Systèmes de points matériels

De nombreux systèmes mécaniques peuvent être modélisés par un ensemble de points matériels. Nous définissons pour un ensemble de points matériels  $m_\alpha$  à  $\mathbf{OP}_\alpha$  où  $O$  est un point du référentiel :

– la quantité de mouvement totale

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha \text{ où } \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$

– le moment cinétique total par rapport à  $O$

$$\mathbf{L}_o = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{o,\alpha}$$

$$\text{où } \mathbf{L}_{o,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha$$

Le théorème du moment cinétique et la deuxième loi de Newton s'appliquent à chaque masse :

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha \quad \frac{d\mathbf{L}_{o,\alpha}}{dt} = \mathbf{M}_{o,\alpha}$$

où  $\mathbf{F}_\alpha$  est la résultante de toutes les forces agissant sur  $m_\alpha$  et  $\mathbf{M}_{o,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha$

### Enoncé général de la troisième loi de Newton

Pour un système matériel, il convient de distinguer les forces **intérieures** qui dépendent de l'état du système et ne sont pas modifiées par l'évolution extérieure. Les forces appliquées au système sont les forces **extérieures**. La troisième loi de Newton s'exprime pour les forces intérieures de la manière suivante :

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}^{\text{int}}_{\alpha} = 0 \quad \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\text{int}}_{\alpha} = 0$$

où  $P_\alpha$  est le point d'application de la force  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}$ . La première relation découle immédiatement du sens intuitif de la loi d'action et de réaction. En effet, les forces peuvent toujours être décomposées en une superposition

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$$

d'interactions de paires de particules. Alors on a :

$$= \sum_{\substack{\alpha \\ 1 \leq \alpha < \beta < N}} \sum_{\beta} (\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} + \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}) = 0$$

La deuxième relation est une contrainte sur les forces intérieures qui exprime une propriété fondamentale des forces d'interaction : les forces entre deux particules sont parallèles au segment liant ces deux particules. On obtient cette deuxième relation en explicitant les forces intérieures en forces d'interactions entre paires de particules :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{int}) = \\
& \sum_{1 \leq \alpha < \beta < N} (\mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{OP}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) \\
& = \sum_{\alpha} ((\mathbf{OP}_{\beta} - \mathbf{OP}_{\alpha}) \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) \\
& = \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{P}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) = 0
\end{aligned}$$

### *Théorème du moment cinétique et de la quantité de mouvement*

La troisième loi de Newton implique donc :

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{ext} = \mathbf{F}^{ext} \quad \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{ext} = \mathbf{M}_o^{ext}$$

On notera les résultantes des forces et des moments de forces:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{ext} &= \mathbf{F}^{ext} \\
\sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{ext} &= \mathbf{M}_o^{ext}.
\end{aligned}$$

En sommant les expressions du théorème du moment cinétique et de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton sur appliquées à chaque point matériel, et en tenant compte du fait qu'on peut ignorer les forces intérieures, il vient deux relations :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_o}{dt} &= \mathbf{M}_o^{ext} \\
\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{F}^{ext}
\end{aligned}$$

Les deux résultats sont traditionnellement appelés le théorème du moment cinétique et le théorème de la quantité de mouvement. Ces deux théorèmes jouent un rôle central en mécanique. En dynamique du solide indéformable, en particulier, ces deux théorèmes constituent la base théorique qui fournira les équations du mouvement. Dans ce qui suit, on déduit de ces deux théorèmes des principes de conservation très important.

De ces résultats on tire d'abord qu'un système isolé, c'est-à-dire libre de forces extérieures, possède une quantité de mouvement totale et un moment cinétique total constants ! On dit que les grandeurs sont **conservées**.

Ces lois de conservation sont valables même en relativité restreinte et en mécanique quantique ! Elles peuvent être dérivées de notions de symétrie plus fondamentales.

On appliquera souvent ces principes de conservation, car ils permettent de simplifier l'analyse d'un système physique.

Quand un système n'est pas isolé, il se peut qu'on puisse argumenter sur la base de la conservation d'une composante de la quantité de mouvement totale ou du moment cinétique. On peut par exemple considérer un système mécanique sur une table à air horizontale. Les plots sur la table à air ne sont pas isolés. Ils subissent la sustentation de la table à air. Cependant, dans le plan horizontal, pour un grand nombre d'expériences, on peut négliger toutes les forces horizontales. On en déduit que la quantité de mouvement totale dans le plan horizontal est conservée.

Formellement, soit  $\hat{\mathbf{u}}$  une direction fixe par rapport au référentiel d'inertie, dans laquelle :

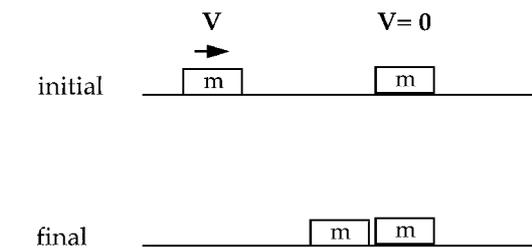
$$\hat{u} \cdot \mathbf{F}^{ext} = 0 \quad \text{ou} \quad \hat{u} \cdot \mathbf{M}_o^{ext} = 0$$

Alors  $\mathbf{P} \cdot \hat{u}$ , ou  $\mathbf{L} \cdot \hat{u}$  respectivement, sont conservées.

### Illustrations de l'utilisation des principes de conservation

#### 1) Choc mou sur banc à air

Démonstration d'auditoire : un plot sur le banc à air est immobile. Un autre entre en collision avec le premier. Ensuite les deux plots sont accrochés l'un à l'autre.



On néglige les frottements sur le banc à air. Par conséquent on peut considérer que la quantité de mouvement totale des plots est conservée. On considère la quantité de mouvement du système avant et après la collision.

avant :  $\mathbf{p} = m \mathbf{v} + 0$

après :  $\mathbf{p} = (m + m) \mathbf{v}_f$

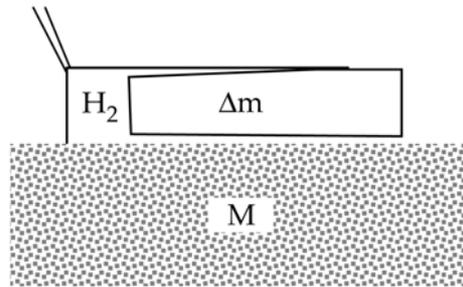
Par conséquent :  $\mathbf{v}_f = \frac{1}{2} \mathbf{v}$

#### 2) Recul du fusil sur rail à coussin d'air

Démonstration d'auditoire : un tube est monté sur un plot de rail à air. Un piston est enfilé dans le tube, puis de l'hydrogène est inséré au fond du tube. Une décharge électrique provoque l'explosion du gaz. Le piston est éjecté.



On se demande quelle est la vitesse du plot après le temps  $t$  de l'explosion s'il avait initialement une vitesse  $\mathbf{v}$  quand il était dans le canon. Les masses sont définies sur le croquis.



$\Delta m$  est la masse du piston. On caractérise l'effet de l'explosion à  $t$  par la vitesse  $\mathbf{u}$  d'éjection du piston. Cette vitesse  $\mathbf{u}$  est relative au canon !

$$\text{avant } t : \mathbf{P} = (M_0 + \Delta m) \mathbf{v}$$

$$\text{après } t : \mathbf{P} = M_0 (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

Les vitesses ici doivent être des vitesses absolues. La vitesse du plot éjecté est donné par la somme vectorielle de la vitesse du canon et de celle du plot par rapport au canon. Cette composition des vitesses sera systématisée dans le cadre du mouvement relatif. Mais il s'agit là d'une notion tout à fait intuitive. Si un enfant court dans un train en marche, la vitesse de l'enfant par rapport au sol est la somme des vitesses de l'enfant par rapport au train, et du train par rapport au sol !

Finalement, la conservation de la quantité de mouvement totale implique :

$$(M_0 + \Delta m) \mathbf{v} = M_0 (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad M_0 \Delta \mathbf{v} = - \Delta m \mathbf{u}$$

Si  $\mathbf{u}$  est opposé à  $\mathbf{v}$ , alors  $\Delta \mathbf{v}$  augmente  $\mathbf{v}$ , conformément à notre intuition.

### 3) Force centrale

**Définition :** Un point matériel subit une **force centrale** s'il existe un point  $O$  tel qu'en tout temps la force soit dirigée vers ce point  $O$ . C'est le cas d'une planète dans le champ de gravitation du soleil.

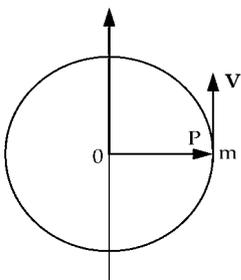
**Démonstration d'auditoire :** une masse et un ressort attaché à  $O$  sur une table à coussin d'air.

Pour toute force centrale de centre  $O$ , on a, par définition :

$$\mathbf{F} // \mathbf{OP} \quad \text{donc} \quad d\mathbf{L}_0 / dt = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} = 0$$

Le moment cinétique par rapport au centre de force  $O$ ,  $\mathbf{L}_0$ , est une constante du mouvement.

### 4) Mouvement circulaire:

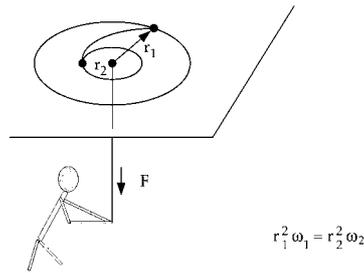


Considérons un point matériel décrivant un cercle sur un plan horizontal, sans frottement. Sa vitesse est donnée par  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Son moment cinétique par rapport au centre du cercle est donné par :  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{v}$

Le moment cinétique est conservé car la force est centrale. Le module du moment cinétique vaut  $|\mathbf{L}_0| = mr^2 \omega$ .

On imagine alors un mécanisme qui permette de changer le rayon, toujours sans frottement. Pour n'importe quelle deux valeurs  $r_1$  et  $r_2$  du rayon du cercle, la conservation du moment cinétique implique:

$$m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$$



Note : Le moment cinétique et la formation du système solaire <sup>23</sup>

Le 98% du moment cinétique du système solaire provient du mouvement orbital des planètes. La rotation propre des planètes est négligeable. La rotation propre du soleil ne constitue que 2%. Or le soleil comprend la plus grande partie de la masse du soleil. Il est difficile de comprendre comment le système solaire s'est constitué de manière telle que le soleil tourne si lentement. Il est également difficile de rendre compte, par un modèle de formation du système solaire, de la rotation de Vénus, opposée à la rotation de toutes les autres planètes, et de l'axe de rotation d'Uranus, qui se trouve dans le plan des orbites des planètes !

### Référentiel centre-de-masse

Soit un référentiel  $\mathbf{R}$  comprenant un point  $O$ . Soit un ensemble de points matériels  $m_\alpha$  aux points  $P_\alpha$ .

Définition : Le centre de masse  $G$  du système de points matériels est défini par la moyenne géométrique des positions des points  $P_\alpha$  pondérée par leur masse :

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \mathbf{OP}_\alpha$$

avec  $M$ , la masse totale du système de points matériels. La définition du centre de masse ne dépend pas du choix du point  $O$ . En effet, soit un autre point du référentiel  $O'$ . La définition du centre de masse en utilisant  $O'$  fournit un point  $G'$  donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{O'G'} &= \frac{1}{M} \sum m_\alpha \mathbf{O'P}_\alpha = \\ &= \frac{1}{M} \sum m_\alpha \mathbf{O'O} + \frac{1}{M} \sum m_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \\ &= \mathbf{O'O} + \mathbf{OG} = \mathbf{O'G} \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $G$  et  $G'$  sont confondus.

De la définition du centre de masse, on tire une expression très utile de la quantité de mouvement totale du système de points matériels :

$$M\mathbf{V}(G) = \mathbf{P}$$

Démonstration : on a

$$M \mathbf{OG} = \sum m_\alpha \mathbf{OP}_\alpha$$

En dérivant par rapport au temps, il vient :

<sup>23</sup> Discovering Astronomy, R. Robert Robbins, W. H. Jeffreys, John Wiley and son, 1988

$$M\mathbf{V}(G) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}(P_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = \mathbf{P}$$

Définition : Le référentiel qui contient le centre de masse du système de points matériels et qui est *en translation* par rapport au référentiel  $\mathbf{R}$  est appelé « **référentiel centre de masse** ».

On évoque ici deux propriétés du référentiel centre de masse qui deviendront utiles dans l'étude des collisions et en mécanique du solide indéformable.

D'une part, on note que

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha} = 0$$

Démonstration : de la définition de G, on peut écrire

$$\mathbf{O}\mathbf{G} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \mathbf{O}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha} \right) =$$

$$\mathbf{O}\mathbf{G} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha}$$

Du premier et du dernier terme de cette série d'égalité vient la propriété annoncée.

On notera  $\mathbf{V}(P_{\alpha})$  les vitesses mesurées par rapport au référentiel  $\mathbf{R}$  choisi et  $\mathbf{V}'(P_{\alpha})$  les vitesses mesurées dans le référentiel du centre de masse. De  $\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} = \mathbf{O}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{P}_{\alpha}$

on tire par dérivation par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(P_{\alpha}) &= \mathbf{V}(G) + (\mathbf{V}(P_{\alpha}) - \mathbf{V}(G)) \\ &= \mathbf{V}(G) + \mathbf{V}'(P_{\alpha}) \end{aligned}$$

Alors on a aussi :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}'(\mathbf{P}_{\alpha}) = 0$$

Ceci s'obtient en dérivant par rapport au temps la définition de G:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(G) &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}(P_{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \mathbf{V}(G) + \mathbf{V}'(P_{\alpha}) \right) \\ &= \mathbf{V}(G) + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}'(P_{\alpha}) \end{aligned}$$

Du premier et du dernier terme de cette série d'égalité vient la propriété annoncée.

### ***Théorème du centre de masse***

La première de ces propriétés revient à dire que le centre de masse est le centre géométrique pondéré par les masses. La seconde, que les quantités de mouvement forment comme une

explosion de vecteurs de somme nulle. On peut y voir pour conséquence que la quantité de mouvement totale d'un système de points matériels s'écrit simplement :

$$\mathbf{P}_{tot} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}(\mathbf{P}_{\alpha}) = M\mathbf{V}(G)$$

La troisième loi de Newton implique :

$$M \frac{d\mathbf{V}(G)}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{ext}$$

Le centre de masse apparaît ainsi comme un point matériel de masse  $M$  auquel toutes les forces extérieures exercées sur le système (en différents points du système) lui seraient appliquées (directement). Ce résultat est connu comme le **théorème du centre de masse**. Il est très utilisé en mécanique !

## **Energie, puissance, travail**

La notion de travail est introduite d'abord avec un mouvement rectiligne. Les notions peuvent ainsi être abordées sans avoir à traité immédiatement les difficultés mathématiques inhérentes au cas à trois dimensions, à savoir, les conditions sous lesquelles une force dérive d'un potentiel.

### **Mouvement rectiligne**

On considère un point matériel se déplaçant en ligne droite sous l'effet d'une force dépendante de la position, et de direction parallèle à la ligne droite. L'équation du mouvement de ce point matériel a donc la forme :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

Comme la position joue un rôle primordial dans ce problème, on exprime la vitesse comme une fonction de la position, qui elle-même est fonction de temps.

$$v = v(x(t))$$

La règle habituelle des dérivées de fonctions de fonctions donne :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

L'équation du mouvement devient :

$$m \frac{dv}{dx} \cdot v = F(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = F(x)$$

Il suffit alors de multiplier par  $dx$  :

$$\frac{d \left( \frac{1}{2} mv^2 \right)}{dx} dx = F(x) dx$$

puis d'intégrer :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m [v(x_2)]^2}_{K_2} - \underbrace{\frac{1}{2} m [v(x_1)]^2}_{K_1} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

On voit par ce résultat l'intérêt de définir **l'énergie cinétique** (« kinetic energy » en anglais) :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

et le **travail** de la force F pour aller de  $x_1$  à  $x_2$  (work):

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

De la deuxième loi de Newton, on a ainsi déduit que le travail de la force dans le déplacement de 1 à 2 est égal à la variation de l'énergie cinétique en passant de 1 à 2.

On définit une **énergie potentielle**  $V(x)$  associée à F comme le travail de F quand le point matériel se déplace de x à un point de référence ( $x_s$ ).

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x) dx = - \int_{x_s}^x F(x) dx$$

Par conséquent, le travail de la force en allant d'un point quelconque à un autre est :

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_s} F(x) dx + \int_{x_s}^{x_2} F(x) dx = \\ &= V(x_1) - V(x_2) \end{aligned}$$

Ainsi on a  $K_2 - K_1 = V(x_1) - V(x_2)$

ou  $K_2 + V(x_2) = K_1 + V(x_1)$

Donc  $E = K + V$  est une constante du mouvement. On l'appelle **l'énergie mécanique totale**. On dit qu'elle est conservée. En général, quand les forces sont telles que l'énergie mécanique totale est conservée, on dit que les forces sont **conservatives**.

La force F se déduit de l'énergie potentielle par dérivation. En effet, de :

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x') dx' = - \int_{x_s}^x F(x') dx'$$

on tire  $\frac{dV}{dx} = -F(x)$ , soit :  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$

Exemple : la force de rappel d'un ressort est de la forme  $F(x) = -kx$ . Cette force dérive du potentiel

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

En effet  $-\frac{dV}{dx} = -kx$

On peut aussi obtenir le potentiel par intégration du travail :

$$V(x) = \int_x^{x_0} F(x) dx = - \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

D'une manière générale, les lois de conservations sont très utiles pour résoudre les problèmes de mécanique car elles donnent des relations avec des dérivées premières par rapport au temps, alors que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  contient des dérivées secondes. On parle d'*intégrales premières* pour désigner de telles constantes du mouvement.

Ainsi par exemple, au lieu de résoudre le problème à 1 dimension

$$m \ddot{x} = -kx$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = x_0$$

on peut suivre la démarche suivante. L'énergie est donnée par les conditions initiales. Si à  $t = 0$ , la vitesse est  $v_0$  et la position  $x_0$ , alors :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} kx_0^2$$

On peut résoudre pour  $x(t)$  par simple intégration :

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)}$$

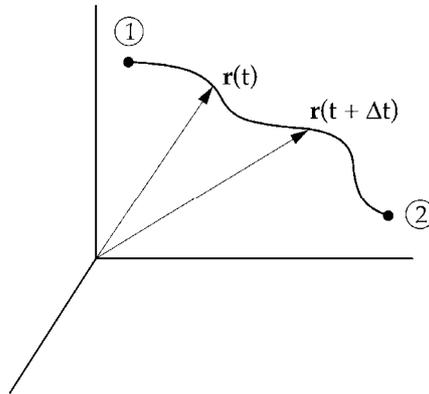
$$t = \int_0^t dt' = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)}}$$

C'est une intégrale que l'on peut résoudre en faisant le changement de variable  $\sin \theta = \sqrt{(k/2E)} \cdot x$ . On trouve la solution de la forme bien connue :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta_0), \text{ avec la pulsation : } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

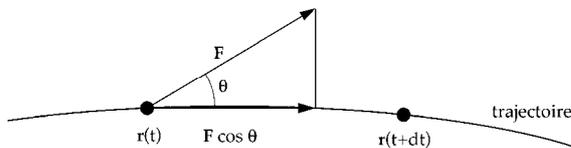
## Cas général

On considère connue la trajectoire d'un point matériel qui subit une force  $\mathbf{F}$ . Le travail de la force dans un déplacement infinitésimal le long de cette trajectoire sera noté  $\delta W$ . Cette notation ne veut pas dire qu'il s'agisse d'une opération mathématique sur la fonction  $W$ . Ce travail vaut  $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .



Le produit scalaire  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  prend en compte le fait que la composante de la force normale à la trajectoire ne travaille pas, puisque pour cette composante il n'y a pas de déplacement le long de la force. C'est la projection de la force sur la tangente à la trajectoire qui travaille. Cette projection vaut  $F \cos(\theta)$ , comme prescrit par le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \delta W &= |F \cos \theta| |d\mathbf{r}| \\ &= \cos \theta |F| |d\mathbf{r}| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$



Le travail fourni par la force pour aller d'un point 1 à un point 2 sur la trajectoire vaut :

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

On sous-entend ici que l'intégrale est effectuée pour le chemin que parcourt le point matériel. C'est une intégrale dite "curviligne". La manière d'effectuer une telle intégrale appartient à un cours de mathématiques. Son sens physique, lui, est intuitif.

### La puissance instantanée

La puissance instantanée est définie comme le taux de variation temporelle du travail. On peut écrire :

$$P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

En fait, cette façon de dériver ce résultat n'est pas tout à fait claire puisque  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{v}$  dépendent du temps. Pour plus de rigueur, il faut expliciter l'intégrale de la force sur le chemin en

paramétrisant le chemin par l'équation horaire de la trajectoire  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . On a ainsi :

$$W = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v} dt . \text{ La dérivée temporelle est alors clairement}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Unités:

Il est bon à ce point de résumer les unités des grandeurs physiques introduites en mécanique et leurs noms usuels :

longueur	m	
vitesse	m s <sup>-1</sup>	
accélération	m s <sup>-2</sup>	
force	kg m s <sup>-2</sup>	<i>Newton</i>
travail,		
énergie	kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	<i>Joule</i>
puissance	kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup>	<i>Watt</i>

On prendra note que le « kilowattheure » utilisé en technique est une unité d'énergie. Dans tout calcul analytique, il est bon de vérifier souvent que les unités des expressions sont cohérentes, car c'est une excellente manière de s'assurer qu'une faute n'a pas été introduite par les manipulations algébriques.

Définition : Energie cinétique

Soit un point matériel de masse  $m$ , de vitesse  $\mathbf{v}$ . On appelle énergie cinétique de ce point matériel la grandeur

$$K = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème est la généralisation du résultat obtenu dans le cas du mouvement rectiligne, c'est-à-dire que le travail des forces exercées sur le point matériel est égal au changement de l'énergie cinétique pour aller d'un point à un autre de la trajectoire :

$$K_2 - K_1 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{12}$$

*Démonstration :*

Avec la deuxième loi de Newton on a :

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m \cdot \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot dt$$

Dans la dernière égalité, on a paramétrisé la trajectoire par l'équation horaire. Or

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1^2 = K_2 - K_1$$

Par analogie avec le problème du mouvement rectiligne, on peut se demander si dans le cas général on pourrait définir une énergie potentielle associée à la force  $\mathbf{F}$  telle que

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2$$

Cela signifie que l'on veut pouvoir définir une fonction de la position seulement,  $V(\mathbf{r})$ , et d'une position de référence  $\mathbf{r}_s$ , avec :

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si on le peut, alors :

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_s}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2$$

et  $K_2 - K_1 = V_1 - V_2$ . Par conséquent, si  $V$  existe, alors l'énergie mécanique totale  $K + V = E$  est une grandeur conservée.

#### Définition : énergie mécanique totale

On conviendra d'appeler énergie mécanique totale la quantité  $E=K+V$ . Cela présuppose bien sûr que  $V$  est défini !

Les définitions de  $K$  et  $V$  sont utiles, car on a conservation de la somme  $K+V$  pour tout système dont toutes les forces dérivent de potentiels.

La question reste de savoir sous quelle condition on peut un potentiel  $V(\mathbf{r})$ . Comme  $V(\mathbf{r})$  est défini comme un travail pour aller de  $\mathbf{r}$  à une position de référence, il faut que le travail de la force pour aller d'un point à un autre ne dépende pas du chemin.

La condition nécessaire et suffisante pour avoir une énergie potentielle pour une force donnée est que le travail sur tout chemin fermé (une boucle) est nul :

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Pratiquement, l'intuition en general suffit à se convaincre de l'existence du potentiel ou pas. C'est le cas de la pesanteur. Ce n'est pas le cas d'une force de frottement, évidemment. Si le potentiel existe, il suffit d'opérer une intégration sur un chemin pour trouver le potentiel. A titre indicatif, on notera que les mathématiques fournissent une condition équivalente :

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Si  $V(\mathbf{r})$  existe, alors les projections de la force sur un repère cartésien du référentiel sont données par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = -\mathbf{grad} V = -\nabla \cdot V$$

*Démonstration :*

de  $W_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  on tire que pour un chemin infinitésimal de 1 à 2 :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})$$

Prenons  $d\mathbf{r} = \Delta\ell \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$  où  $\hat{\mathbf{e}}_i$  est un vecteur unité porté par l'axe  $i$ . Alors :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \Delta\ell \hat{\mathbf{e}}_i = F_i \Delta\ell = -V(\mathbf{r} + \Delta\ell \hat{\mathbf{e}}_i) - V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta\ell$$

La dernière égalité applique la définition de la dérivée partielle.

Exemple : Potentiel gravitationnel.

La force gravitationnelle peut être dérivée de la fonction  $V(r)$  donnée par :

$$V(r) = \frac{-G M m}{r}$$

Avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  on a par exemple :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= G M m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{G M m x}{r^2} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

C'est bien la composante  $x$  de la force de la gravitation.

### Evolution de l'énergie en présence de forces non-conservatives

Si toutes les forces sont conservatives on a:

$E = T + V$  est constante, c'est-à-dire  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Il arrive que certaines forces soient conservatives, et d'autres pas. Pour ce cas, on écrira la décomposition des forces:  $\mathbf{F}^C + \mathbf{F}^{NC}$ .

$\mathbf{F}^C$  est la résultante des forces conservatives. C'est-à-dire, il existe  $V$  avec  $\mathbf{F}^C = -\nabla V$ .  $\mathbf{F}^{NC}$  est la résultante des forces non-conservatives.

Alors la deuxième loi de Newton fournit :

$m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^{NC}$ . En multipliant par  $\mathbf{v}$ , on reconnaît la dérivée de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) \\ &= \mathbf{F}^C \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}^{NC} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \mathbf{v} + \mathbf{F}^{NC} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Le terme  $-\nabla V \mathbf{v}$  est une dérivée totale par rapport au temps. En effet :

$$\nabla V \mathbf{v} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

On peut ainsi écrire que la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique totale est égale à la puissance des forces non-conservatives.

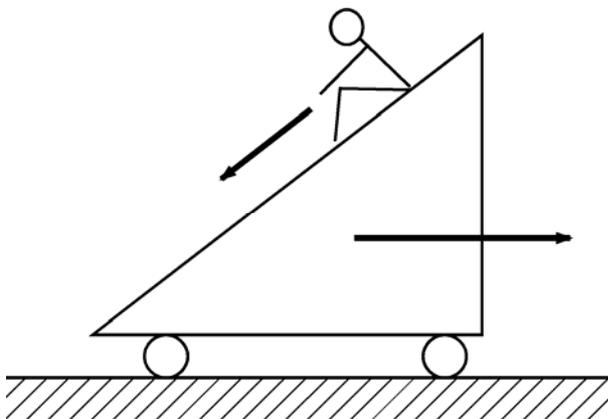
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V \right) = \mathbf{F}^{NC} \cdot \mathbf{v}$$

Un cas typique est celui des forces de frottement. Elles s'opposent à la vitesse, dont le deuxième terme de cette égalité est négatif, indiquant, comme il se doit, une perte d'énergie mécanique.

### Rampe sur roulette

Un enfant descend une rampe munie de roues. On suppose :

- que la rampe roule sans frottement sur un sol horizontal,
- que l'enfant glisse sans frottement sur la rampe
- que la rampe est initialement immobile au début de la descente de l'enfant.

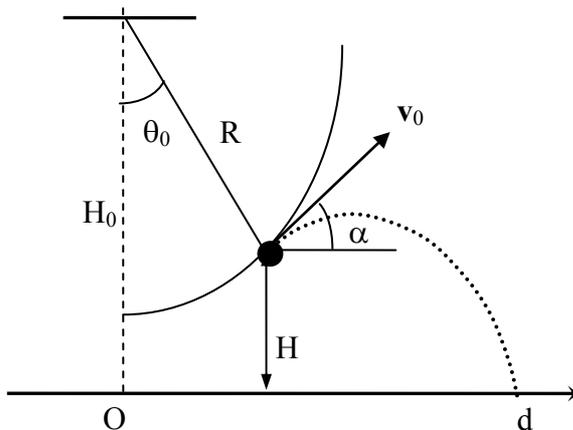


- 1) Quelles sont les forces exercées sur l'enfant ? Son énergie mécanique totale est-elle conservée dans la chute ?
- 2) L'énergie mécanique totale de la rampe et de l'enfant dessus est-elle conservée ?
- 3) Quelle est la vitesse de la rampe quand l'enfant arrive en bas de la rampe ?

### Projeté d'une balançoire

Une enfant se jette d'une balançoire en mouvement. Son papa se demande à quelle position du mouvement d'amplitude donnée est-ce qu'elle devrait se laisser aller hors du siège pour aller le plus loin. Pour analyser la situation, on modélise l'enfant sur sa balançoire par un pendule mathématique : un point matériel pesant au bout d'un fil. Un dispositif sans masse libère le point matériel sans interférer autrement sur le mouvement du pendule.

- Si le pendule a une amplitude maximum  $\theta_{\max}$ , trouver la vitesse  $v_0 = \|\vec{v}_0\|$  au point  $\theta_0 < \theta_{\max}$  quelconque.
- Quel est l'angle que fait la vitesse  $\vec{v}_0$  en  $\theta_0$  par rapport à l'horizontale ? Quelle est la hauteur  $H$  du point matériel par rapport au sol quand le pendule est à l'angle  $\theta_0$  ?
- Quelle est l'énergie cinétique de l'enfant au niveau du sol ?

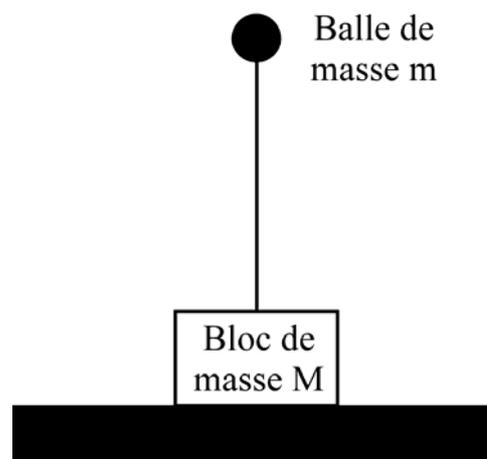


### Jokari vertical

Un bloc de masse  $M$  est posé sur le sol horizontal. Une balle de masse  $m$  est attachée à ce bloc par un élastique de constante de rappel  $k$ , de longueur au repos supposée nulle et de masse supposée nulle.

On se demande quelle est la vitesse initiale maximale  $V_0$  de la masse supposée lancée à la verticale depuis le point d'attache à la masse  $M$ , telle que le bloc de masse  $M$  ne se soulève juste pas.

- Ecrire les équations du mouvement pour la balle
- Etablir l'équilibre de toutes les forces qui s'exercent sur le bloc
- Poser la condition mathématique de non-décollement du bloc en fonction de  $M$ , la constante de l'élastique et la hauteur maximum (supposée connue pour  $V_0$  donné).



# 3<sup>ème</sup> partie :

## Pratique de la mécanique

***Point matériels avec liaisons***

***Systèmes ouverts***

***La loi de la gravitation de Newton***

***Les forces en électromagnétisme***

***Forces de frottement***

***Mouvement Relatif***

***Discussions qualitatives***

***Collisions***



Huygens

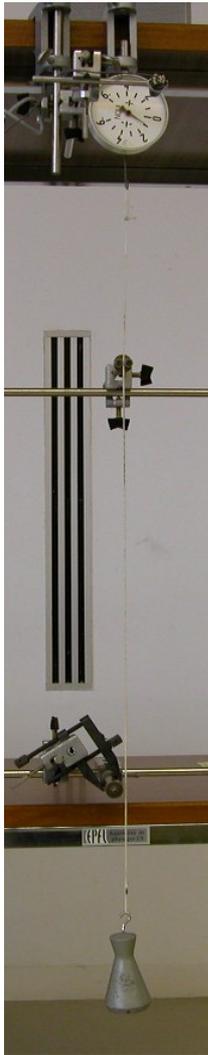
Dans ce chapitre, on voit comment la mécanique opère, pratiquement. D'abord, des problèmes simples de points matériels soumis à des *liaisons*, c'est-à-dire des contraintes géométriques simples, permettent de voir l'appareillage de la mécanique se mettre en place pour arriver aux équations différentielles du mouvement. Les *systèmes ouverts* permettent d'illustrer l'apport conceptuel que constitue la loi de Newton sous la forme  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$  au lieu de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . La présentation de la loi de la *gravitation* et l'évocation des tests auxquels elle a résisté au cours des siècles justifie en quelque sorte l'approche de la mécanique de Newton : les forces peuvent prendre des formes extrêmement pures ! Il en est ainsi de la force de Coulomb entre charges électriques, ou de la force de Lorentz d'une charge dans un champ d'induction magnétique. Pourtant, on se doit de rester modeste. Les *forces de frottement* résistent à une description synthétique. On peut tout au plus recourir à des modèles approximatifs.

La première loi de Newton pose la question du choix du référentiel. Ainsi, le chapitre qui traite de ce problème, communément appelé du « *mouvement relatif* », considère un référentiel qui n'est manifestement pas d'inertie. L'accélération de Coriolis ou l'accélération centripète sont ainsi des notions introduites à cette occasion sur une base conceptuelle solide.

On note que cette partie présente une grande variété de forces. Les systèmes avec des contraintes géométriques introduisent les forces de contraintes. Les systèmes ouverts introduisent la notion de « poussée » d'une fusée. La force de la gravitation, de Coulomb et de Lorentz sont des forces élémentaires. Les forces de frottement évoquent la problématique de l'ingénieur et de la science des matériaux. Le statut de forces fictives de la 'force de Coriolis' et de la 'force centrifuge' est clairement explicité.

Les grands principes de conservations de la mécanique permettent de faire des prédictions sur des événements appelés « *collisions* ». Il peut s'agir de l'interaction à distance entre deux corps, ou d'un choc matériel. Dans ce chapitre, on voit qu'on peut faire des prédictions sans connaître le détail des forces en action pendant la collision. Les principes de conservations permettent aussi une *analyse qualitative* des mouvements possibles sans passer par l'intégration des équations différentielles du mouvement.

## Liaisons



La cinématique en coordonnées cylindriques et sphériques permet d'aborder des problèmes de mécanique à trois dimensions pour des points matériels dont le mouvement est soumis à des **liaisons**, ou **contraintes**. Il peut s'agir d'un point matériel astreint à se déplacer sur un cylindre ou sur un cône, par exemple. On peut voir le pendule oscillant dans un plan comme identique à celui d'un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle vertical.

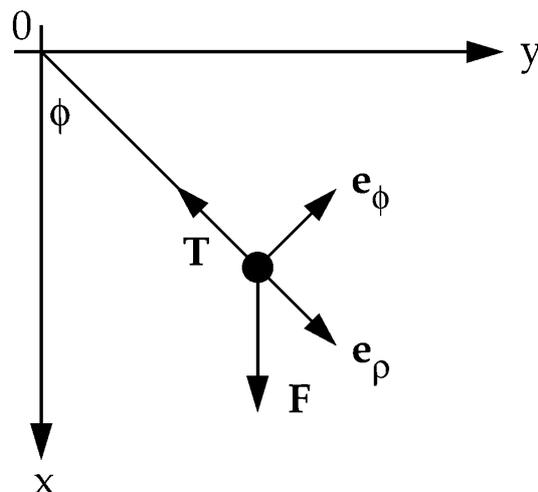
Ces problèmes, d'allure un peu "académique", constituent en fait des modèles de systèmes physiques plus complexes, avec l'avantage qu'ils sont relativement simples à résoudre. Ces liaisons constituent les contraintes géométriques. Elles font partie intégrante de l'effort de modélisation du système physique. En particulier, en déclarant que des points matériels sont astreints à se déplacer sur une surface donnée, le mécanisme qui réalise cette contrainte n'est même pas spécifié. Par exemple, pour un point matériel pesant, astreint à se déplacer sur un cylindre d'axe horizontal, la question de savoir si le point matériel est posé dessus ou dedans, est obliérée. Il pourrait y avoir un mécanisme idéal, qui glisse sans frottement sur la surface, auquel le point matériel est accroché. En invoquant une liaison, il est possible de faire abstraction de tous ces détails.

A toute liaison du type évoqué ici est associée une force, dite **force de liaison**. Les forces de liaisons évoluent au cours du temps de façon à maintenir le mouvement qui satisfasse les liaisons. Ces forces de liaison représentent les réactions de l'objet qui matérialise cette contrainte.

Démonstration d'auditoire : mesure de la force de tension de la corde d'un pendule (image ci-contre).

Si un point est astreint à se déplacer sur une surface, la force de liaison est normale à la surface. Une composante tangentielle représenterait une force de frottement, ce qui est tout autre chose que la liaison.

Pendule mathématique



Système : pendule mathématique dans le champ de la pesanteur (défini par une force **F** verticale constante) oscillant dans un plan vertical.

La pesanteur est ici décrite par une force verticale uniforme et constante. Il deviendra clair alors, que l'observation selon laquelle la période d'un pendule est indépendante de la masse, implique que la pesanteur est proportionnelle à la masse.

### Référentiel, repère, coordonnées

Référentiel matérialisé par les axes Oxy, l'axe Ox vertical, x positif vers le bas.

Coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$

Repère :  $e_\rho, e_\phi, e_z$

Bilan des forces : voir dessin

- pesanteur  $\mathbf{F}$
- fil ou barre: force  $\mathbf{T}$

On peut exprimer ce problème de mécanique en disant que le point matériel est astreint à se déplacer dans un plan vertical, à une distance fixe d'un point O du référentiel. C'est la liaison. Une description en termes de liaisons permet d'éviter de dire qu'il y a une barre sans masse et que l'articulation en O est sans frottement.

### Contraintes

$\rho = \ell$  longueur du fil ou barre

$$\Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

Comme le mouvement est astreint à un plan, il vient aussi

$$z = 0, \quad \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

Cinématique :

On utilise la formule de l'accélération en coordonnées cylindrique (voir formulaire) :

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (2 \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Les contraintes impliquent :

$$\mathbf{a} = (-\ell \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\ell \ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi$$

### Équations du mouvement

Nous invoquons la loi de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Nous projetons toutes les grandeurs vectorielles dans le repère choisi. Ainsi, il vient :

$$-m \ell \dot{\phi}^2 = F \cos \phi - T$$

$$m \ell \ddot{\phi} = -F \sin \phi$$

### Note technique sur le signe de la force de contrainte projetée

Il n'est pas toujours évident quel est le sens d'une force de contrainte. Il suffit de choisir un sens sur la figure, de faire les projections avec le signe correspondant. A la fin de la résolution, si  $T < 0$ , cela veut dire que  $\mathbf{T}$  pointe dans la direction opposée à celle du dessin.

Galilée observa que la période d'oscillation d'un pendule est indépendante de la masse. En considérant

$$m\ell \ddot{\phi} = -F \sin \phi$$

il faut conclure que  $F$  doit être de la forme  $m \cdot g$  où  $g$  est une constante. L'équation du mouvement pour  $\phi$  devient:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin \phi$$

Elle est indépendante de la masse. Quand cette équation différentielle sera résolue, l'autre fournira la force de liaison  $T$ .

#### Une méthode d'intégration souvent utilisée

Il arrive souvent qu'une équation du mouvement ait la forme:  $\ddot{x} = F(x)$ . La démarche suivante, démontrée ici pour ce cas particulier, permet d'intégrer. En multipliant par  $\dot{\phi}$  l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} \dot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin \phi \dot{\phi}$$

il est possible de repérer des dérivées par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{g}{\ell} \cos \phi \right)$$

Il ne faut pas oublier d'ajouter une constante en intégrant :

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \phi = \text{constante}$$

Cette constante est déterminée par les conditions initiales. Considérons qu'à  $t = 0$ , le point matériel soit lâché avec une vitesse nulle d'un angle  $\phi_0$ . Ainsi la constante est la valeur de

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \phi$$

à  $t = 0$ , soit  $-\frac{g}{\ell} \cos \phi_0$ . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \phi &= -\frac{g}{\ell} \cos \phi_0 \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\sqrt{\frac{2g}{\ell}} \underbrace{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}_{\geq 0} \\ dt &= -\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \end{aligned}$$

Une telle équation peut être intégrée. Elle fournit le temps en fonction de la position, au lieu de l'inverse, la position en fonction du temps.

$$t - 0 = \int_{\underbrace{\phi_0}_{\phi(t=0)}}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}} \left( -\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \right)$$

Ceci est de la forme  $t = F(\phi)$  qu'on peut inverser pour trouver  $\phi(t) = F^{-1}(t)$

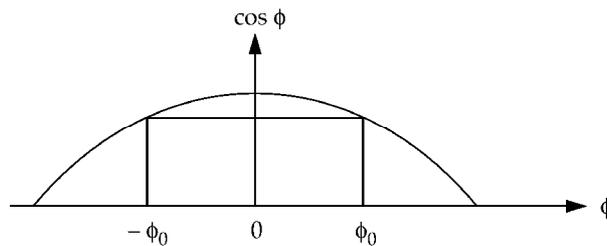
L'intégrale ci-dessus est dite elliptique.

### Discussion qualitative

Il arrive très souvent que l'intégration soit difficile. Il est alors bon dans la pratique de conduire une première étude des solutions possibles. Dans le cas présent, on a  $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell} (\cos \phi - \cos \phi_0)$ ,

donc  $(\cos \phi - \cos \phi_0) \geq 0$

On voit par inspection du croquis que cela implique que l'angle est limité, exactement comme on le sait de l'expérience.



On consacrerait une section entière aux discussions qualitatives.

## Petites Oscillations

Si  $\theta_0 \ll 1$ , alors on peut faire l'approximation  $\sin \theta \cong \theta$  et l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta$$

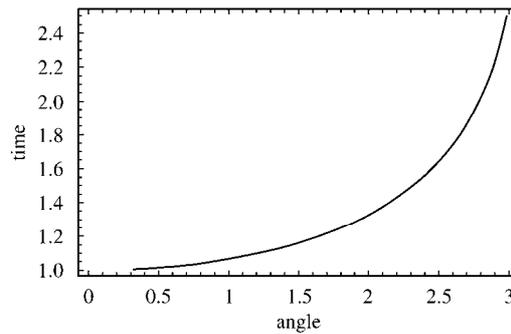
C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période  $2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .

### Démonstration d'auditoire :

Un pendule est formé d'une tige rigide de masse négligeable en comparaison de la masse au bout de la tige. Si le mouvement commence à un angle voisin du point le plus haut du pendule, il apparaît clairement que la période devient très grande.



Le graphe ci-dessous indique le rapport de la période à l'amplitude donnée en abscisse par rapport à celle d'une amplitude infiniment petite. Une [simulation](#) du mouvement du pendule est à disposition dans un programme Mathematica.



Un laboratoire "virtuel" qui permet de découvrir les propriétés des pendules peut être examiné [sur le réseau Internet](#).<sup>24</sup> Le lecteur avancé (il faut connaître la notion d'énergie mécanique) peut aussi regarder la question du pendule dont la période ne dépend pas de l'amplitude. Son analyse est donnée ci-après.

### Le pendule cycloïdal



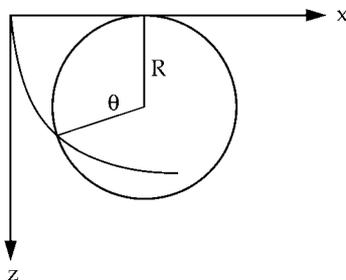
Huygens (1629-1695) découvrit que la période d'oscillation d'un point pesant glissant sans frottement sur une cycloïde est indépendante de l'amplitude et vaut :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

où  $R$  est le rayon du cercle générateur de la cycloïde. Cette propriété du pendule cycloïdal peut être vérifiée en invoquant la conservation de l'énergie mécanique. L'équation paramétrique d'une cycloïde peut s'écrire (voir graphique) :

$$x = R(\theta - \sin(\theta))$$

$$z = R(1 - \cos(\theta))$$



Ecrivons la conservation de l'énergie en prenant l'énergie potentielle 0 à  $\theta = \pi$ .

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mg z + mg 2R = E$$

$$\dot{x} = R(\dot{\theta} - \dot{\theta} \cos(\theta))$$

$$\dot{z} = R \dot{\theta} \sin(\theta)$$

<sup>24</sup><http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/index.html>

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) + \sin^2(\theta)) - mg R (1 - \cos(\theta)) + 2 mg R = E$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 2 (1 - \cos(\theta)) + mg R (1 + \cos(\theta)) = E$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 4 \sin^2(\theta/2) + mg R 2 \cos^2(\theta/2) = E$$

$$\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta/2) + (g/R) \cos^2(\theta/2) = \frac{E}{2 m R^2}$$

$$4 \left( \frac{d}{dt} \cos(\theta/2) \right)^2 + (g/R) \cos^2(\theta/2) = \frac{E}{2 m R^2}$$

On opère alors un changement de variable :

$$u = \cos(\theta/2)$$

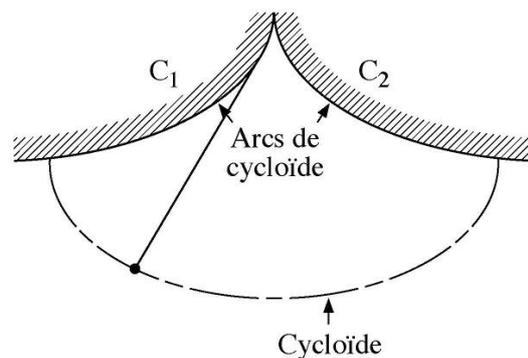
$$\dot{u}^2 + \frac{g}{4R} u^2 = \frac{E}{8mR^2}$$

On peut conclure en dérivant cette équation par rapport au temps :

$$2 \dot{u} \ddot{u} + \frac{g}{4R} 2 u \dot{u} = 0$$

$$\ddot{u} = - \frac{g}{4R} u$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence est indépendante de l'amplitude ! Dans son traité de mécanique, C. Gruber montre comment construire un pendule cycloïdal.<sup>25</sup>



### Bille dans un anneau en rotation

Démonstration d'auditoire : une bille roule dans un anneau vertical en rotation uniforme à une vitesse angulaire  $\omega$ . A petite vitesse de rotation, la bille oscille autour du point le plus bas de l'anneau. A plus grande vitesse, la position d'équilibre est hors de l'axe de rotation de l'anneau.

<sup>25</sup> C. Gruber, « Mécanique Générale », PPUR

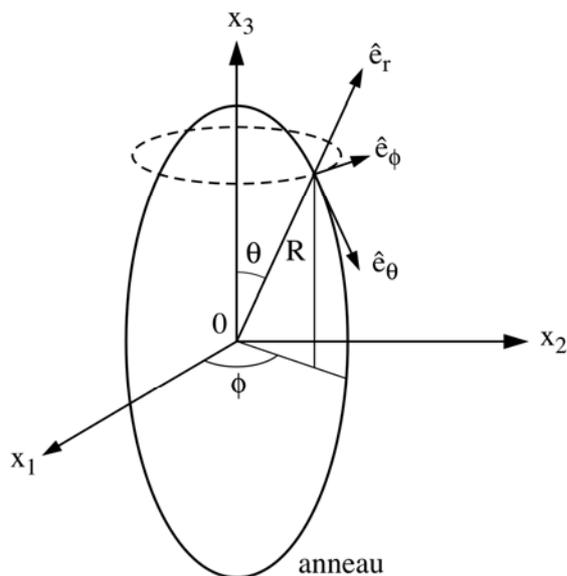


Un des aspects les plus intéressants de ce système, bien qu'il soit difficile de le mettre en évidence sur ce simple montage, est l'existence d'une vitesse de rotation critique  $\omega_c$  à laquelle la position d'équilibre change. A cette valeur de  $\omega_c$ , la fréquence des petites oscillations s'annule. Ce phénomène ressemble à celui observé dans des cristaux ferroélectriques, où un mode propre de vibration du cristal a sa fréquence qui s'annule à une température critique. En dessous de cette température, certains ions du cristal changent leur position d'équilibre, donnant lieu à la ferroélectricité du cristal.

On modélise le système mécanique par un point matériel de masse  $m$ , pesant, c'est-à-dire sous l'effet du champ de la pesanteur, astreint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical en rotation autour d'un grand axe du cercle à la vitesse angulaire  $\omega$  constante.

### Référentiel, coordonnées repère

On prend pour référentiel le châssis qui tient l'axe de l'anneau et le dispositif le faisant tourner. Sur le graphique, le système d'axes cartésiens est supposé lié à ce référentiel. Les coordonnées sphériques sont particulièrement bien adaptées pour repérer le point matériel. Les projections sont faites dans le repère associé.



Le fait que le point matériel soit astreint à se déplacer dans l'anneau, alors que l'anneau tourne à vitesse angulaire constante, se traduit par les contraintes géométriques suivantes :

### Contraintes

$$r = R = cste$$

$$\dot{\phi} = \omega = cste$$

### Bilan des forces:

Il y a bien sûr la pesanteur:

$$m\mathbf{g} = -mg \cos \theta \mathbf{e}_r + mg \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

L'anneau exerce sur le point matériel une force de réaction. Cette force est telle que, en tout temps, on peut "remplacer" l'anneau par cette force. L'effet de l'anneau sur la bille s'exprime par cette force. Il n'y a pas de force de liaison dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$ .

$$\mathbf{N} = N_r \mathbf{e}_r + N_\phi \mathbf{e}_\phi$$

### Cinématique

Il faut exprimer les contraintes dans les expressions des vitesses et des accélérations :

$$\begin{aligned} R &= r, & \omega &= \dot{\phi} \\ \Rightarrow \ddot{r} &= \dot{r} = 0 & \ddot{\phi} &= 0 & \dot{\phi} &= \omega \end{aligned}$$

Dans les expressions des composantes de l'accélération (voir formulaire), il reste les termes non nuls suivants :

$$\begin{aligned} a_r &= -R \dot{\theta}^2 - R \omega^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta &= R \ddot{\theta} - R \omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= 2 R \omega \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont ainsi:

$$\begin{aligned} m(-R \dot{\theta}^2 - R \omega^2 \sin^2 \theta) &= -mg \cos \theta + N_r \\ m(R \ddot{\theta} - R \omega^2 \sin \theta \cos \theta) &= mg \sin \theta \\ m(2 R \omega \dot{\theta} \cos \theta) &= N_\phi \end{aligned}$$

Il faut noter un fait remarquable : la contrainte  $N_\phi$  est non nulle si  $\dot{\theta} \neq 0$ , c'est-à-dire que l'anneau doit exercer une force transverse quand le point matériel bouge par rapport à l'anneau. Quand le formalisme du mouvement relatif sera vu, cette force de liaison pourra être associée à l'accélération de Coriolis dont il faut tenir compte *quand le mouvement est décrit dans le référentiel lié à l'anneau.*

*On aborde ici un nouveau type d'examen des équations du mouvement. On va chercher les équilibres relatifs, discuter leur stabilité et déterminer la fréquence des petites oscillations autour des équilibres stables.*

Pour trouver l'équilibre de la bille relatif à l'anneau, il suffit de poser  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$  dans les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} -m R \omega^2 \sin^2 \theta &= -mg \cos \theta + N_r \\ -m R \omega^2 \sin \theta \cos \theta &= mg \sin \theta \\ 0 &= N_\phi \end{aligned}$$

De l'équation selon  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  il vient les solutions possibles suivantes :

$$\begin{aligned} \sin \theta = 0 &\Rightarrow \theta_e = 0, \theta_e = \pi \\ \sin \theta \neq 0 &\Rightarrow \cos \theta_e = -\frac{g}{R \omega^2} \end{aligned}$$

Pour cette dernière solution, il faut conclure du signe du cosinus :

$$\cos \theta < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Et comme le cosinus est une fonction bornée,  $|\cos \theta| < 1$ , il faut que la vitesse de rotation de l'anneau soit assez grande pour que cette solution existe :

$$\omega \geq \omega_c = \sqrt{g/R}$$

### Equilibre à $\theta = 0$

On pose  $\theta = 0 + \Delta\theta$  pour exprimer une déviation petite de la position d'équilibre. Dans la limite où  $\Delta\theta$  est petit :

$$\cos(\Delta\theta) \approx 1 \quad \sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$$

L'équation du mouvement selon  $\hat{e}_\theta$  fournit alors :

$$R \Delta\ddot{\theta} = (R\omega^2 + g) \Delta\theta$$

Cette équation implique qu'une petite déviation positive  $\Delta\theta$  entraîne une accélération positive, donc un accroissement encore plus grand de  $\Delta\theta$ . Le système est donc instable à cette position d'équilibre.

### Equilibre à $\theta = \pi$

On pose  $\theta = \pi + \Delta\theta$  pour exprimer une déviation petite de cette position d'équilibre. Dans la limite où  $\Delta\theta$  est petit :

$$\cos(\pi + \Delta\theta) \approx -1 \quad \sin(\pi + \Delta\theta) \approx -\Delta\theta$$

L'équation du mouvement selon  $\hat{e}_\theta$  fournit :

$$R \Delta\ddot{\theta} = -(g - R\omega^2) \Delta\theta$$

Si la vitesse de rotation de l'anneau est lente dans le sens que  $g > R\omega^2$  ou  $\omega < \omega_c$ . Alors la position est stable, les petites oscillations constituent un oscillateur harmonique de fréquence  $\nu$  donnée par :

$$(2\pi\nu)^2 = \frac{g}{R} - \omega^2$$

Si  $g < R\omega^2$ , l'équilibre est instable.

### Equilibre à $\cos\theta_e = -g/R\omega^2$

On pose  $\theta = \theta_e + \Delta\theta$ . Des développements limités au premier ordre effectués sur l'équation du mouvement selon  $\hat{e}_\theta$  fournissent :

$$R \Delta\ddot{\theta} - R\omega^2 \sin(\theta_e + \Delta\theta) \cos(\theta_e + \Delta\theta) = g \sin(\theta_e + \Delta\theta)$$

$$R \Delta\ddot{\theta} - R\omega^2 \left[ \sin(\theta_e) + \Delta\theta \cos(\theta_e) \right] \left[ \cos(\theta_e) - \Delta\theta \sin(\theta_e) \right] \quad \text{Les termes d'ordre zéro s'annulent, par définition de } \theta_e.$$

$$= g \left[ \sin(\theta_e) + \Delta\theta \cos(\theta_e) \right]$$

Les termes de deuxième ordre sont négligés, parce que tout le calcul est limité au premier ordre en  $\Delta\theta$ . Il reste ainsi :

$$R\Delta\ddot{\theta} - R\omega^2\Delta\theta \left[ -\sin^2(\theta_e) + \cos^2(\theta_e) \right]$$

$$= g\Delta\theta \cos(\theta_e)$$

Il vient une équation de type oscillateur harmonique :

$$\Delta\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin^2(\theta_e)\Delta\theta$$

Par conséquent, sous les conditions d'existence de cet équilibre, la fréquence des petites oscillations autour de cet équilibre est donnée par :

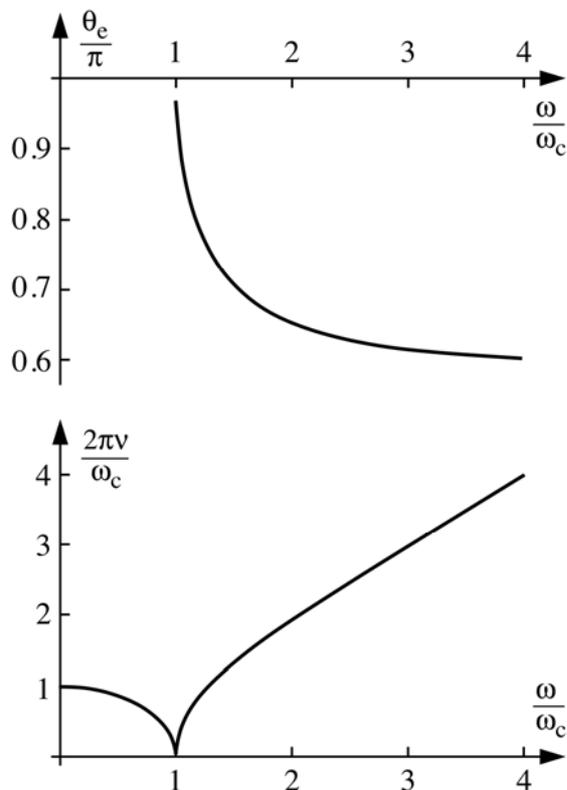
$$(2\pi\nu)^2 = \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_c^4}{\omega^4} \right)$$

En résumé, l'équilibre est stable à la position  $\theta_e = \pi$  quand  $\omega < \omega_c$  et à  $\cos\theta_e = -g/R\omega^2$ , ou  $\theta_e = -\text{Arc cos}\left((\omega_c/\omega)^2\right)$  quand  $\omega > \omega_c$ . La pulsation des petites oscillations vaut :

$$\frac{2\pi\nu}{\omega_c} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \text{ quand } \omega < \omega_c. \text{ Elle est donnée par :}$$

$$\frac{2\pi\nu}{\omega_c} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^4} - \frac{\omega_c^2}{\omega^4}}, \text{ quand } \omega > \omega_c.$$

La fréquence des petites oscillations passe par zéro au changement entre les deux régimes.<sup>26</sup>



<sup>26</sup> In Mathematica :

```
Plot[{If[x > 1, Sqrt[x^2 - x^2 - 2], Sqrt[1 - x^2}],
      {x, 0, 4}]
```

### Chute sur sphere

Un corps de masse  $m$  est posé au sommet d'une demi-sphère de rayon  $R$ . Il commence à glisser sans frottement. Ecrire les équations du mouvement sans les résoudre et trouver le point  $D$  de décollement.

### Point sur cône avec fil

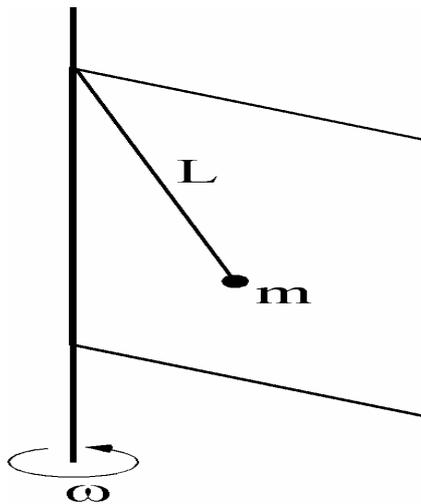
Un point matériel pesant, de masse  $m$ , est suspendu à un fil et soutenu par un cône d'axe vertical, d'ouverture dirigée vers le bas (angle  $2\alpha$ ). Il est donc astreint à se déplacer sur un cercle. Le fil est attaché au sommet du cône. Le frottement du point matériel sur le cône est de type visqueux (force proportionnelle à la vitesse). Le point matériel est initialement à l'arrêt. Il est soumis à une force de traction constante et tangente à l'arc de cercle.

- 1) Ecrire les équations du mouvement
- 2) Déterminer la tension du fil
- 3) Au bout de combien de temps le point matériel décolle-t-il ?

### Pendule sur la porte

Un pendule formé d'un point matériel pesant de masse  $m$  et d'un un fil sans masse de longueur  $L$ . Le pendule est astreint à osciller dans le plan d'une "porte" qui tourne autour d'un axe vertical à vitesse angulaire  $\omega$  constante. Le pendule est attaché à l'axe de rotation de la porte.

- a) Etablir le bilan des forces en présence,
- b) Ecrire les équations du mouvement.



### Point sur cylindre

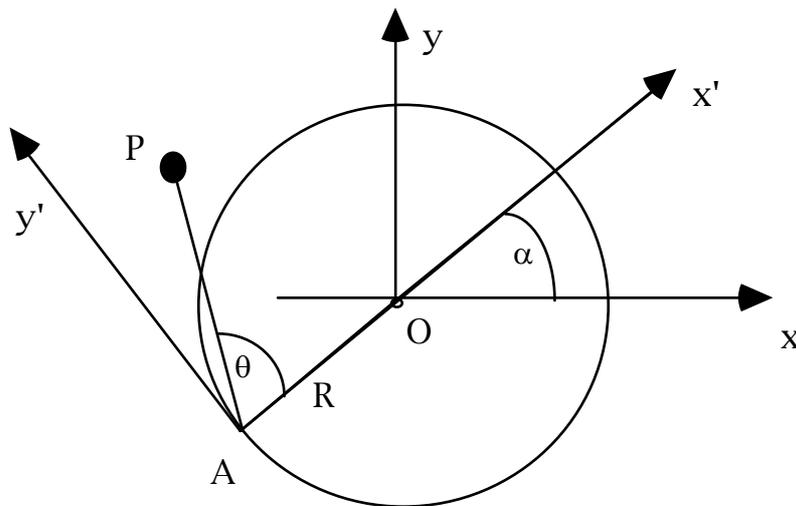
Un point matériel est astreint à se déplacer sur un cylindre infiniment long et de rayon  $R$ . Le point matériel est attiré vers un point  $O$  sur l'axe du cylindre par une force proportionnelle à la distance du point matériel au point  $O$ .

- a) Ecrire les équations du mouvement du point matériel. Il n'y a pas d'effet de pesanteur ni de friction dans ce problème. Les équations du mouvement doivent inclure les forces de contraintes.
- b) Décrire le mouvement dans la direction de l'axe du cylindre

## Le swing du golfeur

L'examen d'un film ultrarapide du swing d'un golfeur suggère que les mains décrivent un cercle, avec une grande accélération au début du mouvement, puis une vitesse presque nulle au moment où les mains atteignent la position inférieure. La canne de golf atteint alors une vitesse maximum. Ces considérations suggèrent le modèle mécanique suivant.

Un point matériel P de masse m est relié à un point A par une tige rigide sans masse, de longueur  $\ell$ . Le point A décrit un cercle de rayon R centré en A. La pesanteur et toute forme de frottement sont négligées. Le mouvement du point A est donné par une fonction  $\alpha = \alpha(t)$  supposée donnée à l'avance (le mouvement imposé par le golfeur). Ainsi  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  sont supposés connus. Les mains du golfeur sont supposées ne pas imposer de moment de force en A.



- A) Soit  $\vec{\omega}$  la vitesse instantanée de rotation de AG (la canne de golf). Exprimez  $|\vec{\omega}| = \omega$  en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\alpha}$ .
- B) La force en A est-elle nécessairement dans la direction de AG (la canne de golf) ? Et s'il y avait un fil souple à la place de la tige rigide sans masse, qu'en serait-il de cette force ?
- C) Dans le cas présent d'une tige rigide sans masse, quelle loi du mouvement peut-on invoquer pour déduire que la force est alignée avec AG. Quelle expérience vue en cours présente la même problématique ? Et si la masse de la tige n'était pas négligée, la force en A exercée sur la tige AG serait-elle alignée avec la tige AG ?
- C) Que devient le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

quand on utilise comme point de référence un point mobile A au lieu d'un point O du référentiel ?

- E) Trouvez l'équation du mouvement pour  $\theta$ . Vous pouvez l'exprimer en terme de  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  et de  $\theta$  et  $\omega$ .  
Aide : appliquez le théorème du moment cinétique avec A comme point de référence. Une approche alternative est de suivre F) et G).

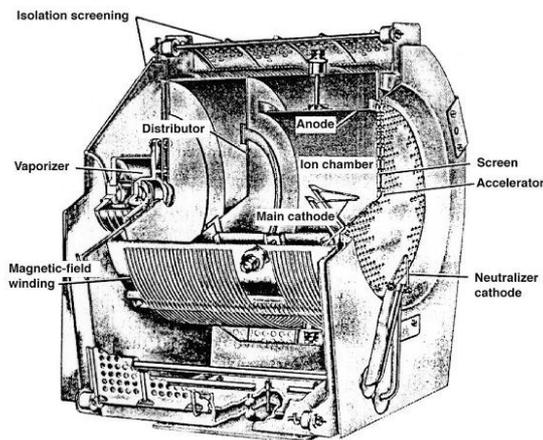
- F) Exprimez l'accélération absolue du point A en terme de  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  projetée dans le repère Ax'y'
- G) Exprimez l'accélération absolue du point P en terme de  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  et de  $\theta$  et  $\omega$

## Systemes ouverts

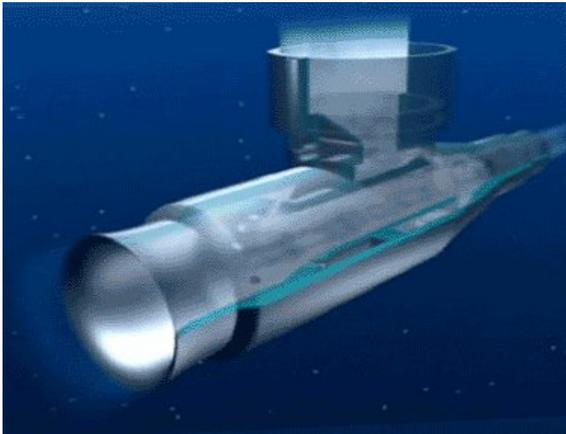
Il existe une variété de systèmes mécaniques qui échangent de la masse avec l'extérieur. On les appelle des systèmes ouverts.

Exemples:

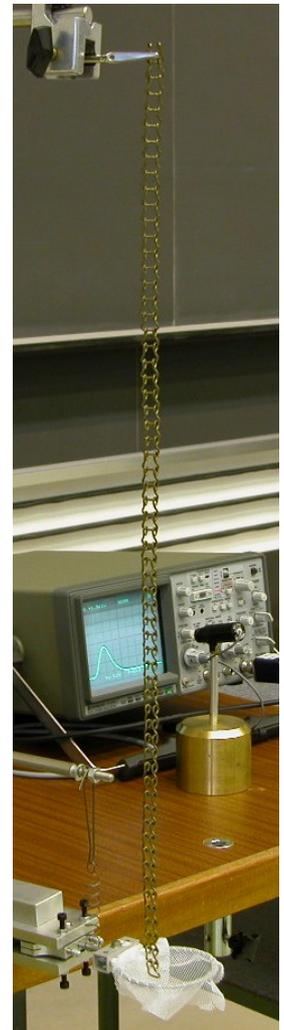
- une fusée ou un turboréacteur. Note d'actualité : il existe un intérêt récent pour l'utilisation de réacteurs à ion comme moyen de propulsion dans l'espace.<sup>27 28</sup>



- actualité : un turboréacteur qui fonctionne à base d'ondes de choc pour éjecter de l'eau<sup>29</sup>



- des escaliers roulants ou un ruban monte-charge
- une goutte de pluie accumulant de l'eau dans le brouillard
- une chaîne tombant sur une surface horizontale (démonstration d'auditoire).



*L'intérêt de ce passage est d'appliquer la deuxième loi de Newton dans sa forme générale, avec une quantité de mouvement qui varie parce que la*

<sup>27</sup> Freeman Dyson, *Les vaisseaux spatiaux du 21<sup>ème</sup> siècle*, Pour la Science, Nov 1995

<sup>28</sup> R.G. Jahn, *Physics of Electric Propulsion*, McGraw-Hill Series in Missile and Space Technology, 1968

<sup>29</sup> Pursuit Dynamics, voir <http://www.pursuitdynamics.com/default.asp> et New Scientist 6 March 2004, p. 24

masse varie, pas seulement la vitesse :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \neq m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{car} \quad m=m(t)$$

L'exemple le plus caractéristique est celui de la fusée. Admettons que la masse de la fusée  $m$  diminue selon une loi  $m = m(t)$  donnée. Les gaz sont éjectés à la vitesse d'éjection  $u$ , mesurée par rapport à la fusée elle-même. On considère l'évolution sur un temps  $dt$  petit. Entre  $t$  et  $t + dt$ , la masse et la vitesse de la fusée varient:

$$m(t + \Delta t) = m + \frac{dm}{dt} \Delta t$$

$$\Delta m = - \frac{dm}{dt} \Delta t \geq 0$$

La quantité de mouvement totale de la fusée et son combustible, au temps  $t$ , vaut :

$$\mathbf{p}(t) = m \cdot \mathbf{v}$$

Au temps  $t + \Delta t$ , la fusée a diminué de masse. La masse éjectée  $\Delta m$  a une vitesse  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  par rapport au référentiel. Cette composition des vitesses deviendra naturelle quand on aura formalisé la notion de vitesse relative (chapitre : mouvement relatif). L'intuition physique suffit cependant à comprendre ce point. On peut penser à la vitesse d'un enfant qui court dans un train à une vitesse  $\mathbf{u}$ , alors que le train va à une vitesse  $\mathbf{v}$ . Il est clair que la vitesse de l'enfant par rapport au sol vaut  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ .

La quantité de mouvement totale au temps  $t + \Delta t$  vaut ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t + \Delta t) &= m(t + \Delta t)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \left( m + \frac{dm}{dt} \Delta t \right) (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) - \frac{dm}{dt} \Delta t (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \end{aligned}$$

La deuxième loi de Newton dans sa formulation généralisée (en terme de quantité de mouvement) implique que si la fusée subit une force  $\mathbf{F}$ , on a :

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{F} \Delta t$$

Avec les valeurs de la quantité de mouvement trouvée ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \Delta t &= \\ \left( m + \frac{dm}{dt} \Delta t \right) (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \left( - \frac{dm}{dt} \Delta t \right) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - m\mathbf{v} &= \\ m\mathbf{v} + m\Delta \mathbf{v} + \frac{dm}{dt} \Delta t \cdot \mathbf{v} - \frac{dm}{dt} \Delta t (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - m\mathbf{v} &= \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a négligé les termes du deuxième ordre. En réarrangeant les termes :

$$m \Delta \mathbf{v} = - \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\geq 0} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F} \Delta t$$

$$m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = - \left( - \frac{dm}{dt} \right) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

En passant à la limite, il vient :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F}$$



une bombonne de CO<sub>2</sub> est placée sur un chariot. Le professeur s'assied sur le chariot, ouvre la bouteille et s'en va ainsi...

### Fusée

Une fusée contient un mélange combustible qui peut être éjecté par une tuyère avec une vitesse  $u = 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  (par rapport à la tuyère). Elle est disposée verticalement, la tuyère dirigée vers le bas, et on la suppose guidée de manière à avoir une trajectoire verticale. On négligera la variation de la pesanteur avec l'altitude et on prendra  $g$  constant. La masse du combustible est  $m$ , et la masse totale du reste de la fusée (réservoirs, accessoires, etc...) est  $M$ .

a) Montrer que la fusée ne peut décoller que si le débit de gaz brûlés (masse par unité de temps) est supérieur à une limite que l'on indiquera.

b) La masse du mélange combustible est  $m_0$  au départ, et on suppose que la masse restante évolue suivant la loi :

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) \quad (0 < t < \tau)$$

Quelle est la valeur maximale de  $\tau$  qui permet le décollage ?

c) Calculer  $v(t)$  pour  $(0 < t < \tau)$ .

## Loi de la Gravitation de Newton

La loi de la gravitation universelle de Newton peut être vue comme un monument symbolisant un tournant définitif dans un moment passionnant de l'histoire des sciences. (Voir tableau) La révolution copernicienne signale un renouveau intellectuel important. Le procès de Galilée stigmatise un déplacement des systèmes de valeurs. Ce sont là des grands moments de l'histoire de la pensée, qu'il vaut la peine de découvrir. Prendre conscience de ces grands débats peut motiver l'étudiant dans son apprentissage de la mécanique. L'étudiant en physique peut y voir une occasion de s'inscrire dans une continuité culturelle.<sup>30</sup>

Aristote (384-322 av. JC)	Terre au centre Planètes sur sphères concentriques
Aristarque de Samos (310-230 av. JC)	Soleil au centre Planètes sur orbites circulaires centrées sur le Soleil
Ptolémée	Terre fixe Soleil : cercle décentré Planètes : épicycles (cercles sur cercles)
Moyen-Age -> XVIème s.	Aristote
Copernic (1474-1543)	Reprend Aristarque : la Terre n'est pas le centre de l'Univers, vie du temps des humanistes. « <i>The theory of the Earth's motion is admittedly difficult to comprehend, for it runs counter to appearances and to all tradition. But if God wills, I shall in this book make it clearer than the Sun, at least to mathematicians.</i> » <sup>31</sup>
Tycho Brahé (1546-1601)	Mesures très précises. Danois, le roi lui donne une île et un financement généreux. Observatoire extraordinaire, mais pas de télescope.
Giordano Bruno	Le soleil n'est pas le centre de l'Univers, il y a beaucoup de soleils. Vie du temps de l'inquisition : il est brûlé sur le bûché
Galilée	Le procès ...

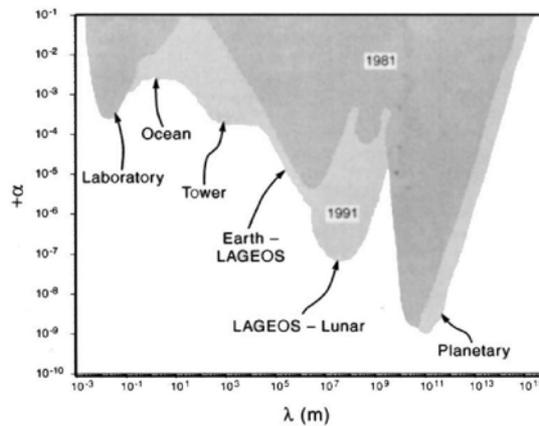
La loi de force de la gravitation universelle de Newton a résisté à toutes les investigations critiques pendant des siècles ! Un article relativement récent dans la revue Nature<sup>32</sup> faisait état des tentatives visant à trouver une déviation de la loi de Newton, de la forme :

<sup>30</sup> Leo Kadanoff, "Greats", Physics Today April 1994, et Gruner, Langer, Nelson, Vogel, "What future will we choose for Physics?", Physics Today, December 1995

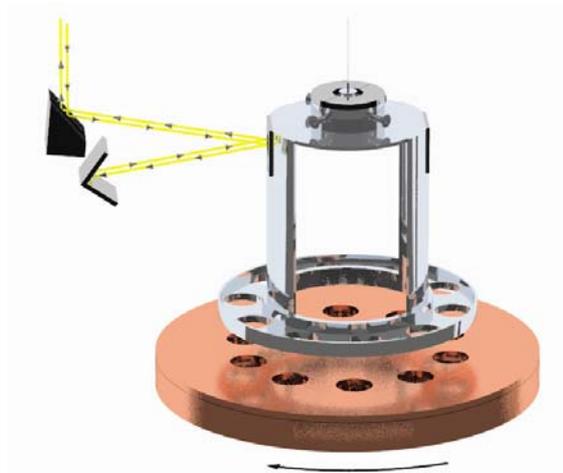
<sup>31</sup> Copernic, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, tiré de : « *And there was light* », Rudolf Thiel, André Deutsch, 1958

<sup>32</sup> E. Fischback, C. Talmadge, "Six years of the 5<sup>th</sup> force", Nature vol. 356, 207(1992)

$$F(r) = -G_{\infty} \left\{ 1 + \alpha \left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} \right\} \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



La déviation, si elle existe, est minime. De telles études continuent ! En 1999, un comité international décida d'augmenter l'incertitude officielle sur la valeur de la constante G au vu des différences dans les mesures répertoriées. Cette décision a motivé des chercheurs à améliorer cette mesure.<sup>33</sup> D'autres essaient de trouver des déviations à très courtes échelles avec un très élégant pendule de torsion (Figure).<sup>34</sup>



En plus de la question d'une déviation possible de la loi de Newton, la gravitation aboutit à des problèmes fondamentaux de la physique. Il y a le mystère de la matière obscure (« dark matter ») en astrophysique. De plus en plus d'évidences expérimentales indiquent que le 90% de la matière de notre univers n'est pas lumineuse, en ce sens que cette matière n'émet pas et ne réfléchit pas d'ondes électromagnétiques. Cette forme abondante mais inconnue de matière

<sup>33</sup> F. Nolting, J. Schurr, St. Schlamming, W. Kündig, „Determination of the gravitational constant G by means of a beam balance“, Europhysics News July/August 2000, p. 25

<sup>34</sup> “Theorists and Experimentalists seek to learn why gravity is so weak”, B. Schwarzschild, Physics Today Sept. 2000, p. 22-24, <http://www.npl.washington.edu/eotwash>

ne se révèle que par ses interactions gravitationnelles. Elle fut découverte par des astronomes qui mesuraient la vitesse de rotation d'étoiles autour du centre de galaxies en spirales et le mouvement de clusters de galaxies. Comprendre la nature de cette matière obscure est devenu un des plus grands défis de l'astrophysique et de la physique des particules élémentaires.<sup>35</sup> Enfin, il faut noter que la loi de gravitation s'inscrit de nos jours dans un cadre théorique solide appelé la théorie de la relativité générale d'Einstein. Dans le courant du 20<sup>ème</sup> siècle, toutes les autres forces de la Nature ont pu être décrites par des formes avancées de la mécanique quantique. Il appartient au 21<sup>ème</sup> siècle de joindre ces deux corps théoriques !

### Les lois de Kepler

Kepler (1571-1630) fit confiance à l'exactitude des mesures de son maître Tycho Brahé. En 1609, l'analyse détaillée de ces mesures fournit à Kepler deux lois :

1<sup>ère</sup> loi : les trajectoires des planètes sont des ellipses, dont le Soleil est un des foyers.

2<sup>ème</sup> loi : le rayon-vecteur du soleil à la planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

La précision des observations nécessaires pour en arriver à ces conclusions est remarquable. En effet l'orbite de Mars est une ellipse dont le grand axe et le petit axe ne diffèrent que de 0.4%. La précision des mesures de Tycho Brahé est admirable!

10 ans plus tard Kepler obtient la 3<sup>ème</sup> loi qui lie la période de l'orbite de plusieurs planètes et leur grand axe :

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} \text{ est une constante, la même pour toutes les planètes}$$

Actualités : il a été possible récemment d'observer l'orbite d'étoiles au centre de notre galaxie !<sup>36</sup>

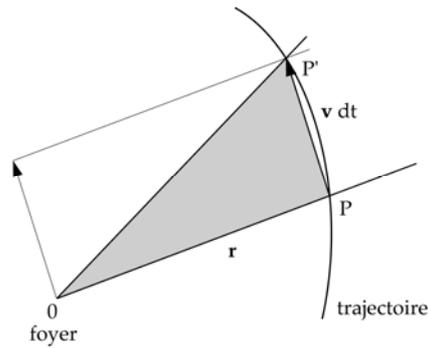
### Signification et conséquence de la loi des aires

La vitesse aérolaire est l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur du foyer O au point P de la trajectoire. On peut exprimer cette aire sous la forme :

$$dA = \text{aire}(OPP') = \frac{1}{2} r v dt \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r})$$

<sup>35</sup> d'après K.P. Pretzl, « Bringing Dark Matter in from the Dark », Europhysics News, 24(1993) p. 167

<sup>36</sup> <http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/index.php>



Il est possible de donner une forme vectorielle à cette définition, en posant :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2m} \mathbf{L}$$

$\mathbf{L}$  est le moment cinétique par rapport au foyer  $O$  de la planète de vitesse  $\mathbf{v}$  et de masse  $m$ . Ainsi la loi des aires et la planéité des orbites (implicite dans la 1<sup>ère</sup> loi) permet de dire que  $\mathbf{L}$  est constant. Le passage à la définition vectorielle de la vitesse aérolaire inclut le fait que le mouvement est plan. En effet pour deux positions numérotées 1 et 2, on a

$$0 = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2)$$

La première égalité est vraie pour tout vecteur. La deuxième applique la loi des aires. Comme  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont deux positions quelconques, on doit avoir pour tout  $\mathbf{x}_1$  que  $\mathbf{x}_1$  est dans le plan normal à  $\mathbf{L}$ . La conservation du moment cinétique implique :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$$

On voit ainsi que  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{r}$  sont parallèles. La force est donc parallèle au rayon vecteur. Une force qui pointe toujours vers un même point est appelée une force 'centrale'.

Pour poursuivre l'analyse des lois de Kepler, on exprime le moment cinétique dans ce plan en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$\mathbf{L} = m r \mathbf{e}_r \times (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z = L \mathbf{e}_z$  avec  $L = m r^2 \dot{\theta}$ .  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite. On exprime aussi les équations du mouvement en coordonnées cylindriques. Pour la clarté de l'exposé, on supposera, en suivant Newton, une force d'attraction centrale de magnitude  $\frac{-K}{r^2}$  ( $K > 0$ ):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

La deuxième équation est équivalente à la conservation du moment cinétique  $L$ . Il suffit de dériver  $L = m r^2 \dot{\theta}$  par rapport au temps pour le constater. La première équation du mouvement peut s'intégrer une fois en multipliant par  $\dot{r}$  et en remplaçant  $\dot{\theta}$  par son expression en termes de  $L$  et  $r$ . Il apparaît alors des termes qui s'identifient tout de suite comme des dérivées par rapport au temps :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(\ddot{r} - \frac{L^2\dot{\theta}}{m^2r^3}\right) = \frac{-K\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right) = 0$$

Il vient ainsi une constante du mouvement (on verra que c'est l'énergie mécanique) :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} =$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{K}{r}$$

Des équations du mouvement, il est possible de tirer une équation différentielle pour la trajectoire.<sup>37</sup> Il s'agit ici seulement de constater que cette loi de force est compatible avec les lois de Kepler. L'importance de la démarche est plutôt de nature historique. La première équation du mouvement, compte tenu de la conservation du moment cinétique, s'écrit :

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = \frac{-K}{r^2}$$

On opère un changement de variable :  $q = \frac{1}{r}$ . Par différentiation, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\dot{r} = \frac{-1}{q^2} \frac{dq}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{dq}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2q}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d^2q}{d\theta^2} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2} q^2 \frac{d^2q}{d\theta^2}$$

En substituant dans l'équation du mouvement, il vient :

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2}$$

Cette équation différentielle est de la forme de celle de l'oscillateur harmonique. Elle a donc une solution générale de la forme :

$$q = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} + C \cos(\theta + \theta_0)$$

On peut poser  $C > 0$  sans perte de généralité. C'est l'équation d'une conique (ellipse, parabole ou hyperbole). Les deux extrema de  $r$  sont nécessairement donnés par :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{Km}{L^2} + C \quad \frac{1}{r_2} = \frac{Km}{L^2} - C$$

Si  $C > \frac{Km}{L^2}$ , il n'y a qu'un seul extremum, car  $r$  ne peut pas être négatif. L'orbite est alors une hyperbole. Dans le cas contraire, il s'agit d'une ellipse. Une discussion qualitative permet

<sup>37</sup> Ce n'est pas une aptitude à développer pour l'étudiant typique qui utiliserait cet ouvrage.

d'identifier efficacement ces différents régimes,<sup>38</sup> sans avoir recours à une intégration comme celle-ci !

Dans la mesure où on s'est ainsi convaincu que la trajectoire est une ellipse, on a confirmé que la loi en  $1/r^2$  postulée par Newton vérifie la loi des aires et la loi selon laquelle les orbites sont des ellipses. Il reste à examiner ce que la troisième loi fournit. On va voir qu'elle nous dit quelque chose de crucial à propos de la constante  $K$  ! Pour invoquer la période, il suffit de considérer :

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{mr^2}{L} \quad \text{De là il vient } dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad \text{et la période : } \int_0^T dt = T = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{L} d\theta$$

Vu le lien entre la vitesse aérolaire et le moment cinétique,  $TL/m$  est deux fois l'aire  $A$  de l'ellipse. Cela se confirme en exprimant l'intégrale sur  $\theta$  comme une intégrale double :

$$\frac{TL}{m} = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} 2r' dr' = 2A$$

Ainsi, pour trouver la période, il suffit de calculer l'aire de l'ellipse:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\frac{Km}{L^2} + C \cos \theta\right)^2}$$

Cette intégrale peut être obtenue dans une table ou avec un programme comme Mathematica. Il vient :

$$\frac{TL}{m} = \frac{1}{C^2} \frac{2\pi \left(\frac{Km}{CL^2}\right)}{\left(\left(\frac{Km}{CL^2}\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Notons  $2a$  le grand axe de l'ellipse :

$$2a = \frac{1}{\frac{Km}{L^2} - C} + \frac{1}{\frac{Km}{L^2} + C} = \frac{1}{C} \frac{2\left(\frac{Km}{CL^2}\right)}{\left(\left(\frac{Km}{CL^2}\right)^2 - 1\right)}$$

Par conséquent, le rapport invoqué par la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler vaut :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Il faut que ce rapport soit indépendant de  $m$ , puisqu'il doit être le même pour toute planète. Par conséquent, la constante  $K$  doit être proportionnelle à  $m$  ! Comme l'action est mutuelle entre le soleil et la planète, si la constante  $K$  est proportionnelle à la masse d'un des astres de l'interaction, elle doit aussi être proportionnelle à la masse de l'autre astre !

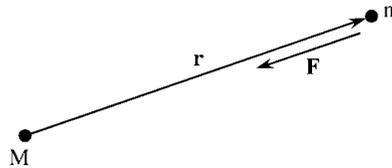
La dérivation ci-dessus aurait pu être conduite dans l'ordre inverse. On aurait posé que l'orbite est une ellipse avec l'équation donnée. On aurait trouvé pour cette équation horaire de l'ellipse une équation du mouvement avec un terme en  $\kappa/r^2$  et la troisième loi aurait fourni de même la proportionnalité à la masse. La démarche aurait été plus difficile à suivre, mais elle est équivalente.

<sup>38</sup> voir ce sujet dans le chapitre « discussion qualitative »

## Loi de la gravitation de Newton

Ainsi, en 1677, Newton déduit des données astronomiques et des lois de Kepler en particulier la loi de la gravitation. "Dans cette philosophie (la philosophie expérimentale), les propositions sont tirées des phénomènes et généralisées par induction".<sup>39</sup> La force d'attraction mutuelle entre deux masses  $M$  et  $m$  est donnée par :

$$F = - \frac{G M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$



où  $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur joignant les deux masses et  $G$  est une constante universelle,  $G = 6.67300 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

## **Champ de gravitation**

La relation entre pesanteur et gravitation revêt une signification historique. Selon Mach, Newton aurait procédé par une extension conceptuelle, du projectile sur la terre à la trajectoire de la Lune autour d'elle. Il ne nie pas la grandeur du travail hypothético-déductif des Principia, mais il admire sans réserve le travail d'induction :

« A côté de cette contribution déductive [...] la science est redevable à Newton d'un travail d'invention [...] : de quelle nature est l'accélération qu'est la condition du mouvement curviligne des planètes autour du soleil et des satellites autour de la Terre. Avec une grande hardiesse de pensée, Newton admet (et précisément par l'exemple de la Lune) que cette accélération n'est pas essentiellement différente de cette accélération de la pesanteur qui nous est familière. [...] Voyant que l'attraction terrestre ne se fait pas sentir seulement à la surface de la Terre, mais aussi sur les hautes montagnes et dans les mines profondes, le physicien habitué à la continuité de la pensée se représente cette attraction comme agissant encore à des hauteurs et à des profondeurs plus grandes que celles qui nous sont accessibles. Il se demande où est la limite de son influence, et si celle-ci ne s'étendrait pas jusqu'à la Lune ? Cette question provoque un puissant élan d'imagination et, lorsqu'elle se pose à un génie intellectuel tel que Newton, elle a pour conséquence nécessaire les progrès les plus grands. »  
40

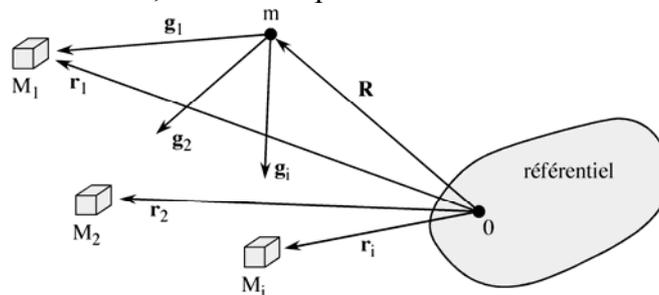
Il est possible de manipuler l'expression mathématique de la loi de la gravitation de manière à faire ressortir une analogie avec l'effet de la pesanteur. En effet, la loi de la gravitation entre deux corps peut être exprimée en terme du champ gravitationnel à la position  $\mathbf{r}$  produit par

<sup>39</sup> Newton, in Principia, Scholium général, T. 2, cité dans "Du Flou au Clair" de Michelle Goupil

<sup>40</sup> Ernst Mach dans « La Mécanique » trad. Par Emile Piccard, 1904, dans III. Travaux de Newton parag. 3

une masse  $M$  à l'origine :  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$ . La force subie par une masse test  $m$  dans ce champ est  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  !

A la surface de la Terre, une masse test  $m$  subit l'effet superposé de tous les points de la Terre. Pour calculer la résultante, nous découpons la Terre en masses infinitésimales.



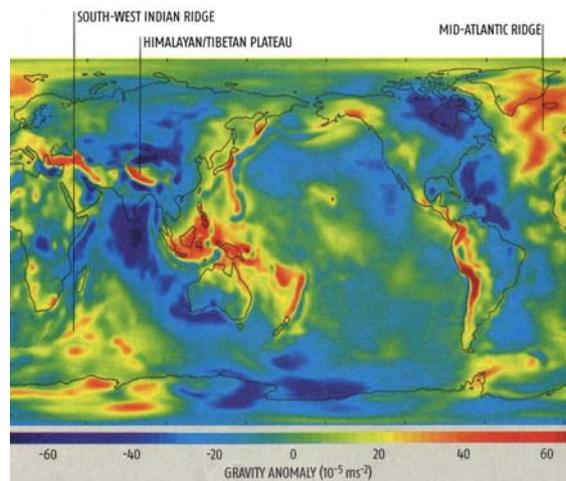
Au point  $m$ , on sent le champ  $\mathbf{g}_i$  produit par chaque masse  $M_i$ . La somme sur toutes les masses infinitésimales devient, par un passage à la limite, une intégrale de volume. Ainsi :

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = \iiint_{\text{volume}} dx dy dz \rho(\mathbf{r}) \left( \frac{-G(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3} \right)$$

Il est possible d'effectuer cette intégrale triple sans trop de complications pour une distribution sphérique de masse, de densité  $\rho(\mathbf{r})$  uniforme, de masse totale  $M$ . Il vient

$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = -\frac{GM}{R^2} \mathbf{e}_r$  comme si la Terre était une masse ponctuelle ! La déviation de la Terre par rapport à une sphère, la présence de cavités souterraines ou de montagnes modifie la valeur de  $g$ .

Actualité : déviation de  $g$  mesurée sur toute la Terre, déterminée par 2 satellites dont la séparation est contrôlée par un faisceau micro-ondes, et dont la position est déterminée par GPS.<sup>41</sup>

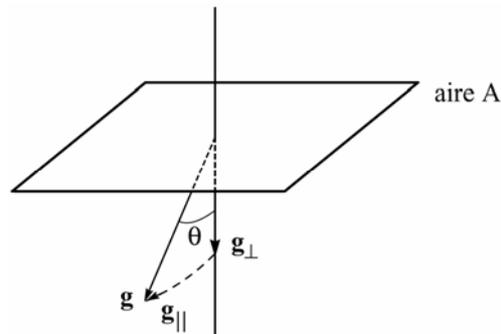


A ce point du cours, les étudiants n'ont pas vu les intégrales multiples, ni le théorème de Gauss. Il n'y a donc pas lieu de s'étendre sur ce sujet. En revanche, il est utile de comprendre

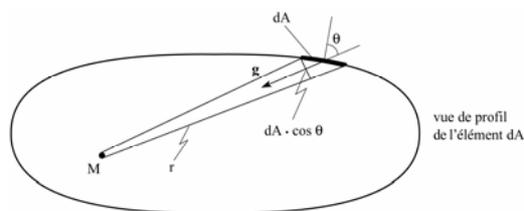
<sup>41</sup> New Scientist, 21.8.03, p. 17

que la règle ci-dessus, qui associe la Terre à un point matériel, n'est pas automatique, mais résulte d'une approximation. L'étudiant plus curieux suivra la présentation intuitive suivante du théorème de Gauss.

On définit le flux de  $\mathbf{g}$  à travers une surface.



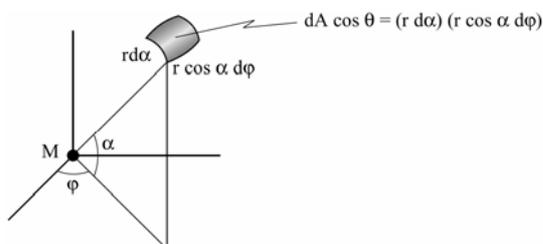
Le vecteur  $\mathbf{g}$  est décomposé en ses composantes normales et tangentielles à la surface :  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_\perp + \mathbf{g}_\parallel$ . Le flux  $\phi$  de  $\mathbf{g}$  à travers  $A$  est défini par  $\phi = A \cdot |\mathbf{g}_\perp| = A \cdot |\mathbf{g}| \cdot \cos \theta$ . Considérons alors le flux au travers d'une surface fermée entourant une masse ponctuelle  $M$ .



$$d\phi = \text{flux de } \mathbf{g} \text{ à travers } dA = dA |\mathbf{g}| \cos \theta = |\mathbf{g}| \cdot dA \cos \theta = GM \cdot \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

Or  $dA \cos \theta$  est l'élément de surface sur la *sphère* centrée en  $M$ , de rayon  $r$ . Appelons cet élément de sphère  $dS$ .  $dS$  est proportionnel à  $r^2$  (voir esquisse). Repérons la position de  $dA$  sur la surface par des angles  $\phi$  et  $\alpha$ . Il vient :

$$dA \cos \theta = dS = r^2 d\phi \cos \alpha d\alpha$$



Par conséquent, l'élément de flux  $d\phi$  du flux de  $\mathbf{g}$  à travers  $dA$  vaut :

$$d\phi = \|\mathbf{g}\| dA \cos \theta = \|\mathbf{g}\| dS = \frac{GM}{r^2} dA \cos \theta = GM d\phi \cos \alpha d\alpha$$

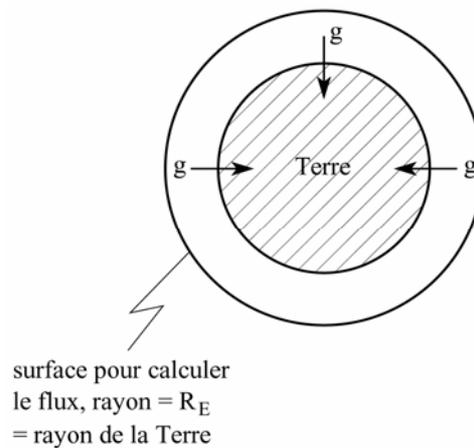
Le flux total à travers la surface quelconque est simplement :

$$\phi = G M \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = G M \cdot 4\pi$$

S'il y a plusieurs masses ponctuelles  $m_\alpha$  dans la surface, chaque masse contribue un champ  $\mathbf{g}_\alpha$ . Si les masses sont à l'intérieur de la surface, alors il faut sommer les contributions de chaque masse au champ gravitationnel et le flux total vaut :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -4\pi G (m_1 + m_2 + m_3 + \dots)$$

### Cas de la Terre



Pour calculer  $\mathbf{g}$  à la surface de la Terre, considérons une surface sphérique qui englobe la Terre, concentrique à la Terre. On suppose alors que  $\mathbf{g}$  soit radial, d'égal module partout à la surface de la Terre. Dans ce cas simple, le flux est calculé immédiatement. D'une part, les considérations ci-dessus ont donné :  $\phi = 4\pi G M$ . D'autre part, la symétrie du modèle permet de calculer le flux de  $\mathbf{g}$  immédiatement :  $\phi = 4\pi R_E^2 g$ , où  $M$  est la masse de la Terre,  $R_E$  son rayon. Il vient par conséquent :  $g = \frac{GM}{R_E^2}$ .

C'est la valeur qu'on trouverait si on avait supposé que toute la masse de la Terre était concentrée en son centre.

### Principe d'équivalence

La gravitation joue un rôle central dans la théorie de la relativité générale d'Einstein. En annexe à cette présentation de la loi de la gravitation de Newton, le principe d'équivalence d'Einstein peut être révélateur des nuances conceptuelles attachées à la notion de masse, notion qui apparaît maintenant en deux contextes différents de la mécanique : le coefficient qui apparaît devant l'accélération dans  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  et celui qui apparaît dans l'expression de ce  $\mathbf{F}$  quand il s'agit de la gravitation.

Nous pouvons penser à deux manières de définir la masse. En se référant à la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, nous pourrions comparer des corps soumis à la même force

$$M_i(1) a(1) = F = M_i(2) a(2)$$

Si  $M_i(1)$  est notre étalon,  $M_i(2)$  est déterminé comme étant la masse telle que

$$M_i(2) = M_i(1) \cdot \frac{a(2)}{a(1)}$$

$M(i)$  est appelé masse d'inertie. Nous pouvons aussi définir la masse à partir de la loi de la gravitation. Prenons la Terre comme étalon, mesurons la force exercée par la Terre sur l'objet :

$$\frac{G M_g M_E}{R_E^2} = F \Rightarrow M_g = \frac{F \cdot R_E^2}{G M_E}$$

$M_g$  est appelé la masse gravitationnelle.

### Principe d'équivalence de Newton<sup>42</sup>

Toutes les expériences montrent que la masse gravitationnelle et la masse d'inertie sont proportionnelles. Il est donc possible, *par convention*, de les prendre égales. On considère ci-dessous des expériences typiques pour expliciter le principe.

Expérience 1 : chute libre de deux corps près de la Terre

$$\left. \begin{aligned} M_i(1) a(1) &= \frac{G M_E M_g(1)}{R_E^2} \\ M_i(2) a(2) &= \frac{G M_E M_g(2)}{R_E^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{M_i(1) a(1)}{M_i(2) a(2)} = \frac{M_g(1)}{M_g(2)}$$

$$\text{donc } \frac{M_i(1)}{M_g(2)} = \frac{M_i(2)}{M_g(2)} \cdot \frac{a(2)}{a(1)}$$

Les mesures les plus précises fournissent toujours

$$a(2) = a(1). \text{ Par conséquent, il est possible de faire le choix } \frac{M_i}{M_g} = 1$$

Expérience 2 : le pendule mathématique

En dérivant les équations du mouvement avec  $M_i$  pour le coefficient de l'accélération distinct de  $M_g$  pour la force de la pesanteur, la fréquence des petites oscillations est donnée par :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell} \cdot \frac{M_g}{M_i}}$$

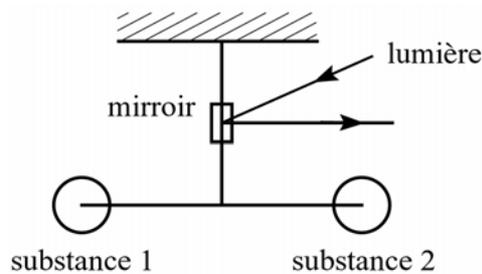
$$\text{Les mesures fournissent } \frac{M_i}{M_g} = 1 \pm \varepsilon$$

Par exemple, Bessel avait obtenu  $\varepsilon < 10^{-4}$ .

<sup>42</sup> <http://www.npl.washington.edu/eotwash/equiv.html>

### Expérience 3 : pendules de torsion

Eötvös développa des mesures extrêmement précises entre 1890 et 1915 à l'aide de pendules de torsion. Deux boules de substances distinctes mais égales en masse au sens  $M_g(1) = M_g(2)$  sont accrochées aux extrémités du pendule. Toute déviation du pendule est détectée par la déviation d'un faisceau lumineux réfléchi. Si  $M_i(1) \neq M_i(2)$  alors le faisceau lumineux est dévié.



Les mesures d' Eötvös permettent de conclure :

$$\frac{M_g}{M_i} = 1 \pm \varepsilon \text{ avec } \varepsilon < \frac{1}{3 \times 10^{10}}$$

### Principe d'équivalence d'Einstein

Einstein (1911) est amené à énoncer le principe d'équivalence, qui est à la base de la théorie de la relativité générale. Un observateur dans un « ascenseur » en chute libre observe les mêmes lois physiques que s'il était dans un référentiel d'inertie. Les effets de l'accélération et des forces de gravitation s'annulent les uns avec les autres. C'est par conséquent le **principe de relativité** qui *impose* l'équivalence des deux notions de masse.

$$M_i \equiv M_g$$

De nombreuses vérifications expérimentales du principe d'équivalence furent entreprises au 20<sup>ème</sup> siècle.<sup>43</sup>

### Science et religion<sup>44</sup>

La science moderne admet qu'il doit exister un nombre restreint de lois universelles qui permettent de décrire la multitude de phénomènes qui s'offrent à notre observation. C'est au 16<sup>ème</sup> siècle, en Europe, que cette forme de pensée s'est développée. On ne peut qu'essayer d'imaginer ce qui a pu pousser les intelligences de l'époque à entreprendre un projet aussi ambitieux. On constate que cette démarche ne vit le jour que dans un monde chrétien. Elle se démarque d'une attitude païenne selon laquelle l'ici-bas est imparfait, alors que la perfection se situe dans un au-delà éthéré, inaccessible. Kojève soulève alors la question de savoir ce qu'il y a dans la doctrine chrétienne, qui puisse pousser à chercher des régularités « mathématiques » dans les choses de notre monde. « Si donc le christianisme est responsable de la Science moderne, c'est le dogme chrétien de l'Incarnation qui en porte la responsabilité exclusive. » Elle veut dire : la possibilité pour le Dieu éternel d'être réellement présent dans le monde temporel.<sup>45</sup> Le célèbre philosophe des sciences, Alfred North Whitehead, est aussi d'avis que la naissance de la science moderne avait besoin de la Chrétienté et son attachement à la rationalité de Dieu.<sup>46</sup>

<sup>43</sup> « The light stuff », New Scientist, 20 Nov. 2004, p.31-33

<sup>44</sup> Alexandre Kojève, *L'origine de la Science moderne*, in «Mélanger Alexandre Koyré, II. L'aventure de l'esprit »

<sup>45</sup> J.I Packer dans « Knowing God » met en garde les chrétiens dont l'esprit se brouille sous l'effet d'un scepticisme moderne promu par les sciences, la philosophie et la théologie même, cherchant à nier l'action directe et complète de Dieu dans ce monde.

<sup>46</sup> Cité par A.J. Smith, *Under the influence*, Zondervan, Grand Rapids Michigan 2001

### Cavité sous terre

Par gravimétrie on peut déceler l'existence de cavités souterraines.

- Calculer le champ de gravitation  $g_0$  de la terre sans cavité et le champ de gravitation  $g_1$  au-dessus d'une cavité sphérique de rayon  $R$  dont le centre est à la profondeur  $d > R$ .
- Supposons qu'on puisse mesurer le champ de gravitation avec une précision  $(g_0 - g_1)/g_0 = 10^{-6}$  et qu'on veuille détecter une cavité juste au-dessous du sol ( $R=d$ ). Quelle est la plus petite cavité qu'on puisse détecter ? (Rayon de la Terre : 6380 km)

### Champ de gravitation dans la terre

Considérer la terre comme un ensemble compact de sphères concentriques. Utiliser un argument géométrique pour montrer que le champ à l'intérieur d'une coquille sphérique est nul. Il reste alors que seules les coquilles sphériques pour lesquelles le point considéré est extérieur contribue au champ en ce point. Calculer le champ dans la terre en fonction de la distance au centre.

### Satellite

Un satellite tourne autour de la terre sur une orbite circulaire à une distance  $r$  du centre de la terre.

- Quelles sont les forces et les accélérations ?
  - Calculer la vitesse en fonction de  $r$ .
  - Vérifier dans ce cas particulier la troisième loi de Kepler
  - Ariane a lancé un satellite dans une orbite circulaire à une distance  $h = 200$  km au-dessus du sol. Quelles sont la vitesse et la période de révolution du satellite ?
- Masse de la terre  $M = 6 \times 10^{24}$  kg ;  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kgs<sup>2</sup>

### Champ de gravitation dans la terre

Considérer la terre comme un ensemble compact de sphères concentriques. Utiliser un argument géométrique pour montrer que le champ à l'intérieur d'une coquille sphérique est nul. Il reste alors que seules les coquilles sphériques pour lesquelles le point considéré est extérieur contribuent au champ en ce point. Calculer le champ dans la terre en fonction de la distance au centre.

$$\text{Pour } r < R : (R \text{ rayon de la terre}) \quad g = G \frac{m_{\text{sphère}}}{r^2} = G \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3} \rho G r$$

$$\text{Pour } r > R : \text{ la Terre est assimilable à un point matériel, } g = G \frac{m_{\text{sphère}}}{r^2} = G \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{r^2}$$

## ***Les forces en électromagnétisme***

Traditionnellement, un cours d'introduction à l'électromagnétisme fait suite au cours de mécanique. Bien qu'il soit naturel d'établir un répertoire de quelques forces, on ne peut dans le cas de l'électromagnétisme, qu'évoquer des lois de forces fondamentales sans en donner le sens profond.

### Force de Coulomb

Deux charges  $q_1$  et  $q_2$  exercent l'une sur l'autre une force

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

avec  $\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$ .

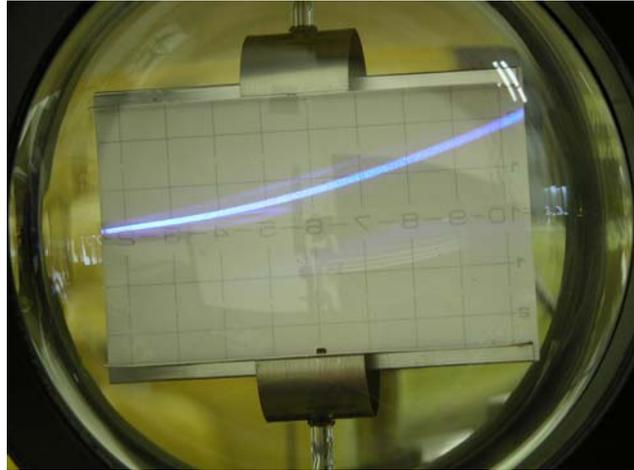
La charge de l'électron vaut environ  $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Le coefficient de  $\frac{\hat{r}}{r^2}$  vaut donc, pour deux électrons,  $2 \cdot 10^{-28} \text{ Nm}^2$ . La force d'attraction gravitationnelle entre les deux électrons est aussi proportionnelle à  $\frac{\hat{r}}{r^2}$ . Comme la masse de l'électron est de  $9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , le coefficient de proportionnalité pour la gravitation vaut  $5 \cdot 10^{-71} \text{ Nm}^2$ . Les forces électrostatiques sont donc typiquement très supérieures aux forces gravitationnelles !

### Champ électrique

La notion de champ électrique est introduite formellement dans le cadre d'un cours d'électromagnétisme. On peut, ici, évoquer un champ électrique par analogie avec le champ de la gravitation. Un ensemble de charges produit un champ électrique  $\mathbf{E}$ . Une charge  $q$  dans ce champ électrique  $\mathbf{E}$  subit une force :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

On peut créer un champ  $\mathbf{E}$  approximativement uniforme en chargeant les plaques d'un condensateur plan. La dynamique d'une charge dans un champ uniforme est alors analogue à la chute d'un corps dans le champ de la pesanteur. En particulier, la trajectoire est parabolique.



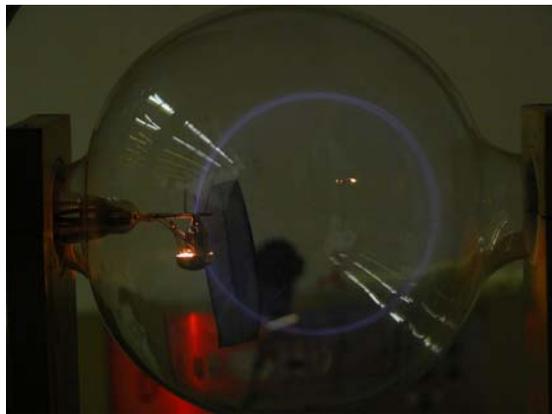
La déflexion d'un faisceau d'électrons dans un champ électrique. Le faisceau d'électron rase une plaque phosphorescente. Les deux pièces métalliques en haut et en bas de l'image sont polarisées à 3 kV pour produire le champ électrique déviant le faisceau.

### Force de Lorentz

Dans un champ d'induction  $\mathbf{B}$  une particule de charge  $q$ , de vitesse  $\mathbf{v}$  subit une force

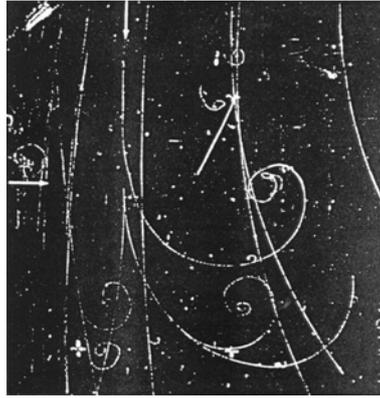
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

On note que la force est perpendiculaire à la vitesse. Par conséquent, la force de Lorentz ne travaille pas et l'énergie cinétique de la particule est constante. (voir chapitre « travail, énergie, puissance »)

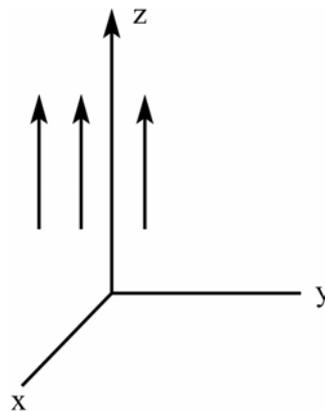


Déviations hélicoïdale d'un faisceau d'électrons dans un tube cathodique de forme sphérique. Le faisceau est rendu visible par la présence d'un gaz à pression faible. Le point lumineux est la cathode générant le faisceau d'électrons. Des bobines de Helmholtz (pas visible sur la photo) produisent le champ magnétique normal au plan de l'image.

Des trajectoires du même type étaient aussi observées dans les chambres à bulles qui étaient utilisées dans les expériences de physique des particules élémentaires.



On examine ci-dessous les équations du mouvement d'une particule de masse  $m$ , de charge  $q$ , dans un champ d'induction  $\mathbf{B}$  uniforme et constant. On choisit l'axe  $z$  le long du champ, alors  $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{e}_z$  avec  $B$  constant.



La deuxième loi de Newton fournit :

$$m \dot{\mathbf{v}} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Pour simplifier les écritures, on pose :  $\boldsymbol{\omega} = \frac{q \mathbf{B}}{m}$  constant.

L'équation du mouvement devient

$$\dot{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

On reconnaît ici la même forme que l'équation du mouvement circulaire uniforme  $\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ . L'équation du mouvement de la particule chargée dans un champ d'induction uniforme exprime donc le fait que  $\mathbf{v}$  est en rotation à la vitesse angulaire constante

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{q \mathbf{B}}{m}$$

En particulier,  $|\mathbf{v}|$  est constant.

Pour analyser la trajectoire, on pose les conditions initiales :

$$t=0, \quad x = x_0, \quad z = z_0, \quad y = y_0$$

$$v_x = 0, \quad v_y = v_1, \quad v_z = v_{z0}$$

Projetons l'équation vectorielle du mouvement sur un système d'axes cartésiens :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & v_x & 0 \\ \mathbf{j} & v_y & 0 \\ \mathbf{k} & v_z & B \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{v}_x = \omega v_y$$

$$\dot{v}_y = -\omega v_x$$

$$\dot{v}_z = 0 \Rightarrow v_z = v_{z0}$$

Cette dernière équation s'intègre immédiatement :

$$z(t) = z_0 + v_{z0} t$$

Dans le plan (x,y), nous avons par dérivation:

$$\ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$

$$v_x = A \sin \omega t$$

$$v_y = A \cos \omega t$$

Comme  $v_y(0) = v_1 = A$ ,  $v_y = v_1 \cos \omega t$  et  $v_x = v_1 \sin \omega t$ , d'où :

$$x(t) = -\frac{v_1}{\omega} \cos \omega t + C$$

$$x(0) = x_0 = C - \frac{v_1}{\omega} \Rightarrow C = x_0 + \frac{v_1}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_1}{\omega} - \frac{v_1}{\omega} \cos \omega t$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t$$

La projection sur le plan (x,y) de la trajectoire a la propriété :

$$\left( x - x_0 - \frac{v_1}{\omega} \right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2}$$

C'est un cercle ! Le rayon est donné par

$$r = \frac{v_1}{\omega} = \frac{m v_1}{q B}$$

Cette grandeur peut avoir son importance quand on considère des expériences de physique du solide dans des matériaux très purs à basses températures, ou dans des matériaux dont au moins une dimension est de l'ordre du nanomètre, appelés des 'nanostructures'. Pour avoir un ordre de grandeur du rayon r, on prendra des électrons avec :

$$v_1 = 10^6 \text{ m/s} \quad B = 1 \text{ Tesla}$$

Alors:

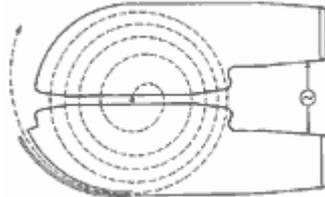
$$r = \frac{9 \times 10^{-31} \cdot 10^6 \text{ m/s}}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \text{ Tesla})}$$

Il vient :  $r = 5.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Comme les protons ont une masse environ mille fois plus grande, le rayon pour des protons à la même vitesse dans le même champ serait mille fois plus grand.

Enfin, on note que le temps pour parcourir un demi-cercle vaut :

$$\frac{\pi r}{v_1} = \frac{\pi m}{q B}$$

Il est indépendant de  $v$ . Cette propriété est à la base du principe de fonctionnement des accélérateurs de ions ou de particules appelés des *cyclotrons*. Deux cavités en forme de D sont polarisées pour accélérer les particules à chaque demi-tour. Malgré le changement de vitesse, le temps entre deux passages entre les deux cavités est constant. Il est possible d'atteindre des énergies cinétiques de l'ordre de  $10^6$  eV, et cela, sans appliquer  $10^6$  Volts !



Une particule accélérée forme une spirale depuis le centre, la courbure est donnée par le champ magnétique, à chaque passage entre les deux demi-cercles, la particule reçoit une accélération par un champ.<sup>47</sup>

### Cyclotron

Une particule de masse  $m$ , de charge  $q$ , se déplace dans un champ magnétique uniforme  $B$  parallèle à  $Oz$ . Une force  $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$  s'exerce alors sur la particule. La pesanteur est négligée.

- Etablir les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes. Que peut-on dire du mouvement selon  $Oz$  ?
- Montrer que la seconde loi de Newton peut s'écrire sous la forme  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ . Définir le terme  $\vec{\omega}$ .
- En déduire que l'énergie cinétique  $K = \frac{1}{2}mv^2$  est une constante du mouvement.
- Démontrer que les mouvements selon  $Ox$  et  $Oy$  sont harmoniques.
- Démontrer que le mouvement selon  $Oxy$  est circulaire.

### Tube cathodique

Une particule sans masse de charge  $q$  se déplace sous l'effet d'un champ électrique vertical  $E$ , produit par un condensateur chargé.

- Etablir les équations du mouvements de la particule.
- Celle-ci pénètre dans le condensateur de longueur  $L$  avec une vitesse initiale horizontale  $V$ . Calculer l'angle de sortie de la particule.

<sup>47</sup> <http://www.aip.org/history/lawrence/first.htm>

## **Modèles de forces de frottement**

### Le concept de force

La deuxième loi de Newton pourrait paraître comme une définition du concept de force :

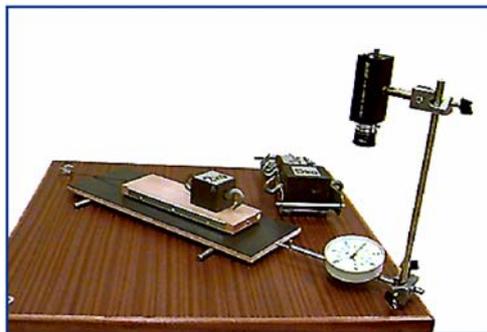
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Ce serait une définition précise, mais complètement inutile, car on aurait défini gratuitement une grandeur physique. Feynman déclare :<sup>48</sup> " The glory of mathematics is that we do not have to say what we are talking about" ! Prenez l'exemple de la géométrie euclidienne, nous dit-il. On peut l'utiliser pour mesurer les dimensions d'un terrain et ça marche plutôt bien ! La question de savoir si la notion abstraite de ligne droite s'applique ou non dans l'expérience n'est pas une question qui peut être résolue par la pensée pure, elle nécessite le test par l'expérience.

*Il s'avère que les forces ont une certaine simplicité, et ainsi la loi de Newton est un bon programme pour analyser la Nature. La force de gravitation donne une indication claire que nous sommes sur une bonne voie ! Toutefois, dans un grand nombre de situations, les forces en présence n'ont pas d'expressions simples. C'est tout particulièrement le cas des forces de frottement. Il faut alors accepter de travailler avec des modèles assez approximatifs. Ce chapitre présente les deux modèles courants de forces de frottement, le modèle dit « de frottement sec » et celui du frottement « visqueux ».*

### Les frottements secs

Ch. A. Coulomb (1785) traita de l'action d'une surface sur un solide. Depuis ces travaux, on comprend qu'on se doit de distinguer a) la friction statique, b) la friction avec glissement.

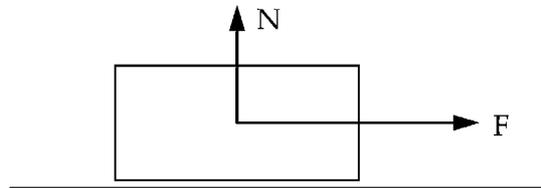


Démonstration d'auditoire : Une plaque de bois glisse sur une surface lisse et sèche. Des poids sont posés sur la plaque de bois. On mesure la force maximale de traction sans glissement, puis la force de traction pour maintenir une vitesse constante de glissement, en fonction du lest.

<sup>48</sup> d'après Feynman 12-1

a) *friction statique*

On considère d'abord le solide immobile sur une surface. Il subit une force de réaction  $N$ . Alors le solide subit aussi une force de frottement tangente à la surface,  $F$ .



En supposant que le solide subisse aussi une force de traction tangente à la surface  $T$ , la force  $F$  s'ajustera pour qu'il n'y ait pas de glissement. Cette situation peut se maintenir jusqu'au point où la force  $F$  atteint une valeur maximale  $F_{\max}$ . Au-delà de cette valeur, il y a décrochement et glissement. Cette force maximale est donnée par

$$F_{\max} = \mu_s N$$

$\mu_s$  est appelé le **coefficient de frottement statique**. On peut imaginer la mesure suivante de  $\mu_s$ . L'objet est posé immobile sur un plan incliné. En inclinant le plan de plus en plus, la pesanteur tend de plus en plus à faire glisser l'objet.

Comme il n'y a pas de glissement,

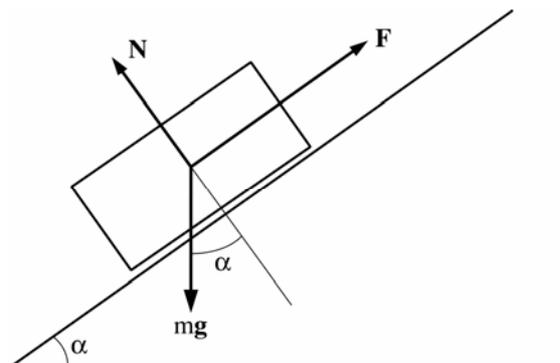
$$\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{P} = 0$$

L'angle critique  $\alpha_s$  est celui qui provoque le décrochement, le début de la glissade. A cet angle  $F = F_{\max} = \mu_s N$ . En projetant le bilan des forces sur la normale et la tangente à la surface on a :

$$N = P \cos(\alpha_s)$$

$$\mu_s N = P \sin(\alpha_s)$$

d'où on tire  $\mu_s = \operatorname{tg}(\alpha_s)$



## b) Frottement avec glissement

Pour un solide sur une surface, subissant une force de réaction de la surface  $N$ , glissant à une vitesse  $\mathbf{v}$  mesurée par rapport à la surface, la force de frottement est donnée par

$$\mathbf{F} = -\mu_c |N| \left( \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right)$$

$\mu_c$  est appelé coefficient de frottement cinétique.

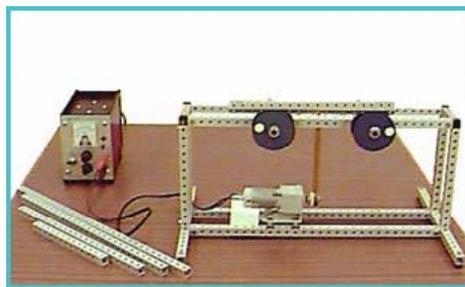
Pour mesurer  $\mu_c$  on peut imaginer une expérience où le solide, soumis à la pesanteur, glisse à vitesse constante sur un plan incliné d'un angle  $\alpha_c$ . On a encore  $N + \mathbf{F} + \mathbf{P} = 0$  et en projetant les forces comme avant :  $\mu_c = \tan(\alpha_c)$ . Dans ce modèle, on suppose que  $\mu_c$  est indépendant de la vitesse. Pour raffiner ce modèle, on pourrait par exemple consulter des données expérimentales telles que celles de "Tribophysics" de Nam P. Suh, Prentice-Hall.<sup>49</sup>

Le coefficient de frottement cinétique est toujours plus petit que le coefficient statique. On en fait l'expérience par exemple lorsqu'on fait glisser une armoire sur un sol lisse.

Actualités : une équipe de chercheurs en matériaux est parvenue à créer des surfaces avec un coefficient cinétique de frottement extrêmement bas ( $\mu_c = 0.001$ )<sup>50</sup>

Deux expériences illustrent des conséquences statique et dynamique de la différence entre le coefficient statique et dynamique.

Démonstration d'auditoire : un manche de bois est soutenu par deux doigts tendus, placés d'abord aux extrémités du manche. Les doigts sont lentement rapprochés. On observe qu'un seul doigt glisse à la fois. Ce phénomène est une conséquence de la différence des coefficients cinétique et statique de frottement.<sup>51</sup>

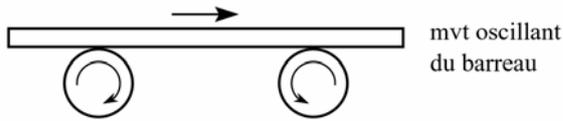


Démonstration d'auditoire : une variante dynamique de l'effet ci-dessus est le mouvement pendulaire d'une barre posée sur deux roues en rotation uniforme de même vitesse angulaire, mais de sens opposés.

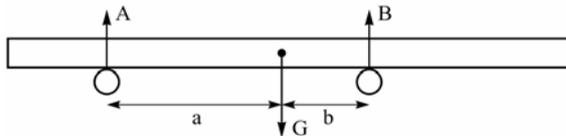
<sup>49</sup> Pour un problème de frottement résolu en détail, voir par exemple *W. M. Wehbein, Am J. Phys. 60(1), Jan. 1992, p. 57.*

<sup>50</sup> *Physical Review B48, 10583(1993)*

<sup>51</sup> *Sommerfeld A., Lectures on Theoretical Physics, Mechanics, vol 1, Academic Press, parag. II.14*



Analysons le cas statique. Désignons par A et B les forces de réaction que les doigts exercent sur la barre.



Comme la barre reste horizontale à une hauteur fixe, la somme des forces extérieures exercées sur la barre doit être nulle (théorème de la quantité de mouvement) :

$$A + B = G \quad \Rightarrow \quad B = G - A$$

Comme la barre ne tourne pas, son moment cinétique est nul, donc sa dérivée est nulle aussi. Alors, le théorème du moment cinétique impose que la somme des moments extérieurs doit s'annuler.<sup>52</sup>

$$A \cdot a - B \cdot b = 0$$

En appliquant alors le résultat du théorème de la quantité de mouvement, il vient :  $A \cdot a - (G - A) b = 0$ , soit,  $A = \frac{b}{a+b} \cdot G$ . Alors :  $B = \frac{a}{a+b} \cdot G$ .

On considère maintenant les forces de frottement exercées sur la barre. Partons avec  $A > B$ . Le point B glisse vers A jusqu'à ce que  $F_{B,c} = F_{A,s}$ , ou  $\mu_c \cdot B = \mu_s \cdot A$ . A ce point, le glissement de A s'enclenche. Or :

$$F_{B,c} = \mu_c \cdot a \cdot \frac{G}{a+b} \quad F_{A,s} = \mu_s \cdot b \cdot \frac{G}{a+b}$$

Notons  $b_1$  la valeur critique de b à laquelle  $F_{B,c} = F_{A,s}$ . On a  $\frac{a}{b_1} = \frac{\mu_s}{\mu_c} > 1$

Quand A se met en mouvement,  $F_{A,C} < F_{A,S}$ , c'est  $F_B$  qui doit diminuer pour maintenir la barre à l'arrêt. En fait, B s'arrête de glisser.

### Actualités :

- de nos jours, les frottements sont étudiés à l'échelle quasi atomique, c'est ce qu'on appelle la « nanotribologie ». <sup>53</sup>

<sup>52</sup> nous verrons en dynamique du solide que le théorème du moment cinétique s'applique en prenant le centre de masse comme point de référence pour définir le moment cinétique et les moments de force.

<sup>53</sup> Physics Today Sept 1998, p. 22

- des recherches récentes tentent de mettre en évidence la possibilité d'états d'interactions entre deux surfaces telles que les surfaces se déplacent l'une par rapport à l'autre sans frottement. Le terme « supralubrification » est construit pour suggérer une analogie avec la supraconductivité (le transport de charges sans dissipation).<sup>54</sup>

### Les frottements visqueux

Dans les fluides à très basses vitesses, la force de frottement subie par un solide se déplaçant à la vitesse  $v$  par rapport au fluide peut être approximée par :

$$F = -k\eta v$$

où le coefficient  $\eta$  est la viscosité,  $k$  est un facteur géométrique ( $k=6\pi R$  pour une sphère de rayon  $R$ ). A plus grande vitesse, le frottement devient proportionnel au carré de la vitesse :

$$F = -C_x \frac{1}{2} \rho_f v^2 S \left( \frac{v}{v} \right)$$

$\rho_f$  est la densité du fluide,  $S$  l'aire de la projection du solide sur le plan normal à la vitesse.  $C_x$  est appelé le coefficient de traînée.  $C_x$  vaut 1.3 pour un disque dont l'axe est dans la direction du mouvement.  $C_x$  vaut 0.45 pour une sphère, 0.03 pour une demi-sphère prolongée par un cône, et typiquement 0.03 pour une aile d'avion.<sup>55</sup>

### Actualités:

Par une méthode appelée analyse dimensionnelle, on peut estimer la dissipation dans un flux turbulent. Des physiciens ont pu récemment apporter une amélioration à cette estimation de principe par des considérations sur les propriétés analytiques du champ de vitesse.<sup>56</sup>

<sup>54</sup> Phys. Rev. Letter, 78(1997) 1448 ou Physics World May 1997

<sup>55</sup> Gruber, *Mécanique générale*, PPUR

<sup>56</sup> « Upper bound on friction in turbulent flow », Physics World, Dec. 1992, et Phys. Rev. Lett. 69, 1648 (1992)

### Plot sur disque

Un disque horizontal tourne à une vitesse angulaire constante  $\omega$ .

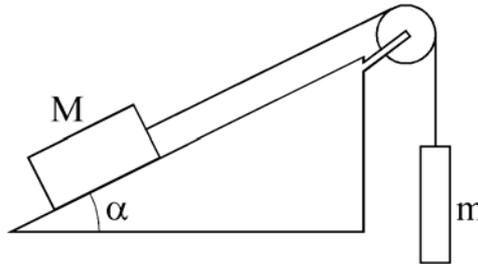
- Où faut-il placer un morceau de bois de masse  $m$  sur le disque pour qu'il ne glisse pas, si le coefficient de frottement statique est  $\mu_s$  ?
- Ecrire les équations différentielles du mouvement du morceau de bois lorsqu'il y a glissement (frottement sec de coefficient  $\mu_d$ ).

### Plot sur plan incliné

Un plot de masse  $M$  sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  est relié par un câble sans masse à une masse  $m$ , suspendue dans le vide. Les frottements sont secs.

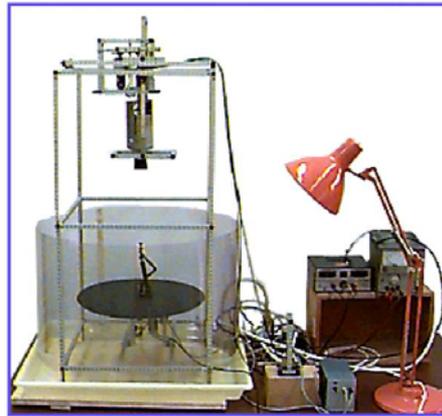
- Quelle masse  $m$  faut-il pour vaincre le frottement statique de coefficient  $\mu_s$  ?

En mouvement, le plot subit une force de frottement sec de coefficient  $\mu_d$ . Etablir les équations du mouvement.



## Mouvement relatif

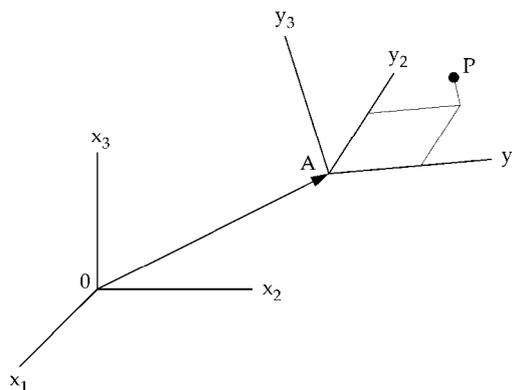
Ce chapitre permet de prendre conscience de l'importance de la notion de référentiel, en particulier la nécessité de choisir d'appliquer la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à un référentiel d'inertie. Ainsi, on va chercher à établir des équations du mouvement pour des référentiels qui ne sont manifestement pas des référentiels d'inertie. Ce sont des référentiels en rotation ou en accélération uniforme par rapport à un référentiel d'inertie.



Démonstration d'auditoire : le mouvement radial de gouttes d'eau sortant d'une buse horizontale en rotation uniforme. Quand le mouvement est observé par une caméra en rotation uniforme avec la buse, les gouttes apparaissent toutes sur un jet courbé unique !

### Cinématique avec un référentiel relatif

Il est commode, dans le cadre de cette approche, d'appeler le référentiel d'inertie "le référentiel absolu", et l'autre, le "référentiel relatif".



On adopte la notation systématique suivante :

$0 x_1 x_2 x_3$  : référentiel absolu

$P$  : un point matériel quelconque

$A y_1 y_2 y_3$  : référentiel relatif

$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  : vecteurs unités de  $A y_1 y_2 y_3$

L'évolution temporelle des vecteurs unités  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  peut être décrite par un vecteur instantané de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ , selon le théorème d'Euler. Les formules de Poisson spécifient cette évolution :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}_i \quad i = 1,2,3$$

Souvent le référentiel  $0 y_1 y_2 y_3$  est préféré parce que le mouvement peut y être simple ou parce que c'est celui-là qui nous importe, comme par exemple dans le cas de la dynamique terrestre. Par conséquent, on veut faire usage des vitesses et accélérations par rapport au référentiel  $A y_1 y_2 y_3$ . Cependant, la 2<sup>ème</sup> loi de Newton n'est valable que pour une accélération par rapport à un référentiel d'inertie ! Ici, il s'agit du référentiel  $0 x_1 x_2 x_3$ . Il faut donc établir les relations entre les vitesses et accélérations absolues, c'est-à-dire mesurées par rapport à  $0 x_1 x_2 x_3$  et les vitesses et accélérations relatives, c'est-à-dire mesurées par rapport à  $A y_1 y_2 y_3$ . On y arrive en dérivant par rapport au temps la relation :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$$

où on pose :  $\mathbf{AP} = \sum_i y_i \mathbf{e}_i$ . Les  $y_i$  sont les composantes de  $\mathbf{AP}$  dans le référentiel relatif. Par conséquent, la vitesse relative de  $P$ ,  $\mathbf{V}_r(P)$  est donnée par:

$$\mathbf{V}_r(P) = \sum_i \dot{y}_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

La vitesse absolue  $\mathbf{V}_a(P) = \frac{d}{dt} \mathbf{OP}$  vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a(P) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{OA}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{AP}) \\ &= \mathbf{V}_a(A) + \frac{d}{dt} \left( \sum_i y_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= \mathbf{V}_a(A) + \sum_i \dot{y}_i \mathbf{e}_i + \sum_i y_i \dot{\mathbf{e}}_i \\ &= \mathbf{V}_a(A) + \mathbf{V}_r(P) + \sum_i y_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_a(P) = \mathbf{V}_a(A) + \mathbf{V}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}$$

Pour trouver l'accélération, dérivons la vitesse absolue par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a(P) &= \frac{d\mathbf{v}_a(P)}{dt} = \\ &= \frac{d\mathbf{v}_a(A)}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r(P)}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}) \end{aligned}$$

En développant la vitesse relative en termes des composantes et en utilisant les relations de Poisson, il vient plusieurs termes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a(P) = & \\ & \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) \\ & + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) \\ & + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}) \\ & + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} \end{aligned}$$

Il faut veiller à bien comprendre le sens des différentes grandeurs introduites. Certains termes de l'accélération portent un nom.

La composante  $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r(P)$

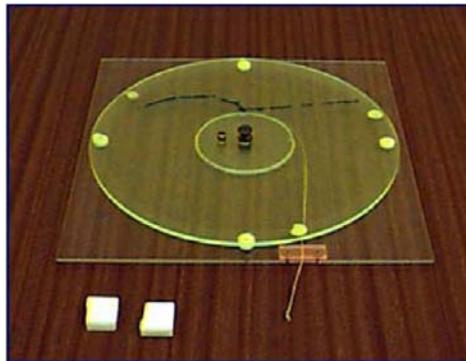
est appelée l'accélération de Coriolis.

Le terme  $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP})$

est appelé l'accélération centripète.

Le groupe de termes  $\mathbf{a}_a(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP}$

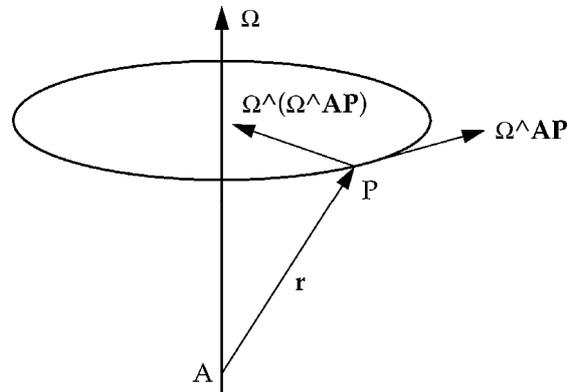
est appelé l'accélération d'entraînement. C'est l'accélération du point du référentiel  $0 y_1 y_2 y_3$  coïncidant avec P à l'instant considéré.



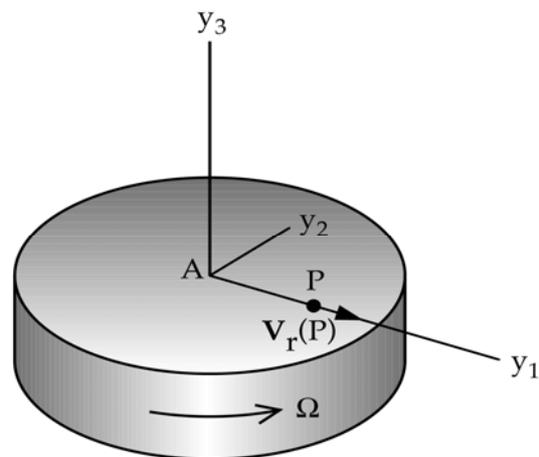
Démonstration d'auditoire : un petit montage permet de repérer point par point dans un référentiel en rotation, la position d'un point matériel qui suit une trajectoire rectiligne dans le référentiel de l'auditoire. La courbe du jet d'eau observée avec la caméra rotative est précisément celle obtenue par ce marquage.

## Accélérations centripète et de Coriolis

Pour développer un sens physique de l'accélération de Coriolis et de l'accélération centripète qui interviennent dans le mouvement relatif, on considère quelques situations simples.



Si un point matériel est au repos dans un référentiel relatif, dont le point A est immobile, et dont la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  est constante, alors le seul terme non nul de notre expression de l'accélération est **l'accélération centripète**. Or le mouvement du point matériel dans le référentiel absolu est un mouvement circulaire uniforme ! La nouvelle formule exprime donc, comme il se doit, l'accélération centripète du point matériel.



On considère ensuite un mouvement radial sur un carrousel, c'est-à-dire un référentiel en rotation uniforme, avec le point A fixe. On peut prendre  $O = A$ . Le mouvement considéré est donné par :

$$y_1(t) = v_r \cdot t$$

$$y_2(t) = y_3(t) = 0$$

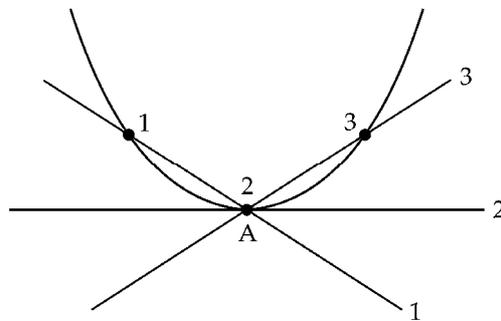
L'accélération absolue de ce point matériel peut s'obtenir en projetant les grandeurs vectorielles sur le repère porté par  $A y_1 y_2 y_3$  :

$$\mathbf{v}_r(P) = \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_r(P) = \sum_i \ddot{y}_i \mathbf{e}_i = 0$$

$$2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 & v_r \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & \Omega & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega v_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\Omega v_r t \cdot \mathbf{e}_2) = -\Omega^2 v_r t \cdot \mathbf{e}_1$$

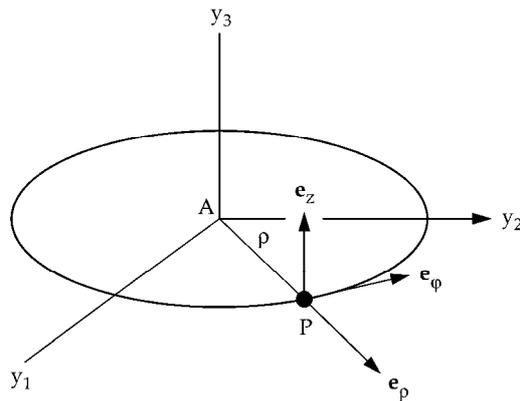
On peut se représenter le terme  $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$  dans ce cas particulier en examinant la trajectoire par rapport à un référentiel absolu, quand le point matériel est près du centre du carrousel.



Trois "photos" prises du repère attaché au sol montreraient la position du diamètre parcouru à trois instants successifs.

Le temps 2 est celui où le point passe par le centre du carrousel. La trajectoire est courbée, l'accélération est par conséquent vers la gauche par rapport au sens de la marche. Ainsi, on voit que l'accélération de Coriolis dont nous devons tenir compte dans le mouvement relatif (au référentiel tournant) rend compte de la courbure de la trajectoire telle qu'elle est perçue du référentiel absolu.

Finalement, on considère un homme qui court à vitesse constante  $v$  au bord d'un carrousel de rayon  $R$ , qui est en rotation à vitesse angulaire constante  $\omega$ . On peut envisager deux approches. D'une part, on peut se dire que l'homme décrit un mouvement circulaire uniforme, à la vitesse  $v + \omega R$ . Son accélération est centripète et vaut  $\frac{(v + \omega R)^2}{R}$ . Du formalisme du mouvement relatif, on tire en utilisant comme repère celui associé aux coordonnées cylindriques définies dans le plan  $A y_1 y_2$  :



$$\mathbf{v}_r = v \cdot \mathbf{e}_\phi \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{-v^2}{R} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{a}_{cor} = -2 \cdot \omega \cdot v \cdot \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{a}_{cen} = -\omega^2 \cdot R \cdot \mathbf{e}_\rho$$

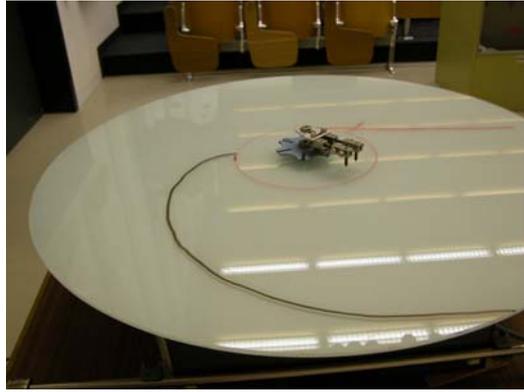
$$\mathbf{a}_{tot} = -\left( \frac{v^2}{R} + \frac{2 \cdot \omega \cdot R \cdot v}{R} + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} \right) \cdot \mathbf{e}_\rho$$

$$= -\frac{(v + \omega \cdot R)^2}{R} \cdot \mathbf{e}_\rho$$

Comme il se doit, on obtient la même accélération absolue !

### Dynamique dans les référentiels en mouvement

On considère le jet d'eau (photo au début du chapitre) depuis le référentiel en rotation avec la plateforme, on voit que le jet d'eau n'est pas droit. On observe la même courbure de la trajectoire quand on marque avec un feutre la trajectoire d'un plot qui glisse sur une plaque de verre en rotation. Dans cette expérience, on peut négliger le frottement. Le plot quand il est relâché part en ligne droite, la droite est tangente au cercle qu'il décrivait quand il était retenu ! La trace sur le verre est aussi une courbe. Cette courbe semble s'éloigner du cercle que décrivait le plot quand il était retenu ! C'est de cette constatation que viennent les hésitations des étudiants à qui on demande où va une masse qui tourne, retenue par un fil, quand on lâche le fil.



Avec ce genre d'expérience, il devient clair qu'on ne peut pas appliquer la 2<sup>ème</sup> loi de Newton dans un référentiel en rotation. Il faut appliquer :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_a(P)$$

C'est-à-dire, il faut considérer l'accélération absolue du point matériel. Il est entendu que les forces  $\mathbf{F}$  sont des forces appliquées (pesanteur, gravitation, liaison, frottement, etc...).

Toutefois, il peut être commode d'écrire les équations du mouvement en termes des coordonnées, vitesses, accélérations mesurées dans le référentiel relatif. Il faut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & m \mathbf{a}_a(A) + m \mathbf{a}_r(P) \\ & + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP} + m \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) \\ & + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) \end{aligned}$$

Dans certains traités de mécanique, l'équation du mouvement est considérée comme suit:

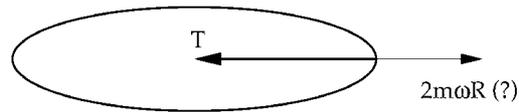
$$m \mathbf{a}_r(P) = \mathbf{F} - \left\{ \begin{array}{l} m \mathbf{a}_a(A) \\ + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) + m \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) \\ + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP} \end{array} \right\}$$

Quand la 2<sup>ème</sup> loi de Newton est écrite de cette manière, l'accélération de Coriolis *apparaît* comme une force. De même l'accélération centripète devient une force centrifuge. Il est essentiel de se souvenir que ces "forces" sont en fait des effets de référentiels accélérés. On les appelle des **forces « d'inertie »**.<sup>57</sup>

Dans le cadre de cette présentation-ci de la mécanique, on évitera cette deuxième façon de présenter les choses. Il se trouve qu'elle introduit trop souvent des erreurs !

L'erreur typique est la suivante. Un étudiant considère un point matériel qui décrit un mouvement circulaire uniforme horizontal. Le point matériel est relié au centre du cercle par un fil sans masse. La vitesse angulaire est  $\omega$ , le rayon  $R$ . Le problème est décrit en coordonnées cylindriques.

<sup>57</sup> Les considérations de physique avancée telle que la gravitation comme un effet de référentiel ne sont pas de mise ici non plus !



L'étudiant introduit, par une habitude contractée ailleurs, une force centrifuge. Ce n'est pas encore faux ! Cela veut dire qu'il se prépare à décrire le point matériel dans un référentiel qui tourne avec le point. Mais il se trompe lorsqu'il utilise les formules de l'accélération en coordonnées cylindriques, car il implique par là qu'il mesure l'accélération dans le référentiel absolu. Pour la direction  $e_\rho$  il écrit l'équation du mouvement :

$$\dot{\phi} = \omega, r = R \Rightarrow$$

$$m(0 - R\omega^2) = -T + m\omega^2 R$$

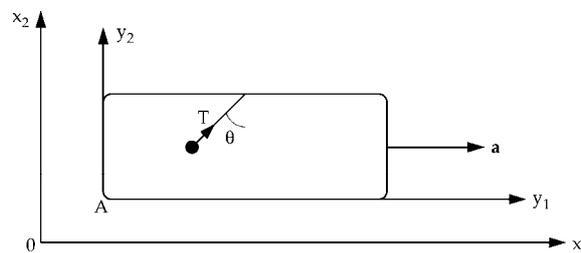
$$\Rightarrow T = 2m\omega^2 R!$$

ce qui est faux ! L'erreur vient de l'utilisation de l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques, avec la supposition implicite que cette accélération est mesurée dans le référentiel absolu. Une démarche acceptable serait d'utiliser des coordonnées cylindriques dans le référentiel en rotation. Dans ce référentiel,  $\dot{\phi} = 0$   $\ddot{\phi} = 0$  et l'équation du mouvement radiale est :

$$0 = -T + m\omega^2 R$$

### Exemples de référentiel en translation non-uniforme

Exemple 1: un train sur une voie horizontale rectiligne a une accélération  $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{a}$  constante. Le pendule est supposé immobile dans le train. Quel est l'angle d'inclinaison du pendule ?



D'abord, décrivons la situation avec un référentiel absolu, le sol. Le pendule a une accélération  $\mathbf{a} = a \hat{x}_1$ . Projetons  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}_a(P)$  sur les axes  $Ox_1x_2$  :

$$ma = -T \sin \theta$$

$$0 = -mg + T \cos \theta$$

On déduit :  $tg\theta = -\frac{a}{g}$

Ensuite, reprenons la même situation en la décrivant par rapport au référentiel du wagon. Il faut écrire l'accélération conformément au formalisme du mouvement relatif :

$$m\mathbf{a}_r(P) + m\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{F}$$

Puisqu'on suppose que le pendule n'oscille pas  $\mathbf{a}_r(P) = 0$ . De plus, on a  $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{a} = a\hat{y}_1$ .

Projetons sur  $A y_1 y_2$  :

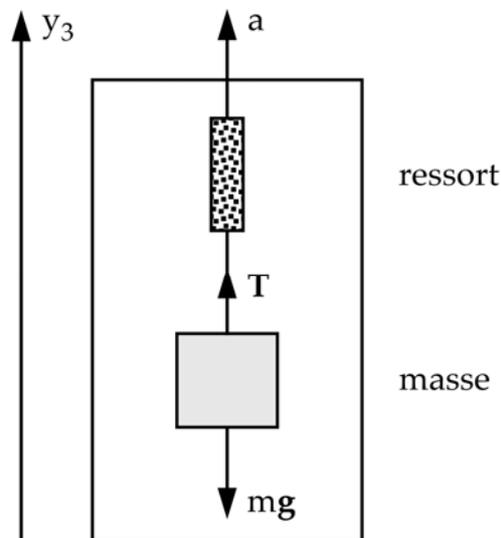
$$0 + ma = -T \sin \theta$$

$$0 = -mg + T \cos \theta$$

Nous avons comme il se doit le même système d'équation.

Exemple 2 : quel est le poids apparent d'une personne dans un ascenseur accéléré ? Convenons que le poids est mesuré en tant que l'extension d'un ressort avec un amortissement approprié pour une telle mesure. Disons que l'ascenseur est accéléré vers le haut. Avec la notation usuelle on a

$$\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{a} = a\hat{y}_3$$



Projetons  $m\mathbf{a}_r(P) + m\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{F}$  sur l'axe  $y_3$  :

$$-mg + T = ma_r + ma$$

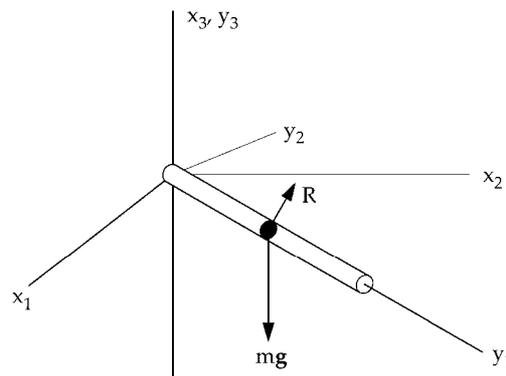
La mesure se fait quand le poids est immobile dans l'ascenseur. Par conséquent, la force de soutien  $T = m(a + g)$ .  $T$  est cette mesure du poids apparent dans l'ascenseur.

### Exemples de référentiel relatif en rotation uniforme

Exemple 1 : Un point matériel pesant de masse  $m$  se déplace sans frottement à l'intérieur d'un tube horizontal tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical. Ce dispositif pourrait être un modèle de centrifugeuse.

Nous choisissons ici de décrire le mouvement par la démarche du mouvement relatif. On pourrait aussi tirer profit de la méthode des coordonnées généralisées.

- référentiel absolu :  $0 x_1 x_2 x_3$
- référentiel relatif :  $0 y_1 y_2 y_3$ , avec  $0 y_1$  le long du tube



La réaction  $\mathbf{R}$  est normale à la surface du tube, mais elle peut avoir une composante horizontale et verticale :

$$\mathbf{R} = R_2 \hat{y}_2 + R_3 \hat{y}_3$$

$$\mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_r = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix}$$

Les contraintes sont

$$y_2 = y_3 = 0$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0$$

On calcule alors les différents termes de l'accélération absolue :

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \left( \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \right) = -\omega^2 y_1 \hat{y}_1$$

$$2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) = 2 \boldsymbol{\omega} \dot{y}_1 \hat{y}_2$$

Les équations du mouvement sont ainsi :

$$m(\ddot{y}_1 - \omega^2 y_1) = 0$$

$$m 2 \omega \dot{y}_1 = R_2$$

$$0 = R_3 - mg$$

La première équation permet de déterminer  $y_1(t)$ . Les deux autres donnent alors la force de liaison  $\mathbf{R}$ . On avait déjà examiné un problème semblable, celui d'un point matériel astreint à se déplacer sur un anneau en rotation. Dans la présente résolution avec le formalisme du

mouvement relatif, on voit apparaître la force de contrainte dans la direction de la rotation comme une conséquence de l'accélération de Coriolis.

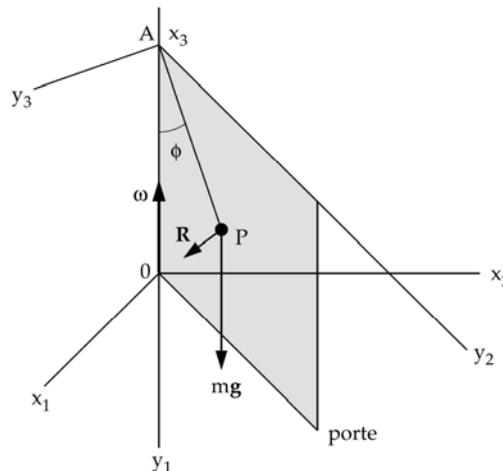
La première équation peut être immédiatement intégrée en multipliant par  $\dot{y}_1$  et en observant que l'expression est une dérivée totale de :

$$\frac{1}{2} \dot{y}_1^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y_1^2 = \text{const.}$$

Cette grandeur n'est pas l'énergie cinétique (signe !). En fait, l'énergie cinétique dans ce système n'est pas conservée ! Il n'y a pas de frottement, certes, mais la force de liaison travaille !

Exemple 2 : un pendule oscille dans le plan d'une porte en rotation uniforme. On choisit ici de résoudre ce problème par la méthode du mouvement relatif, en définissant:

- Référentiel absolu :  $0 x_1 x_2 x_3$
- Référentiel relatif :  $A y_1 y_2 y_3$
- coordonnées cylindriques :  $\rho, \phi, y_3$
- liaisons :  $y_3 = 0, \rho = \ell = \text{constante}$
- rotation de  $A y_1 y_2 y_3$  par rapport à  $0 x_1 x_2 x_3$  :  $\omega = \text{constante}$ .



Ainsi, dans cet exemple, on applique le formalisme du mouvement relatif, en utilisant des coordonnées généralisées relatives au référentiel relatif ! Les projections des vecteurs position, vitesse et accélérations sur le repère associé aux coordonnées cylindriques donnent :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{a}_r = \begin{pmatrix} -\ell \dot{\phi}^2 \\ \ell \ddot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par inspection du graphique, il est possible de poser :  $2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = -2 \omega \dot{\phi} \ell \cos(\phi) \hat{y}_3$ . En cas de doute, il faut passer par les projections. Faisons-le pour le terme centripète :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\phi) \\ -\omega \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega l \sin(\phi) \end{pmatrix} \text{ et}$$

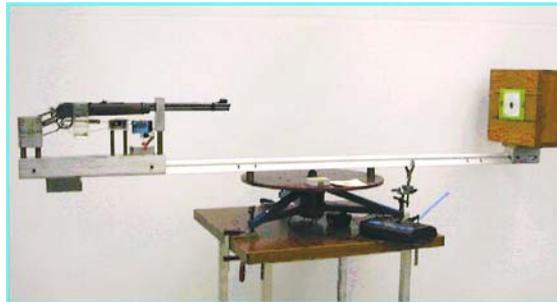
$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\omega^2 l \sin^2(\phi) \\ -\omega^2 l \sin(\phi) \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Appelons R la composante de la force de liaison normale au plan et T la traction du fil du pendule. Les équations du mouvement s'obtiennent après avoir projeté la pesanteur :

$$m \begin{pmatrix} -l \ddot{\phi}^2 - \omega^2 l \sin^2(\phi) \\ l \ddot{\phi} - \omega^2 l \sin(\phi) \cos(\phi) \\ -2\omega \dot{\phi} l \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \cos(\phi) - T \\ mg \sin(\phi) \\ R \end{pmatrix}$$

Ces équations auraient pu être obtenues plus directement en utilisant les coordonnées sphériques dans le référentiel absolu. C'est bien ce qu'il faut : si nous utilisons les mêmes coordonnées pour deux visions, nous devons trouver le même résultat. (attention : en coordonnées sphériques notre  $\omega$  serait un  $-\dot{\phi}$  et notre  $\phi$  serait le  $\theta$  des coordonnées sphériques.)

Exemple 3 : le fusil sur une table tournante.



Démonstration d'auditoire : un fusil est monté sur une table tournante. Quand la table est à l'arrêt, le tir est ajusté au milieu de la cible diamétralement opposée au fusil. Quand la table tourne, le tir n'atteint plus le centre de la cible.

Pour cet exemple, on montre comment une intégration numérique peut être effectuée par Mathematica. Les valeurs numériques des paramètres sont choisies, par exemple :

```
omega=1;R=1;
vo=20;
tmax=2 R/vo;
xo=N[-R];vxo=N[vo];
yo=N[0];vyo=N[xo omega];
```

On demande l'intégration numérique de l'équation du mouvement:

```

ntrajjectory[omega] =
  NDSolve[{
    nx'[t] == omega^2 nx[t] + 2 omega ny'[t],
    ny'[t] == omega^2 ny[t] - 2 omega nx'[t],
    nx[0] == xo, nx'[0] == vxo,
    ny[0] == yo, ny'[0] == vyo,
    {nx, ny}, {t, 0, tmax}][[1]];

```

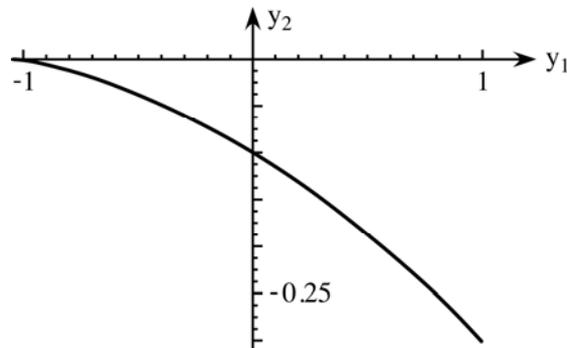
Il suffit alors de demander un graphique:

```

ntrajjectoryPlot[omega] = ParametricPlot[Evaluate[
  {nx[t], ny[t]}/.ntrajjectory[omega]], {t, 0, tmax},
  AxesLabel -> {"x axis", "y axis"}];

```

On obtient pour les valeurs ci-dessus une déviation évidente du tir, vu dans le référentiel de la table tournante :

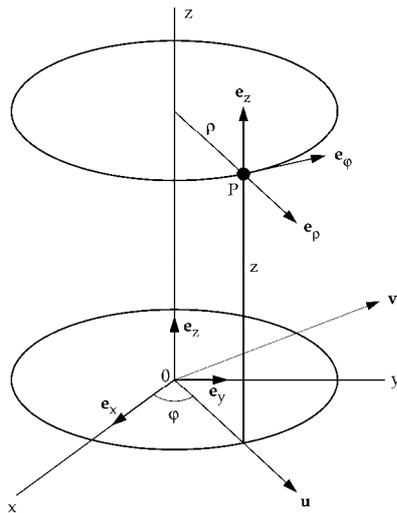


### Interprétation des termes de l'accélération en coordonnées cylindriques comme accélération centripète ou de Coriolis

Il y a des termes de l'accélération en coordonnées cylindriques qui ressemblent à l'accélération centripète ou à l'accélération de Coriolis du mouvement relatif. L'argument ci-dessous montre le lien entre les deux approches et par conséquent l'origine de cette similarité.

Le repère  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  est considéré comme référentiel absolu, le repère  $O, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z}$  comme référentiel en rotation qui suit le point P. Le vecteur de vitesse instantanée de rotation est donc  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_z$

Exprimons la vitesse et l'accélération du point P dans le référentiel  $O, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z}$  en utilisant le formalisme du mouvement relatif.



$$\begin{aligned}
 V_a(P) &= V_r(P) + \Omega \wedge OP \\
 &= (\dot{\rho} \hat{u} + \dot{z} \hat{z}) + \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge (\rho \hat{u} + z \hat{z}) \\
 &= \dot{\rho} \hat{u} + \dot{z} \hat{z} + \rho \dot{\phi} \hat{u} + 0 \\
 &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \hat{z}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule établie pour la vitesse ! Il en va de même pour l'accélération :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_a(P) &= \mathbf{a}_r(P) + \\
 &+ \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OP}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{OP} + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \\
 &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \left( \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge [\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z] \right) + \ddot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge [\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z] + 2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge [\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z] \\
 &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \ddot{z} \mathbf{e}_z + -\rho \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\varphi + 2 \dot{\phi} \dot{\rho} \mathbf{e}_\varphi \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \\
 &+ (\rho \dot{\phi} + 2 \dot{\phi} \dot{\rho}) \mathbf{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

C'est bien la formule déjà établie !

**Fourmi immobile**

Sur la platine d'un tourne-disque en rotation uniforme, une fourmi parcourt un chemin circulaire de telle manière qu'elle apparaisse immobile par rapport au châssis du tourne-disque. Calculer séparément l'accélération de Coriolis et l'accélération centripète dans le référentiel lié à la platine en rotation. Commenter votre résultat.

**Expérience du feutre sur la table tournante**

Note : la friction du feutre sur la table est négligée.

- 1) Décrire la trajectoire du feutre dans un référentiel fixe. La vitesse angulaire du disque central est  $\omega$ .
- 2) La trajectoire marquée sur la table tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  est la trajectoire du feutre vue dans un référentiel attaché à la table. Exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point du référentiel tournant en fonction des coordonnées de ce point dans le référentiel fixe. En déduire les équations horaires du mouvement dans le référentiel tournant. Esquisser la trajectoire.
- 3) Ecrire les équations du mouvement en utilisant les coordonnées, la vitesse et l'accélération mesurées dans le référentiel tournant.
- 4) Montrer que les équations horaires de 2) vérifient les équations du mouvement.

**Le rameur**

Un rameur remonte une rivière. Il tire une bouteille de gin attachée par une corde à son bateau. Lorsqu'il passe sous un pont, sa bouteille se détache et dérive en aval. Le rameur le réalise une heure plus tard. Il fait demi-tour et récupère sa bouteille à un kilomètre en aval du pont. Quelle est la vitesse du fleuve?

**La Boîte suspendue**

Un point matériel pesant de masse  $m$  est situé au fond d'une boîte de masse  $M$ ,  $M \gg m$ . La boîte est suspendue à un ressort de constante  $k$ . La boîte est initialement tirée vers le bas et lâchée avec une vitesse nulle. On néglige ce qui se passe avec la masse  $m$  pour déterminer le mouvement de la boîte  $M$ .

Déterminer si le point matériel décolle du fond de la boîte en examinant la force de réaction de la boîte sur le point matériel.

Référentiel absolu :  $Ox_1x_3$

Référentiel relatif :  $Gy_1y_3$

Forces sur la boîte ( $m$  négligée) : poids  $M\vec{g}$  et tension du ressort  $\vec{T} = -kx_3\hat{x}_3$ .

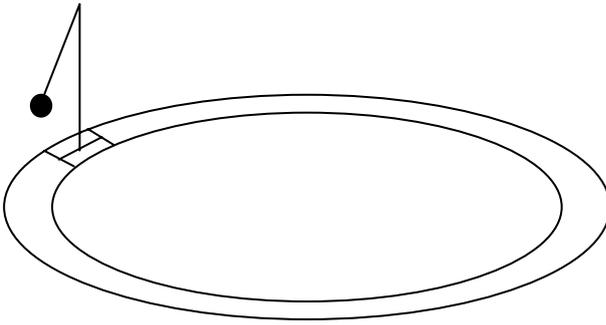
Forces sur  $m$  : poids  $m\vec{g}$  et contrainte du plancher de la boîte  $\vec{N}$ .

**Mouvement de la boîte :**

Loi de Newton :  $M\vec{a}_a(G) = M\vec{g} + \vec{T}$ , ou encore

$$M\ddot{x}_3 = -Mg - kx_3 \quad (1)$$

### Pendule dans train circulaire



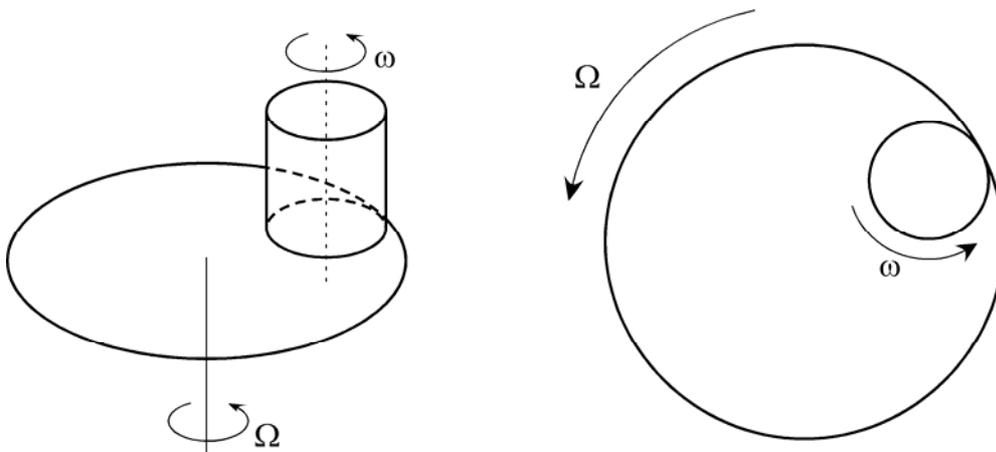
Un pendule de masse  $m$ , de longueur  $L$ , est suspendu au plafond d'un wagon d'un train astreint à un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\Omega$  constante. Un mécanisme assure que le pendule demeure dans un plan perpendiculaire à la direction du train : il oscille donc dans une section verticale du wagon. On suppose que les dimensions et les vitesses du problème sont telles que le pendule est incliné quand il est en position stable par rapport au wagon.

- Spécifier le choix de référentiel et le système de coordonnées.
- Exprimer l'accélération pour ces coordonnées.
- Etablir le bilan des forces.
- Obtenir les équations du mouvement en termes de coordonnées définies par rapport au wagon.
- Quel est l'angle d'inclinaison du pendule en régime stationnaire (pas d'oscillation) ?

### Moulin à bille

Une bille, considérée comme un point matériel de masse  $m$ , est astreinte à se déplacer sur la paroi d'un cylindre qui tourne à la vitesse de rotation  $\omega$  relative à une plate-forme tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ . La bille est pesante et reste au fond du cylindre. Les vitesses angulaires  $\omega$  et  $\Omega$  sont constantes.

- Choisir un système de coordonnées pour repérer la position de la bille.
- Exprimer la vitesse absolue de la bille quand elle est fixe sur la paroi du cylindre.
- Exprimer la vitesse absolue de la bille dans le cas où la bille roule sur les parois (toutefois, on considère la bille comme un point matériel).
- Exprimer l'accélération de la bille dans le cas général.
- Etablir le bilan des forces, supposant qu'il n'y a pas de frottement.
- Ecrire les équations du mouvement.

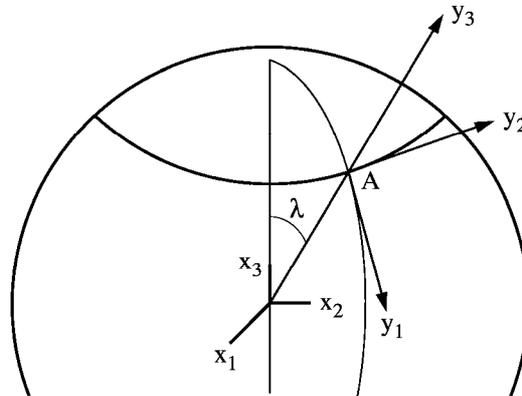


## Mouvement par rapport à la Terre

On considère ici l'application de l'approche du "mouvement relatif" à la description de mouvements à la surface de la Terre, quand la Terre ne peut plus être considérée comme un référentiel d'inertie. Il se peut que l'expérience soit subtile, comme celle du pendule de Foucault. Dans ce cas, une grosse déviation de la prédiction qu'on ferait, si on considérait la Terre comme un référentiel d'inertie, est observée. On peut aussi avoir une expérience banale, comme la chute libre, mais faite avec une mesure si précise qu'on observe une déviation qui ne devrait pas être si la Terre était un référentiel d'inertie. Observateurs terriens, nous comprenons bien dans ces exemples l'intérêt de choisir un référentiel qui n'est pas celui où l'accélération peut être prise comme accélération "absolue", par exemple un système d'étoiles.

Les exemples traités ici sont aussi une occasion de présenter une méthode de résolution par « *perturbation* », plus connue de nos jours dans le contexte de la mécanique quantique. Pour rendre compte de la situation physique à la surface de la Terre, il y a lieu de considérer l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques des expériences. La vitesse angulaire de rotation de la Terre est de l'ordre de  $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et son rayon vaut  $r = 6.35 \times 10^6 \text{ m}$ . Le déplacement vertical typique à la surface de la Terre est très petit en comparaison du rayon de la Terre et le temps caractéristique est bien plus court que la période de rotation de la Terre. Il faudra exprimer ces ordres de grandeurs en faisant des approximations.

Pour commencer, on pose qu'on veut appliquer  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_a(P)$  tout en utilisant la Terre comme référentiel. Il faut donc qu'on exprime l'accélération absolue en termes des vitesses et les accélérations mesurées dans un référentiel lié à la Terre. Le dessin précise le choix des référentiels.



référentiel absolu :  $Ox_1x_2x_3$ , lié à des étoiles  
référentiel relatif :  $Ay_1y_2y_3$ , lié à la Terre, A à sa surface

Comme  $\dot{\omega} = 0$ , la formule de l'accélération en mouvement relatif donne :

$$m[\mathbf{a}_a(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r] = m\mathbf{g}$$

On considère ici une force appliquée, la pesanteur, pour fixer les idées. Comme A suit un mouvement circulaire uniforme,  $\mathbf{a}_a(A) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA})$ . Par conséquent :

$$m\mathbf{a}_r(P) = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{OA} + \mathbf{AP})) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P)$$

Pour des expériences typiques à la surface de la Terre, la hauteur est toujours négligeable comparée au rayon de la Terre. Cela veut dire que nous pouvons négliger  $\mathbf{AP}$  devant  $\mathbf{OA}$  :

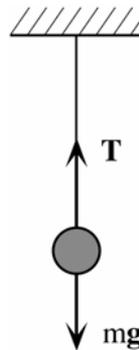
$$m\mathbf{a}_r(P) = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA}) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P)$$

Ci-dessous, on considère d'abord le fil à plomb pour montrer que le deuxième terme, qui est constant, peut être en quelque sorte « absorbé » dans le premier, en définissant un  $\mathbf{g}$  effectif.

Le fil à plomb

Il s'agit d'une expérience statique dans le référentiel de la Terre, donc :

$$\mathbf{a}_r(P) = 0 \quad \mathbf{v}_r(P) = 0$$



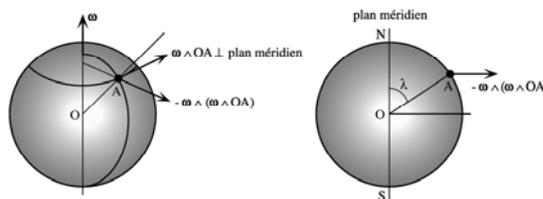
Les équations du mouvement deviennent dans ce cas :

$$0 = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA})$$

$$\mathbf{T} = - \{ m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA}) \}$$

$\mathbf{T}$  peut être considérée comme une mesure d'un  $\mathbf{g}_{eff}$  avec :

$$\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA})$$



Aux pôles,  $\boldsymbol{\omega} // \mathbf{OA}$ , donc l'effet de la rotation de la Terre est nul, bien évidemment. Ailleurs :

$$\| \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OA}) \| = \omega^2 \cdot r \cdot \sin \lambda$$

L'angle  $\lambda$  désigne la co-latitude. L'ordre de grandeur de cette correction est donné par :

$$\omega^2 r = 0.03 \text{ ms}^{-2}$$

L'importance relative de cette correction vaut tout au plus :

$$\frac{\omega^2 r}{g} = 0.3\%$$

Ainsi, dorénavant, « g » sera entendu comme étant redéfini avec cette correction. Les équations du mouvement de la dynamique terrestre ont alors la forme :

$$\mathbf{a}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{g} - 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(\mathbf{P})$$

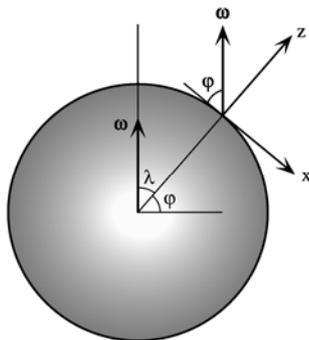
Ici, une seule force, la pesanteur, est mentionnée. L'extension de l'équation à plusieurs forces est évidente.

### Mouvement vertical

On considère une chute libre ou un tir vertical. Pour alléger les écritures, les coordonnées cartésiennes dans le référentiel relatif  $A y_1 y_2 y_3$  seront dénotées  $(x, y, z)$ . Les deux mouvements peuvent s'exprimer par les conditions initiales :  $\mathbf{v}_r(t=0) = v_0 \hat{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{r}(t=0) = z_0 \hat{\mathbf{z}}$ . On projette l'équation du mouvement obtenue dans le repère  $(A, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ , en utilisant à l'angle de latitude  $\varphi$  au lieu de la co-latitude  $\lambda$ .

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \varphi \\ 0 \\ \omega \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{rel}(\mathbf{P}) = 2 \begin{vmatrix} \cdot & -\omega \cos \varphi & \dot{x} \\ \cdot & 0 & \dot{y} \\ \cdot & \omega \sin \varphi & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \dot{y} \omega \sin \varphi \\ 2 \dot{x} \omega \sin \varphi + 2 \dot{z} \omega \cos \varphi \\ -2 \omega \cos \varphi \dot{y} \end{pmatrix}$$

- ①  $\ddot{x} = +2 \dot{y} \omega \sin \varphi$
- ②  $\ddot{y} = -2 \dot{z} \omega \cos \varphi - 2 \dot{x} \omega \sin \varphi$
- ③  $\ddot{z} = +2 \omega \cos \varphi \dot{y} - g$

On peut intégrer la première équation :

$$\dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} = + 2 (y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}) \omega \sin \varphi$$

$$\dot{x} = + 2 \omega \sin \varphi \cdot y$$

La troisième équation fournit :

$$\dot{z}(t) - \underbrace{\dot{z}(0)}_{v_0} =$$

$$+ 2 \omega \cos \varphi \left( y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0} \right) - g t$$

③ est devenu  $\dot{z} = v_0 - g t + 2 \omega \cos \varphi \cdot y$ . On peut inscrire ces expressions de  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$  dans la deuxième équation:

$$\ddot{y} = - 2 [ v_0 - g t + 2 \omega \cos \varphi y ] \omega \cos \varphi$$

$$- 2 [ + 2 \omega \sin \varphi y ] \omega \sin \varphi$$

② devient  $\ddot{y} = - 2 \omega \cos \varphi ( v_0 - g t ) - 4 \omega^2 y$

Comme  $\omega$  est très petit, on néglige tous les termes en  $\omega^2$  :

$$\ddot{y} \approx - 2 \omega \cos \varphi ( v_0 - g t )$$

Ceci permet d'intégrer simplement, compte tenu des conditions initiales :

$$y(t) = - 2 \omega \cos \varphi \left( \frac{1}{2} v_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3 \right)$$

$y(t)$  représente une déviation de la verticale. Celle-ci est de l'ordre de grandeur de  $\omega$ . On peut alors la substituer dans l'expression de  $\dot{z}$ . Il apparaît un terme en  $\omega^2$  qui doit être négligé pour maintenir la cohérence des approximations :

$$\dot{z} = v_0 - g t$$

$$\underbrace{- 4 \omega^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{2} v_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3 \right)}_{\text{négligé}}$$

Par intégration, on tire :

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ainsi, dans la verticale, tout se passe comme si la Terre était fixe, à cet ordre d'approximation. On estime maintenant la déviation de la verticale dans le cas du tir vertical vers le haut, partant de  $z_0 = 0$ . Le sommet de la trajectoire est atteint quand  $\dot{z} = 0$ , donc  $t = \frac{v_0}{g}$ . Le temps de la

montée plus la descente vaut:  $T = \frac{2 v_0}{g}$ . Par conséquent, la déviation dans la direction  $y$  vaut :

$$y(T) = - 2 \omega \cos \varphi \left[ \frac{1}{2} v_0 \frac{4 v_0^2}{g^2} - \frac{1}{6} g \frac{8 v_0^3}{g^3} \right]$$

$$= -2 \omega \cos \varphi \left[ \frac{4}{6} \frac{v_0^3}{g^2} \right] = -\frac{4}{3} \omega \cos \varphi \frac{v_0^3}{g^2}$$

Comme  $y(T) < 0$ , il s'agit d'une déviation vers l'ouest. Une vérification expérimentale de l'effet de la rotation de la Terre a été conduite pour une chute verticale. La dérivation ci-dessus permet de montrer qu'une chute verticale donne lieu à une déviation vers l'est. Une chute sur une hauteur de 158 m à la latitude  $\varphi = 51^\circ$  produit une déviation de 2.8 cm.<sup>58</sup>

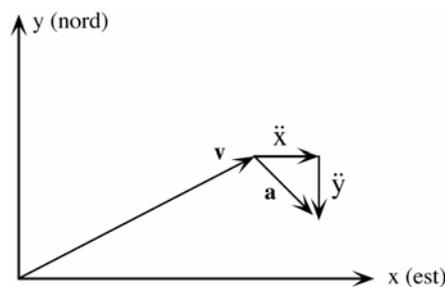
## Mouvement horizontal

Il vient des équations du mouvement avec la contrainte  $z = \text{constante}$  :

$$\textcircled{1} \quad \ddot{x} = +2 \omega \dot{y} \sin \varphi$$

$$\textcircled{2} \quad \ddot{y} = -2 \omega \dot{x} \sin \varphi$$

Un petit croquis permet de se convaincre que ces équations prévoient une déviation vers la droite quand on regarde dans le sens de  $v$ , si  $\sin \varphi > 0$ , c'est-à-dire si le mouvement se passe dans l'hémisphère Nord. La déviation est à gauche dans l'hémisphère Sud.



L'intégration de l'équation  $\textcircled{1}$  fournit :

$$\int_0^t \ddot{x} dt = \int_0^t 2 \omega \dot{y} \sin \varphi dt$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 2 \omega \sin \varphi (y(t) - y(0))$$

Avec les conditions initiales :  $x(0) = y(0) = 0$ , il reste :

$$\dot{x}(t) = 2 \omega \sin \varphi y(t) + \dot{x}(0)$$

Mais on ne connaît pas encore  $y(t)$ . On passe donc à l'équation  $\textcircled{2}$ . Si  $\omega = 0$ , alors  $y(t) = \dot{y}(0) \cdot t$ , car le mouvement est rectiligne, uniforme et horizontal. Si  $\omega \neq 0$ , alors  $y(t)$  diffère de  $\dot{y}(0) \cdot t$  par une quantité proportionnelle à  $\omega$ , au premier ordre d'approximation. Cette correction, quand elle est substituée dans l'équation pour  $\dot{x}(t)$  fournit un terme proportionnel à  $\omega^2$ . Alors, on néglige cette correction pour ne garder que des termes du premier ordre en  $\omega$  :

$$\dot{x}(t) = 2 \omega \sin \varphi [\dot{y}(0) \cdot t] + \dot{x}(0)$$

Cette approximation peut être appelée un *calcul de perturbation au premier ordre*. Nous pouvons procéder de manière similaire pour l'équation  $\textcircled{2}$

<sup>58</sup> Gruber, Mécanique Générale, PPUR

$$\dot{y}(t) = -2\omega \sin\varphi [\dot{x}(0) \cdot t] + \dot{y}(0)$$

On peut alors intégrer encore une fois :

$$x(t) = \omega \sin\varphi \dot{y}(0) t^2 + \dot{x}(0) \cdot t$$

$$y(t) = -\omega \sin\varphi \dot{x}(0) t^2 + \dot{y}(0) \cdot t$$

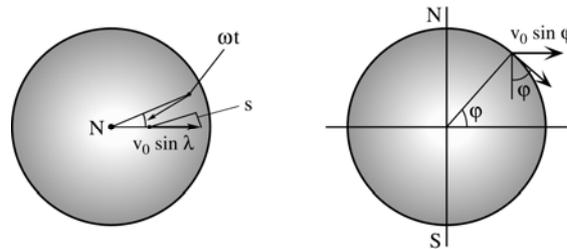
Pour mieux révéler le sens physique de cette approximation, on note  $s$  la déflexion au temps  $t$  par rapport à la trajectoire rectiligne :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x - \dot{x}(0) \cdot t)^2 + (y - \dot{y}(0) \cdot t)^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 \sin^2\varphi t^4 (\dot{y}(0)^2 + \dot{x}(0)^2)} = \\ &= \omega t \cdot \sin\varphi \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

Avec  $v_0 = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2}$ , la déviation  $s$  s'exprime comme :

$$s = \omega t \cdot \sin\varphi v_0 \cdot t$$

Le résultat est écrit de cette manière pour faire apparaître l'angle de rotation de la terre et la vitesse dans le plan parallèle au plan de l'équateur. On exprime ainsi le résultat naturel qu'aurait déduit un observateur regardant la Terre depuis un point « au-dessus » du pôle Nord dans un référentiel absolu.



Interprétation géométrique pour un tir vers le Sud : la vitesse dans le plan normal à l'axe de la Terre vaut  $v_0 \sin\varphi$

### Pendule de Foucault

Foucault (1819 – 1868) veut montrer que la Terre n'est pas un référentiel d'inertie. Il fait construire un pendule de 67 m de long, avec une masse de 28 kg, suspendue dans le Panthéon, à Paris. La rotation du plan d'oscillation du pendule peut se comprendre immédiatement, en considérant un petit pendule monté sur une plateforme en rotation.



Le plan d'oscillation est fixe dans le référentiel du laboratoire. Par contre, il semble tourner quand il est vu du référentiel de la plateforme en rotation.

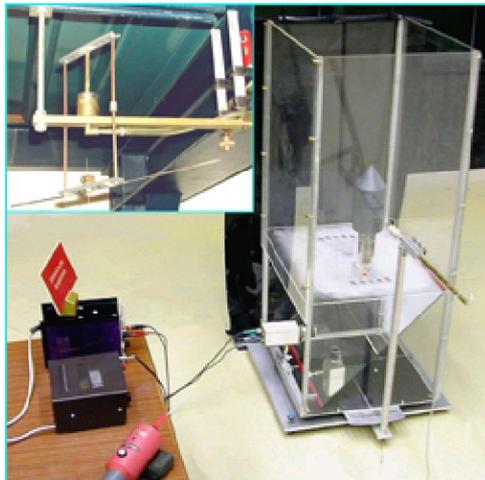
Les considérations du mouvement vertical à la surface de la Terre permettent d'estimer la vitesse de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault. A tout moment de

l'oscillation du pendule, il y a déflexion vers la droite. On applique la formule pour la déviation, prenant le temps zéro comme étant n'importe quel moment de l'oscillation :

$$s = \omega \sin \varphi v(0) \cdot t^2$$

avec  $t$  considéré infiniment petit pour que la vitesse horizontale puisse être considérée constante pendant le temps  $t$ . La déviation angulaire vaut :  $\Delta\theta = \frac{s}{v_0 t} = \omega \sin \varphi \cdot t$  et par conséquent la

vitesse angulaire est donnée par :  $\frac{\Delta\theta}{t} = \dot{\phi} = \omega \sin \varphi$ . En 10 minutes  $\Delta\theta$  vaut  $\sin \varphi \cdot \omega \cdot 10 \text{ minutes}$  soit :  $\sin \varphi \cdot 7 \times 10^{-5} \times 10 \times 60 = \sin \varphi \cdot 0.04 \text{ radian} = \sin \varphi \cdot 2.4 \text{ degrés}$ .



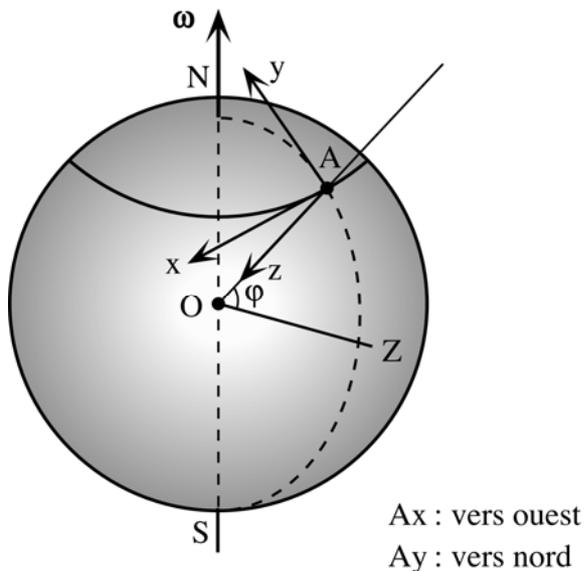
Les auditorios de physique de l'EPFL ont mis au point un pendule de Foucault relativement court. Pour obtenir une bonne mesure de la déviation angulaire, quelques précautions expérimentales sont à observer. Une diode laser suspendue au bout du pendule permet de suivre les oscillations sur un verre dépoli marqué d'une échelle graduée en angles. Le pendule est lancé depuis une position latérale dans laquelle il est retenu par un électro-aimant (tige horizontale sur le côté du boîtier transparent).

Le pendule est monté sur un cadre soutenu par un coussin d'air. On distingue le fil du pendule, le cadre comportant une calotte sphérique reposant sur un coussin d'air alimenté par un tube en plastic.

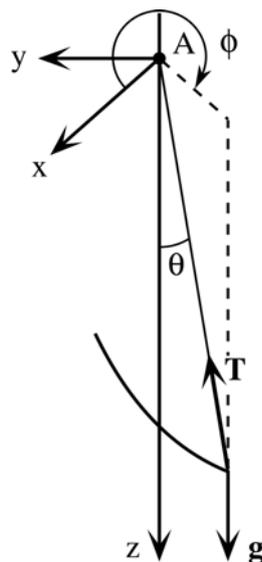


### Le pendule de Foucault en coordonnées sphériques

Les outils développés jusqu'ici suggèrent très naturellement une description plus rigoureuse du pendule de Foucault en utilisant le référentiel relatif à la Terre et des coordonnées sphériques dans ce référentiel. Il s'agit là d'un petit exercice de virtuosité dans l'application du formalisme introduit ! On commence par redéfinir le système d'axes  $Axyz$  de manière que la définition habituelle des coordonnées sphériques puisse être employée.



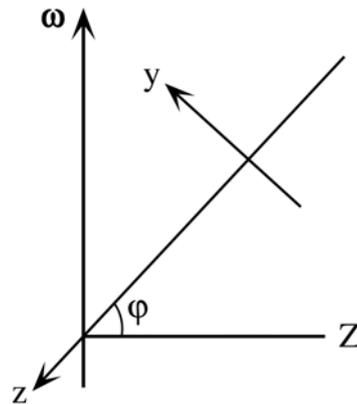
Ainsi, on utilisera les coordonnées **sphériques**  $(r, \theta, \phi)$  dans ce référentiel  $Axyz$  pour repérer le mouvement du pendule. L'angle  $\phi$  marquera la rotation du plan d'oscillation du pendule !



Le système d'axe  $Axyz$  est en rotation uniforme, de vitesse angulaire  $\omega$  par rapport à un référentiel absolu. Le formalisme du mouvement relatif aboutit à :

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{T} + m \mathbf{g} - 2 m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r.$$

On a une contrainte géométrique :  $L = r$ . On fait les approximations suivantes, qui reflètent la dynamique particulière au pendule de Foucault. Les angles d'oscillation sont petits. ( $\theta \ll 1$ )  $\dot{\phi}$  est de l'ordre de  $\omega$ , donc est petit aussi. Par conséquent, tous les termes en  $\theta^2$ ,  $\theta\omega$ ,  $\omega^2$ ,  $\dot{\phi}\omega$ ,  $\dot{\phi}^2$  peuvent être négligés. Il est difficile de projeter le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  directement sur le repère des coordonnées sphériques. Il est alors plus facile de passer par des étapes intermédiaires. On peut faire un dessin auxiliaire pour faire une première projection :

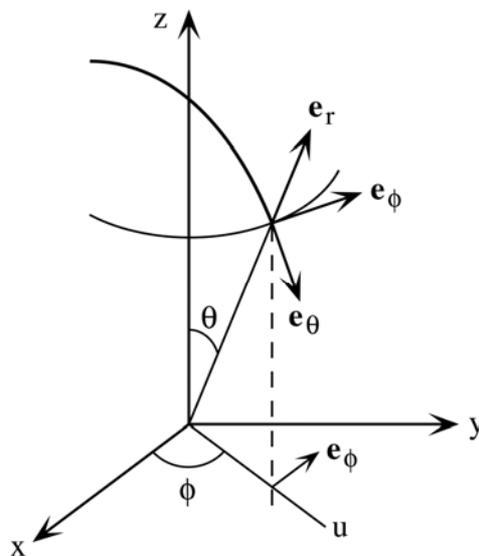


Ainsi, on peut écrire :

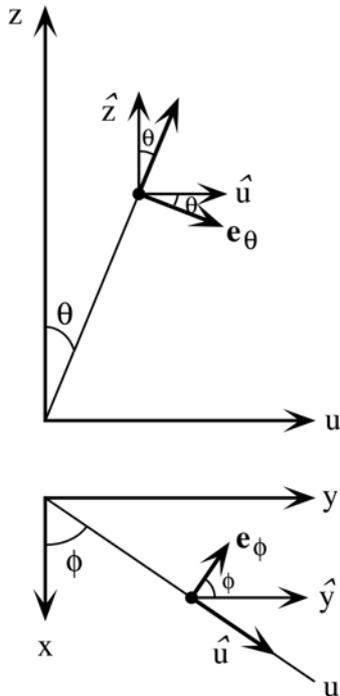
$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \sin \varphi \hat{z} + \omega \cos \varphi \hat{y}$$

$$\mathbf{g} = +g \hat{z}$$

Des dessins auxiliaires permettent d'établir les relations nécessaires entre les vecteurs  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  et le repère  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ .



De ce graphe général, on peut extraire deux dessins plans :



Par inspection des figures on obtient:

$$\hat{z} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\hat{u} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\hat{y} = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + \sin \phi \hat{\mathbf{u}} =$$

$$= \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$$

Les approximations annoncées impliquent :

$$\hat{z} = \mathbf{e}_r - \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\hat{y} = \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{g} \simeq g \mathbf{e}_r - g \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{T} = -T \mathbf{e}_r$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \sin \varphi [\mathbf{e}_r - \theta \mathbf{e}_\theta]$$

$$+ \omega \cos \varphi [\sin \phi \mathbf{e}_\theta + \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \phi \mathbf{e}_\phi]$$

$$= (-\omega \sin \varphi + \omega \theta \cos \varphi \sin \phi) \mathbf{e}_r$$

$$+ (\omega \sin \varphi \theta + \omega \cos \varphi \sin \phi) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \omega \cos \varphi \cos \phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{\omega} \simeq -\omega \sin \varphi \mathbf{e}_r$$

$$+ \omega \cos \varphi \sin \phi \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \omega \cos \varphi \cos \phi \mathbf{e}_\theta$$

Pour trouver le terme de Coriolis, on peut ne garder qu'un terme :

$$\mathbf{v}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\simeq L \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + L \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \simeq L \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

$$\cong -\omega L \dot{\theta} \sin \varphi \mathbf{e}_\phi - \omega L \dot{\theta} \cos \varphi \cos \phi \mathbf{e}_r$$

L'accélération par rapport à la Terre est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( r \sin \theta \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi \\ &= \left( -L \dot{\theta}^2 - L \theta^2 \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( L \ddot{\theta} - L \theta \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( L \theta \ddot{\phi} + 2 L \dot{\theta} \dot{\phi} \right) \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{a}_r &\approx L \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \left( L \theta \ddot{\phi} + 2 L \dot{\theta} \dot{\phi} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Finalement, les équations du mouvement sont établies pour les trois directions du repère.

$$\mathbf{e}_r : 0 = -T + m g + 2 m \omega L \dot{\theta} \cos \varphi \cos \phi$$

On trouve tout naturellement, à l'ordre d'approximation prescrit :  $T \cong m g$ .

$$\mathbf{e}_\theta : m L \ddot{\theta} = -m g \theta$$

Dans cette direction, on a l'équation familière du pendule :  $\ddot{\theta} = \frac{-g}{L} \theta$ .

$$\mathbf{e}_\phi : L \theta \ddot{\phi} + 2 L \dot{\theta} \dot{\phi} = -2 \omega L \dot{\theta} \sin \varphi$$

Il existe une solution avec  $\ddot{\phi} = 0$ , pour laquelle  $\dot{\phi} = \omega \sin \varphi$ . Les équations du mouvement autorisent aussi, bien sûr des mouvements plus complexes comme on les observe en pratique, quand le pendule n'oscille pas dans un plan.

## Discussion qualitative, équilibres et petites oscillations

Les principes de conservation (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie mécanique totale) fournissent des relations entre les dérivées premières des variables définissant la position de points matériels. Du signe de l'énergie cinétique, on peut déduire un domaine de valeurs possibles des variables de position. Il peut être fort utile d'obtenir une appréhension qualitative du mouvement, pour différentes raisons. En particulier, avant de faire recours à une intégration numérique, il est important de connaître la nature de la trajectoire, par exemple si elle est liée ou infinie. Il faut aussi savoir judicieusement choisir les conditions initiales pour avoir un type de mouvement ou un autre. Il faut aussi avoir une idée de la sensibilité du système aux conditions initiales. L'approche présentée ici consiste à tirer profit des constantes du mouvement pour inférer de telles propriétés du mouvement.

### Mouvement rectiligne où la force dépend de la position.

Soit  $x$  la coordonnée sur l'axe où le mouvement a lieu,  $F(x)$  la force que subit un point matériel de masse  $m$ . Si cette force dérive du potentiel  $V(x)$ , on a la conservation de l'énergie donnée par :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

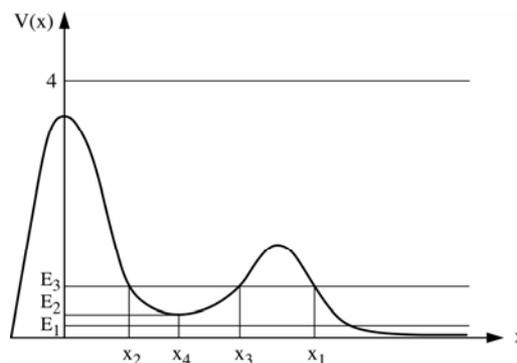
Comme  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 > 0$  en tout temps et pour tout  $x$ , on doit avoir :

$$E - V(x) \geq 0 \Rightarrow E \geq V(x)$$

pour tout point de la trajectoire. La valeur de  $E$  est déterminée par les conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2} m v_o^2 + V(x_o)$$

où  $v_o$  est la vitesse quand le point matériel est à  $x_o$ . On considère la forme ci-dessous pour le potentiel  $V(x)$ .



Il est parfois utile de se faire une idée intuitive du mouvement en assimilant ce problème à celui d'une bille pesante se déplaçant sans frottement sur un fil dans un plan vertical, la hauteur du fil en tout point  $x$  étant  $H(x) = V(x)/mg$ .

Si l'énergie est au niveau (voir figure) :

$E_1$  : le point marqué  $x_1$  est un point d'arrêt, le point matériel peut aller à l'infini depuis ce point dans la direction des  $x$  positifs,

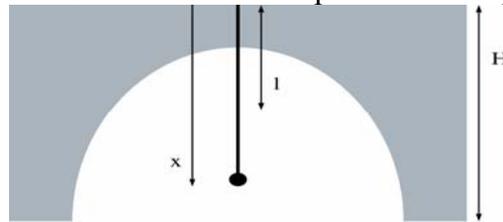
$E_2$  : le point matériel est en position d'équilibre, au point marqué  $x_4$ ,

$E_3$  : oscillations entre les points marqués  $x_2$  et  $x_3$ ,

$E_4$  : le point matériel passe par-dessus le profil de potentiel.

On se souviendra que là où  $V(x)$  est grand,  $E - V(x)$  est petit, et par conséquent la vitesse est faible. Quand  $E = V(x)$ , il y a un point d'arrêt.

Exemple 1 : une personne saute d'un pont, attachée à un élastique ("bungie jumping"). La personne sautant du pont est considérée comme un point matériel pesant de masse  $m$ .



L'énergie potentielle due à la pesanteur est

$$V_p = mg(H - x)$$

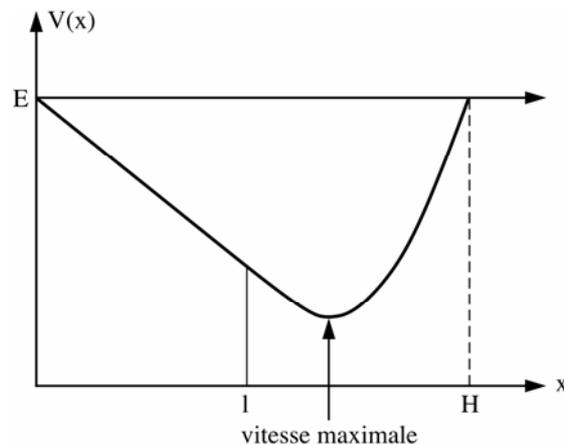
L'énergie potentielle de l'élastique, supposé de constante  $k$ , est

$$V_r = \frac{1}{2}k(x - l)^2$$

L'énergie potentielle totale est :

$$V_{tot} = mg(H - x) + \frac{1}{2}k(x - l)^2$$

Son allure est la suivante :



La hauteur optimale du pont est celle qui correspond au niveau d'énergie  $E$  pour lequel le sauteur se retrouvera à vitesse nulle au bas du pont. On suppose qu'il se laisse tomber du pont sans vitesse verticale initiale. Le maximum de sa vitesse a lieu au moment où le potentiel est minimum, c'est-à-dire quand

$$\frac{d}{dx} V_{tot} = mg(-1) + \frac{1}{2} k 2(x-l) = 0$$

$$k(x-l) = mg$$

C'est le point d'accélération nulle. Ce n'est pas, comme certains pourraient le penser, la hauteur à la distance  $l$  du pont, quand l'élastique commence à agir.

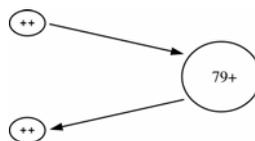
### Exemple 2 : la rétro-diffusion de Rutherford

Jusqu'en 1910, on s'imaginait que l'atome était formé d'un nuage de charges positives comportant la majorité de la masse, et d'électrons immobiles dans cette masse. Ainsi, la taille de la charge positive était présumée de l'ordre de  $10^{-8}$  cm, la taille d'un atome. C'était le modèle de J.J. Thompson pour lequel il n'existait aucune preuve expérimentale.<sup>59</sup>



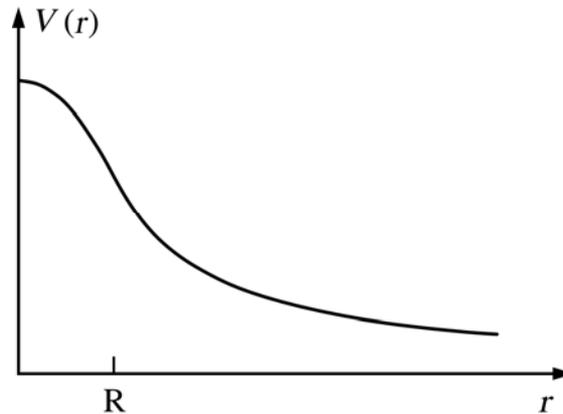
A cette époque, Rutherford demande à Geiger de faire l'expérience suivante : envoyer des particules  $\alpha$  issues de la décomposition du polonium sur une cible constituée d'une feuille d'or de 100 à 400 nm d'épaisseur.

Dans une première observation, Geiger voit les particules passer tout droit. Lors d'une 2<sup>ème</sup> observation, il observe que certaines des particules reviennent en arrière. "A peine croyable !" pensait Rutherford, "comme si on tirait un boulet de 15" sur un mouchoir et le boulet revenait vers vous !" Un calcul d'ordre de grandeur montre que la particule alpha fait des collisions avec des charges positives *très localisées*. C'était la démonstration de l'existence du noyau.



<sup>59</sup> (<http://hep.ucsb.edu/people/hnn/physicists.html>)

Pour une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée, le potentiel électrostatique en fonction du rayon a l'allure suivante :



Un résultat d'électrostatique permet de dire que le potentiel électrostatique de l'interaction entre une charge  $Ze$  et une particule  $\alpha$  de charge  $2e$  vaut à son maximum :  $\frac{3}{2} \frac{(Ze)(2e)}{R}$ . On peut le trouver en calculant la force de Coulomb en suivant la même démarche que celle présentée pour le champ de la pesanteur. La force dans la sphère est proportionnelle à  $r$ . Elle va comme  $1/r^2$  à l'extérieur. On peut déduire le potentiel qui donne cette force en imposant un potentiel nul à l'infini et la continuité du potentiel à la surface de la sphère. Il en découle le maximum annoncé. Comme les particules  $\alpha$  rebondissent, il faut que l'énergie cinétique soit plus petite que ce maximum:

$$R \leq \frac{3}{2} \frac{2Ze^2}{\frac{1}{2}mv^2} =$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \leq \frac{3}{2} \frac{2Ze^2}{R} \quad R \leq 10^{-12} \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{(100)(4.8 \times 10^{-10})^2}{10^{-8} (6.6 \times 10^{-24} \text{ g})(1.6 \times 10^9 \text{ cm/s})^2}$$

Cette valeur est 10'000 fois plus petite que le rayon atomique !

### Orbites dans potentiel gaussien

La nécessité de faire une discussion qualitative peut être vue dans l'analyse des mouvements possibles pour un point matériel soumis à un potentiel de la forme :

$$U(r) = -V \exp\left(-\frac{2r^2}{d^2}\right)$$

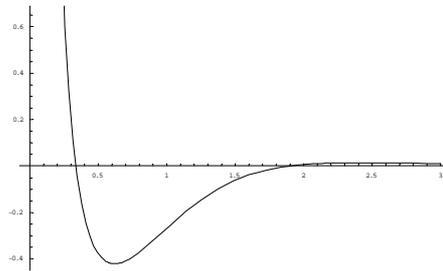
Il est facile de se convaincre que ce potentiel correspond à une force centrale. Le moment cinétique est donc conservé. Il est normal au plan de la trajectoire. On utilise alors les coordonnées cylindriques définies dans ce plan. Le moment cinétique est dans la direction  $z$  et son module vaut :  $L = mr^2\dot{\theta}$ . L'énergie a la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

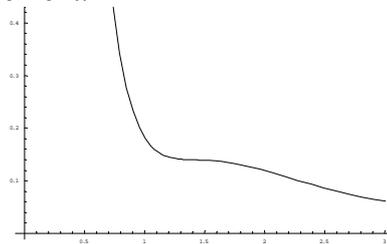
On peut conduire une discussion qualitative pour la variable  $r$  comme s'il s'agissait d'un mouvement à une direction pour le potentiel effectif :

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

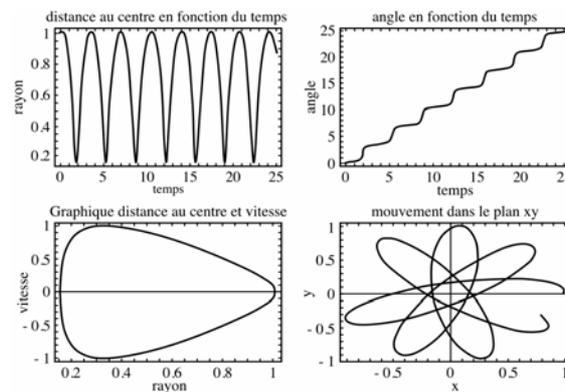
On doit alors discuter la forme que prend ce potentiel effectif. Si  $L$  est très petit, on a essentiellement un puits.



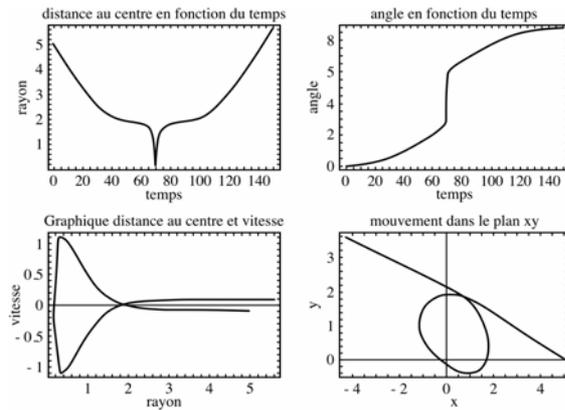
Mais quand  $L$  est pris de plus en plus grand, on trouve un potentiel de plus en plus positif, le minimum devient un point d'inflexion horizontal (figure), puis pour  $L$  encore plus grand, le potentiel est décroissant monotonement.



Les résultats numériques peuvent être obtenus par une simulation par Mathematica, par exemple. Quand  $L$  est petit, le potentiel effectif présente un minimum bien marqué et par conséquent, il existe des orbites liées. Ci-dessous on présente le résultat pour  $r(t), \theta(t), v(r)$  et la trajectoire  $y(x)$ .



En choisissant une valeur très particulière des conditions initiales, celle qui donne lieu à un point d'inflexion horizontal du potentiel effectif, on obtient une trajectoire selon laquelle le point matériel fait un tour dans le puits de potentiel et puis s'en va !



On ne trouverait pas cette solution en appliquant l'intégration numérique avec des conditions initiales prises au hasard.

### Equilibres

Les positions d'équilibre peuvent être déterminées par les équations du mouvement en posant  $\mathbf{a} = 0$  et  $\mathbf{v} = 0$ . Parfois, on s'intéresse à un équilibre relatif et l'on pose  $\mathbf{v}_{rel} = 0$ . Par exemple, on peut chercher la position d'équilibre relatif d'une bille dans un anneau en rotation autour d'un grand diamètre vertical ou l'inclinaison d'un pendule sur une porte en rotation uniforme.

Soit  $x_0$  une position du point matériel où  $F(x_0) = 0$ . La **stabilité** de cet équilibre dépend du signe de  $F(x)$  au voisinage de  $x_0$ . Si  $F(x)$  s'oppose à l'éloignement de  $x_0$ , l'équilibre est stable. Sinon il est instable.

On a  $m \ddot{x} = F(x)$  et  $F(x_0) = 0$

Soit

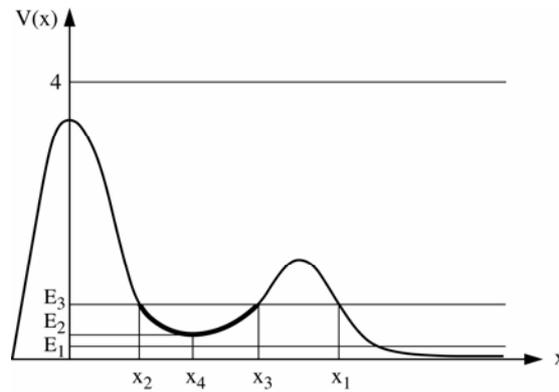
$$u = x - x_0 \quad F(x) \cong \underbrace{F(x_0)}_{x_0} + F'|_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

Donc

$$m \ddot{u} = F'(0) \cdot u$$

C'est une équation du mouvement qui a la forme de celle de l'oscillation harmonique, si  $F'(0) \leq 0$ . Sous cette condition, l'équilibre est donc stable.

Quand on a un système mécanique dont l'énergie est conservée, les conditions d'équilibres deviennent très intuitives. En particulier, si l'énergie est légèrement supérieure à un minimum de potentiel  $V(x)$ , le mouvement est limité à un petit domaine.



Dans le cas du potentiel considéré déjà,  $E_2$  est égal au minimum. Alors le mouvement est limité à un point. C'est une position d'équilibre. En effet, de  $\frac{dV}{dx} = 0$  (la condition pour trouver un extremum), on a en ce point,  $F = 0$  donc  $a = 0$ . Si, au contraire,  $E$  est à un maximum et si une petite perturbation diminue  $E$ , le point matériel s'éloigne du point d'équilibre. Il n'est pas confiné au voisinage de ce point. L'équilibre est instable.

Le mouvement autour d'un équilibre stable peut être analysé à partir de la conservation d'énergie. Soit  $x_0$  un équilibre stable. Alors on a :  $V'(x_0) = 0$  avec  $V''(x_0) > 0$ . Le développement de Taylor de  $V(x)$  au 2<sup>ème</sup> ordre donne :

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 \quad E \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2$$

Comme  $E$  est une constante,  $\frac{dE}{dt} = 0$ , et par conséquent :

$$m \ddot{x} = - V''(x_0)(x - x_0)$$

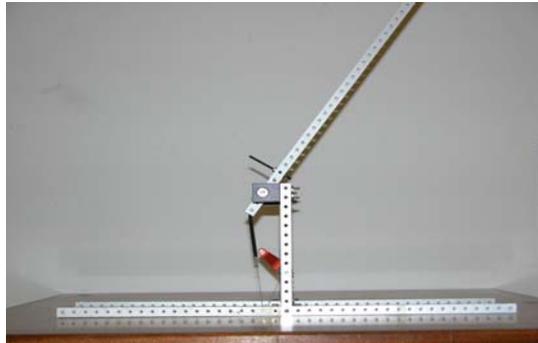
Soit  $u = x - x_0$ ,  $u$  représente l'écart à l'équilibre. En posant :  $k = V''(x_0) > 0$ , il vient :  $m \ddot{u} = -k u$ . C'est l'équation d'un oscillateur harmonique ! L'importance du modèle de l'oscillation harmonique en mécanique vient en partie du fait que les petites oscillations autour de tout équilibre stable sont pareilles à celles d'un oscillateur harmonique !

La fréquence des petites oscillations est déduite de la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$$

## Modèle d'hystérèse

On considère les positions d'équilibre d'un métronome.



Démonstration d'auditoire : un modèle mécanique du métronome permet de mettre en évidence les deux positions d'équilibre. La commutation d'une position à l'autre est obtenue en inclinant le support.

L'inclinaison du support peut être considérée comme une excitation du système, et l'orientation de la barre comme sa réponse à cette « excitation ». On observe que l'orientation de la barre dépend de « l'histoire » de son support : cette orientation dépend d'où l'on vient avec l'inclinaison du support. On a là un comportement dit « d'hystérésis » ou « d'hystérèse. »

On modélise un système mécanique un peu différent, qui a l'avantage de simplifier les expressions en gardant l'essence du phénomène. On imagine un métronome fait de deux ressorts qui coulisent sur un arc de cercle. Alors l'énergie mécanique des ressorts s'écrit de la forme :  $E_i = \frac{1}{2} k \delta x_i^2$  où  $\delta x_i$  est l'allongement du ressort  $i$ . La longueur au repos du ressort

est définie par  $x = \frac{\pi r}{2}$ . Ainsi :

$$\delta x_1 = r(\alpha - \theta), \quad \delta x_2 = r(-\alpha + \theta).$$

De plus, l'énergie potentielle de la pesanteur s'écrit :

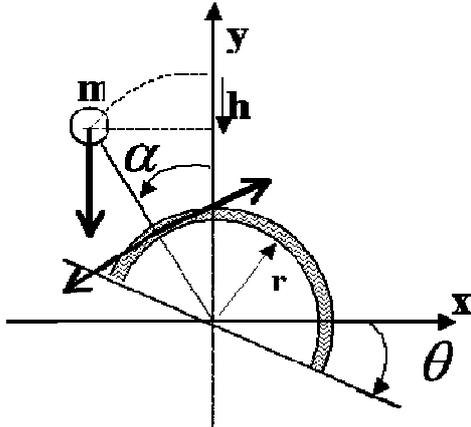
$$E_p = mgh = mgl(\cos \alpha - 1)$$

Au total on a une énergie potentielle

$$U = kr^2 (\alpha - \theta)^2 + mgl (\cos \alpha - 1)$$

$$V = \frac{U}{mgl} = \frac{1}{2} \omega^2 (\alpha - \theta)^2 + \cos \alpha - 1$$

$$\text{avec } \omega^2 = \frac{2kr^2}{mgl}$$



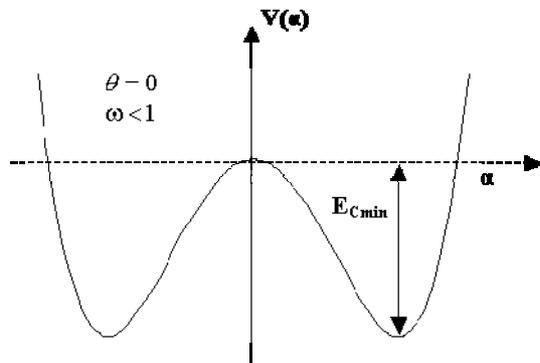
Pour éviter de faire une analyse qualitative avec des fonctions trigonométriques, on va supposer que l'on peut considérer des petits angles  $\alpha$ . Un développement limité au 2<sup>ème</sup> ordre fournit alors :

$$V \approx \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{1}{2} \alpha^2 (\omega^2 - 1) - \alpha \omega^2 \theta + \frac{1}{2} \omega^2 \theta^2$$

Si  $\omega < 1$ , à inclinaison du support nul,  $\theta = 0$  :

$$V \approx \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{1}{2} \alpha^2 (\omega^2 - 1)$$

Le potentiel a une forme de « double-puits ». Les profondeurs des puits de potentiel sont égales, les deux positions du potentiel sont équivalentes.

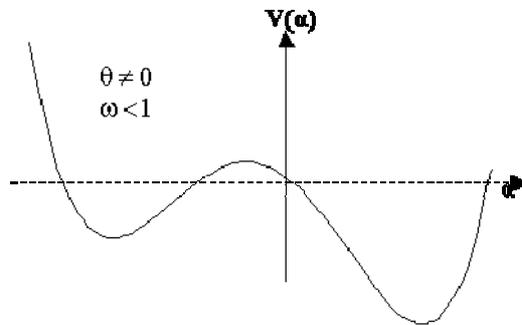


$E_{Cmin}$  représente l'énergie cinétique minimum pour que le métronome se balance d'un côté à l'autre des deux équilibres.

Si  $\theta > 0$ , alors on peut écrire

$$V \approx \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{1}{2} \alpha^2 (\omega^2 - 1) - (\alpha \omega^2 \theta - \frac{1}{2} \omega^2 \theta^2)$$

L'inclinaison du support ajoute au potentiel un terme linéaire en  $\alpha$ , donc une droite sur le graphique, dont la pente est proportionnelle à  $\theta$ . Si  $|\theta|$  augmente, un des puits va devenir de moins en moins profond, jusqu'au point de s'effacer. Il ne restera plus qu'une seule position d'équilibre. A ce point, le puit devenu plus profond est la seule position d'équilibre possible, le système fait un saut pour arriver à cette position !



### Kepler

Discuter qualitativement les orbites possibles d'un point matériel sous l'effet d'une force centrale dérivant d'un potentiel proportionnel à l'inverse de la distance au point central.

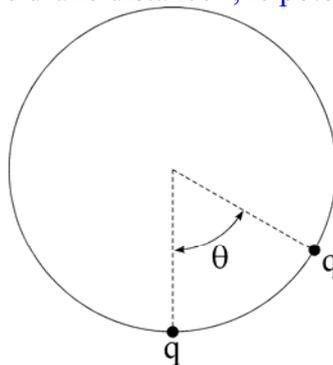
Le potentiel  $V$  est en  $1/\rho$  ( $\rho$  : distance au centre) et centripète (cas de forces

gravitationnelles), ainsi on définit :  $V = -\frac{\lambda}{r}$ , avec  $\lambda$  un coefficient de proportionnalité.

### Pendule chargé électriquement

Une charge ponctuelle  $q$ , pesante, de masse  $m$ , se déplace le long d'un cercle de rayon  $R$  dans un plan vertical. Une charge  $q$  est fixée au point le plus bas du cercle.

Aide : pour deux charges  $q$  séparées d'une distance  $r$ , le potentiel sera pris comme  $V(r) = q^2/r$



a) Appliquer la conservation de l'énergie mécanique pour identifier les positions d'équilibre.

b) Trouver explicitement les positions d'équilibre stable. Aide : utiliser la variable  $u = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) Si  $E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B(\theta_0 + \Delta\theta)$  avec  $\theta_0$  la position angulaire d'équilibre, trouver la période des petites oscillations  $\Delta\theta$  autour de cet équilibre.

d) Facultatif : trouver  $A$  et  $B$  pour ce problème.

## Les collisions et la notion de section efficace

Les collisions sont des phénomènes pour lesquels des informations qualitatives peuvent être obtenues sur la base des principes de conservation et de symétrie, sans connaître les détails de l'interaction mutuelle entre deux objets entrant en collision ou se percutant.

La notion de section efficace de collision mérite d'être introduite ici, puisque tout l'outillage de la mécanique nécessaire est déjà présenté et que cette notion revient un peu partout en physique, que ce soit dans l'étude des particules élémentaires, la structure du noyau, ou plusieurs méthodes d'investigation de la matière condensée.



Deux boules de diamètres identiques, une pleine, une creuse. Quand on laisse tomber les deux boules en même temps, la lourde au-dessus de la légère, alors la légère rebondit très haut.

### Définition

On dit qu'il y a **collision** quand deux ou plusieurs objets se rapprochent et subissent une interaction mutuelle. En règle générale, on présume que les forces d'interaction sont négligeables quand les objets sont suffisamment éloignés. On peut donc distinguer un « avant » et un « après » la collision. Contrairement à l'usage courant du terme, « collision » ici n'implique pas forcément qu'il y ait un impact ! Ainsi, le problème d'une comète qui passerait au voisinage du soleil peut être vu comme une collision.

### Collisions élastiques et inélastiques

Un système mécanique peut avoir des degrés internes de liberté. Imaginons deux plots sur un rail à air. L'un d'eux est muni d'un ressort buttoir. Quand le ressort se comprime, un crochet l'empêche de se détendre à nouveau. Quand les deux plots se percutent, le ressort se comprime. De l'énergie est emmagasinée sous forme d'énergie élastique (celle du ressort). L'énergie cinétique n'est pas conservée.



Deux plots, l'un muni d'une pointe, l'autre d'un buttoir en pâte à modeler. Les plots restent joints après la collision.

On appelle **collision élastique** une collision où l'énergie cinétique est conservée. Si elle ne l'est pas, la collision est dite **inélastique**. Il faut bien prendre note que seules des conditions très particulières impliquent une collision élastique.

### Conservation de la quantité de mouvement

Si l'énergie cinétique n'est pas toujours conservée, la quantité de mouvement d'une collision entre deux objets isolés l'est nécessairement. En effet, la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé découle des grands principes fondamentaux de la mécanique. Nous l'avons vu en tant que 3<sup>ème</sup> loi de Newton comme décrivant une propriété fondamentale des forces. On pourrait aussi l'obtenir en considérant des principes très généraux de symétrie.

La loi de conservation s'étend aux systèmes non isolés mais dans lesquels un plan ou une direction fixe de l'espace où les forces peuvent être négligées. C'est le cas notamment d'une table à air parfaitement horizontale. Le système n'est pas isolé au sens strict, mais on peut en général négliger les frottements pour décrire des impacts entre plots.

Finalement, il faut signaler encore que dans le cas d'un impact, c'est-à-dire d'un choc dont la durée est très courte, il est possible d'invoquer la conservation de la quantité de mouvement « juste » à l'impact. Plus formellement, l'argument peut se développer de la manière suivante. On part de la loi générale pour un système de point matériel :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ext}$$

On intègre cette loi sur un intervalle de durée  $\varepsilon$  autour du temps  $t$ :

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{d\mathbf{P}}{dt} dt = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathbf{F}^{ext} dt$$

Si le choc est instantané on peut poser :

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{d\mathbf{P}}{dt} dt = \mathbf{P}_{final} - \mathbf{P}_{init}$$

et

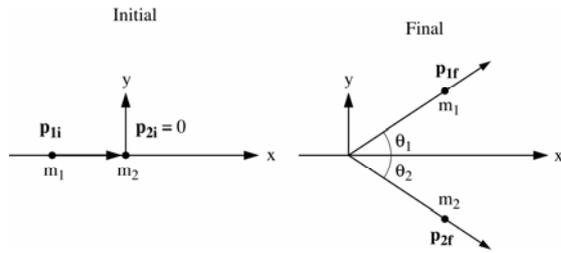
$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathbf{F}^{ext} dt = 2\varepsilon \mathbf{F}^{ext}$$

Dans la mesure où le choc est court, on peut faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro. La force extérieure reste de valeur finie. Il résulte alors qu'on peut poser :  $\mathbf{P}_{final} - \mathbf{P}_{init} = 0$ , c'est-à-dire la conservation de la quantité de mouvement.

### Analyse d'une collision élastique

Quand une collision est élastique, il est possible de tirer beaucoup d'informations sur le mouvement sur la seule base des principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

Considérons la collision élastique de deux points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$ .



Prenons pour référentiel celui où  $m_2$  est à l'arrêt avant le choc. L'analyse porte sur l'état du mouvement des deux particules bien avant (état initial) et bien après la collision (état final), quand ils sont libres de force. La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

Les indices i et f se réfèrent aux états initial et final. En projetant sur les axes x et y du référentiel, on obtient le système d'équations

$$1) \quad p_{1i} = p_{1f} \cos \theta_1 + p_{2f} \cos \theta_2$$

$$2) \quad 0 = p_{1f} \sin \theta_1 - p_{2f} \sin \theta_2$$

$$3) \quad \frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

Elevons au carré les équations 1 et 2 :

$$1) \quad (p_{1i} - p_{1f} \cos \theta_1)^2 = p_{2f}^2 \cos^2 \theta_2$$

$$2) \quad p_{1f}^2 \sin^2 \theta_1 = p_{2f}^2 (1 - \cos^2 \theta_2)$$

$$\text{Eliminons } \theta_2 : (p_{1i} - p_{1f} \cos \theta_1)^2 = p_{2f}^2 - p_{1f}^2 \sin^2 \theta_1$$

Eliminons  $p_{2f}$  avec l'équation 3 :

$$p_{1f}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2 p_{1i} p_{1f} \cos \theta_1 + p_{1i}^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\frac{p_{1f}^2}{p_{1i}^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2 \frac{p_{1f}}{p_{1i}} \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\frac{p_{1f}}{p_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left\{ \cos \theta_1 \pm \left[ \cos^2 \theta_1 - \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \right]^{1/2} \right\}$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left\{ \cos \theta_1 \pm \sqrt{\cos^2 \theta_1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}} \right\}$$

Si  $v_{1i}$  est donné (avec  $v_{2i}=0$ ), on trouve ainsi une relation entre le module  $v_{1f}$  de la vitesse finale de la particule 1, l'angle final de déviation  $\theta_1$  et la vitesse initiale  $v_{1i}$ . Pour déterminer  $\theta_1$  et  $v_{1f}$ , il faut encore l'information sur le détail de la force d'interaction.

En revanche, si l'on impose en plus que le mouvement est rectiligne, c'est-à-dire  $\theta_1 = 0$  alors il vient :

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}} \right\}$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \begin{cases} 1 \\ \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \end{cases}$$

Si  $v_{1f} = v_{1i}$  alors  $v_{2f} = 0$ . Cela revient à dire qu'il n'y a pas de collision. Ce sont les manipulations algébriques qui ont introduit cette solution triviale.

Retraçons l'équation de l'énergie cinétique pour trouver  $v_{2f}$  en fonction de  $v_{1i}$  dans ce cas :

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2} v_{1i}^2 \left( 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \right)$$

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \frac{m_1}{m_2} v_{1i}^2 \left( 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2} \right) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i}$$

Si  $m_1 = m_2$  alors  $v_{1f} = 0$  et  $v_{2f} = v_{1i}$ . C'est le résultat observé lors des expériences avec le banc à air et des chocs élastiques.

Si  $m_1 \ll m_2$ , c'est-à-dire si  $m_2$  est pratiquement comme un mur, alors  $v_{2f} = 0$  (le mur ne bouge pas) et  $v_{1f} = -v_{1i}$ , Cela veut dire que  $m_1$  rebondit avec la même vitesse  $|v|$ .

On peut obtenir un autre résultat intéressant pour le cas plan, quand les masses sont égales. En retraçant les équations initiales de la quantité de mouvement on trouve pour l'angle  $\theta_2$  :

$$\begin{array}{l|l} v_{1i} = v_{1f} \cos \theta_1 + v_{2f} \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \\ 0 = v_{1f} \sin \theta_1 - v_{2f} \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \end{array}$$

$$v_{1i} \cos \theta_1 = v_{1f} + v_{2f} \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

Mais on a aussi obtenu :  $v_{1i} \cos \theta_1 = v_{1f}$ .

Il faut donc :  $\cos (\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

C'est en effet ce que l'on peut observer avec des boules de billard pour autant qu'elles ne tournent pas sur elles-mêmes.

Démonstration d'auditoire : une vidéo montre les trajectoires incurvées obtenues avec la rotation des boules de billard. Il s'agit donc d'expériences où les billes ne peuvent pas être modélisées par des points matériels.

### Collisions inélastiques

On ne peut plus appliquer l'équation de conservation de l'énergie cinétique s'il s'agit d'un choc inélastique, par définition ! En revanche, on peut vouloir caractériser la collision par l'énergie dégagée par la collision. On écrit :

$$K_{1i} + Q = K_{1f} + K_{2f}$$

pour avoir  $Q = K_{final} - K_{initial}$ .  $Q$  est ainsi défini comme la production d'énergie cinétique.  $Q$  est positif si de l'énergie est **libérée** par la collision.

### Collisions parfaitement inélastiques

Considérons le cas où les deux masses sont accolées après la collision, c'est-à-dire qu'elles se déplacent ensemble.

Notons  $p_1$  la quantité de mouvement initiale d'un des points matériels. On considère ici que l'autre est immobile initialement. Après le choc, la masse du système des deux masses est :  $m_1 + m_2$ .

La conservation de la quantité de mouvement implique que leur vitesse vaut

$$\frac{p_1}{m_1 + m_2}$$

L'énergie cinétique n'est **pas** conservée dans un tel choc ! En effet, on a :

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left( \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)} v_1^2$$

$$Q = K_f - K_i = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement implique pour ce cas-ci que  $Q$  est négatif. Il y a donc une perte d'énergie cinétique. L'énergie est emmagasinée dans les déformations plastiques de la pâte à modeler, ou dans tout autre mécanisme assurant l'accrolement des deux plots.

### Modèles pour les collisions de sphères

Il serait malheureux de croire que toute la mécanique générale est une très vieille science bien établie. Des siècles après les expériences de Newton, il y a encore des questions ouvertes.

Par exemple, un article de G. Barnes dans la revue *Physical Review* de 1957, donc relativement récemment sur l'échelle de temps du développement de la mécanique rationnelle, présente des mesures de collision entre des sphères métalliques. Cette revue de la littérature montre les contradictions entre les ouvrages prétendument de référence.

<p><b>Study of Collisions</b></p> <p><b>Part I. A Survey of the Periodical Literature</b></p> <p>GEORGE BARNES  <i>University of Nevada, Reno, Nevada</i>        (Received February 12, 1957)</p> <p>A review of the periodical literature on the subject of impact and the coefficient of restitution <math>\epsilon</math> shows that it depends not only on the materials (elastic moduli) of the colliding objects, but also on (1) their relative normal velocity at the instant of impact, (2) their shapes and sizes, (3) their masses, and (4) the medium in which the impact occurs.</p>	<p><b>Study of Collisions*</b></p> <p><b>Part II. Survey of the Textbooks</b></p> <p>GEORGE BARNES  <i>University of Nevada, Reno, Nevada</i>        (Received July 16, 1957)</p> <p>A survey of physics and engineering textbooks indicates that there is lack of agreement among the authors on the subject of impact and the coefficient of restitution as well as disagreement between the textbook authors and the writers of the articles in the periodicals. The confusion arises primarily because of (1) the way in which the coefficient of restitution <math>\epsilon</math> is so often defined, (2) the nature of the usual discussions of it, and (3) the reason given for <math>\epsilon</math> being less than unity for most collisions between objects of ordinary size. Ways of eliminating the difficulty are discussed.</p>
---	--

Un modèle couramment utilisé consiste à dire que dans une collision inélastique, les vitesses normales à la surface de collision obéissent à la loi empirique:

$$v_{2f} - v_{1f} = e (v_{1i} - v_{2i})$$

où le coefficient  $e$  est appelé **coefficient de restitution**.

### Problèmes à deux corps

Il est important de réaliser que l'analyse ci-dessus consiste en une discussion qualitative d'une collision. Elle fournit une information partielle sur l'état final possible étant donné un état initial. Le système est isolé (aux approximations près mentionnées) et l'interaction mutuelle est négligeable dans l'état initial et final. De plus, rien n'est spécifié de l'interaction mutuelle pendant la collision.

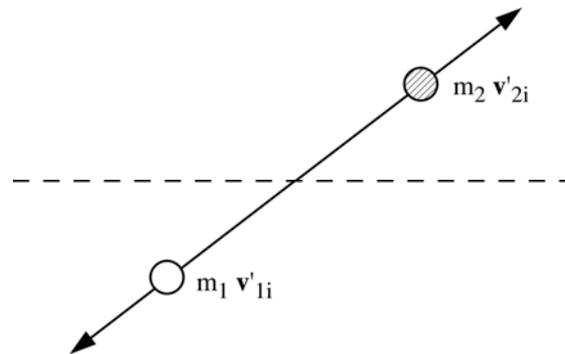
Il existe cependant de nombreuses situations physiques où l'interaction est connue et il est alors possible de spécifier plus précisément l'état final en fonction de l'état initial. Notamment, on peut déterminer la section efficace de collision, notion qui va être introduite ci-dessous. Souvent en physique, une telle problématique exige une description quantique de la collision. C'est le cas par exemple de l'interaction entre un électron de conduction et une impureté dans un solide. Toutefois, il est utile de se familiariser avec le concept de collision dans le cadre de la phénoménologie familière de la mécanique. On va ainsi traiter la collision entre deux particules chargées positivement.

Si les deux objets en collision, représentés par des points matériels, ont des masses voisines, il n'est pas possible de considérer que l'une des masses est une cible fixe. Nous sommes en présence d'un problème dit « à deux corps ». Si les deux points matériels sont libres de toute autre force que l'interaction coulombienne entre elles, alors la quantité de mouvement du centre de masse reste inchangée dans la collision. Pour cette raison, il est judicieux d'analyser une telle collision dans le référentiel du centre de masse.

Dans le référentiel du centre de masse, les quantités de mouvement suivent la règle  $\sum \mathbf{P}'_{\alpha} = 0$ . Par conséquent, les collisions vues dans le référentiel du centre de masse ont toujours l'allure suivante, avant la collision :



Et après :



### Masse réduite

On considère, formellement, deux masses  $m_1$  et  $m_2$  soumises à une interaction mutuelle, la force de la particule 2 sur la particule 1 est notée  $\mathbf{F}_{12}^{\text{int}}$  et celle de la particule 1 sur la 2,  $\mathbf{F}_{21}^{\text{int}}$ . La 3<sup>ème</sup> loi de Newton implique :  $\mathbf{F}_{12}^{\text{int}} = -\mathbf{F}_{21}^{\text{int}}$ . On peut appliquer la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à chaque point matériel et écrire :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{12}^{\text{int}} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{21}^{\text{int}} \end{aligned}$$

Il est bon, dans tout problème de physique, d'utiliser autant que possible ce qu'on sait des symétries d'un problème.<sup>60</sup> Ici, peu importe où ces deux masses sont situées dans l'espace, la seule chose qui détermine le mouvement pour nous, c'est le vecteur joignant ces deux masses. On opère donc un changement de variable qui introduit  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . De plus la 3<sup>ème</sup> loi de Newton implique la conservation de la quantité de mouvement totale

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

Par intégration, il en découle que le vecteur :

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

décrit un mouvement rectiligne uniforme. On reconnaît en  $\mathbf{R}$  la position du centre de masse. En multipliant l'équation du mouvement pour  $\mathbf{r}_1$  par  $m_2$  et celle pour  $\mathbf{r}_2$  par  $m_1$ , on obtient:

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}^{\text{int}}$$

Tout se passe comme si un point matériel dont la masse serait la masse réduite, définie par

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

subissait la force  $\mathbf{F}_{12}^{\text{int}}$  :

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{1,2}^{\text{int}}$$

Pour le problème de deux charges électriques comme pour l'interaction gravitationnelle entre deux masses, la force est centrale, donc le moment cinétique défini pour les coordonnées de  $\mathbf{r}$  est conservé. Cela implique entre autre que le mouvement est plan. On a débuté l'analyse du problème avec 6 variables a priori indépendantes. En invoquant les conservations des

<sup>60</sup> Stephanie Franck Singer, *Symmetry in Mechanics*, Birkäuser

grandeurs physiques, qui comme il sera vu dans un cours plus avancé, correspondent à des symétries du problème, il est possible de réduire l'analyse à deux coordonnées (mouvement plan) avec en plus la restriction que le moment cinétique est conservé !

### Energie cinétique

L'énergie cinétique, par définition, vaut :

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$$

Le changement de variable inverse est facilement obtenu :

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R} .$$

Les vitesses se déduisent immédiatement par dérivation. L'énergie cinétique peut s'écrire :

$$K = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right)^2$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 \frac{\mu^2}{m_1^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{R}}^2 \\ + \frac{1}{2} m_2 \frac{\mu^2}{m_2^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{R}}^2$$

Il vient en regroupant les termes :

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

$$\text{avec } v = \|\dot{\mathbf{r}}\| = \|\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2\|$$

Ce résultat permet de mieux comprendre ce qu'on appelle l'énergie disponible dans une collision. Il se peut qu'on veuille analyser une collision susceptible de déclencher un mécanisme quelconque sous la condition qu'une énergie  $Q$  au moins soit absorbée ( $Q < 0$ ). La conservation de la quantité de mouvement totale implique que le centre de masse maintient son énergie cinétique.

$$\frac{1}{2} M V_{CM}^2 \Big|_{\text{avant}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \Big|_{\text{après}}$$

La seule énergie disponible pour le déclenchement est donc :  $\frac{1}{2} \mu v^2$ . Il faut  $\frac{1}{2} \mu v^2 \geq |Q|$ , soit :

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 \geq |Q| \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

On constate qu'il ne suffit pas d'avoir  $\frac{1}{2} m_1 v^2 \geq Q$ .

Cela vient du fait qu'une partie de cette énergie cinétique est celle du centre de masse, et qu'elle ne changera pas avec la collision.

### Introduction à la notion de section efficace

La notion de masse réduite permet de faire le lien entre une collision avec une cible fixe et celle de deux masses en interaction mutuelle. On considère, parce qu'il est plus simple à visualiser, le cas d'un projectile en interaction avec un centre fixe. On pose ainsi qu'une masse  $m$  est soumise à un potentiel répulsif :  $V(r) = \frac{K}{r}$  ( $K > 0$ ). Formellement, il s'agit d'intégrer l'équation du mouvement :

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = \frac{K}{r^2}$$

Par analogie avec le cas de la gravitation, l'orbite a la forme :

$$q = \frac{1}{r} = \frac{-Km}{L^2} + C \cos(\theta + \theta_0)$$

avec  $L = mr^2\dot{\theta}$ . Les constantes  $L$  et  $C$  sont déterminées par les conditions initiales. Comme  $K$  est positif, le potentiel est répulsif. Une analyse qualitative montre que pour toute condition initiale l'orbite est nécessairement non liée, donc une hyperbole. On peut orienter le système d'axe pour que  $\theta_0 = 0$ . Le point de rebroussement est donné par :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{-mK}{L^2} + C$$

Le point de rebroussement est aussi celui pour lequel l'énergie cinétique n'a que le terme centrifuge ( $\dot{r} = 0$ ), et l'énergie totale à ce point vaut :

$$\frac{K}{r_1} + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

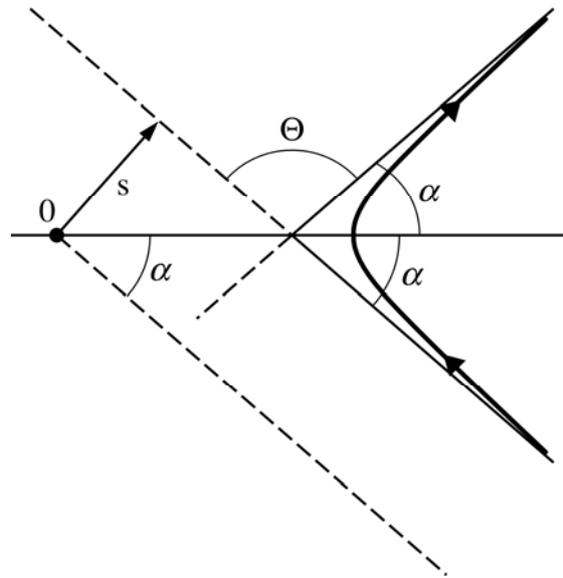
De là on tire pour  $C$  :

$$C^2 = \frac{m^2 K^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

La figure ci-dessous montre une trajectoire hyperbolique. Le point  $O$  désigne le centre de force. Il est à l'origine du système de coordonnées ( $r=0$ ). Dans cette représentation des coniques en coordonnées polaires, il faut noter que le croisement des asymptotes n'est pas au point  $O$ , tout comme le Soleil est au foyer de l'ellipse d'une orbite planétaire, et non pas en son centre.

Alors que la position des asymptotes n'est pas triviale à obtenir, la direction de l'asymptote est donnée immédiatement par la valeur  $\alpha$  de l'angle des coordonnées polaires  $\theta$  telle que :

$$0 = \frac{-Km}{L^2} + C \cos(\alpha)$$



Par conséquent

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \cot \alpha = \sqrt{\frac{mK^2}{2EL^2}}$$

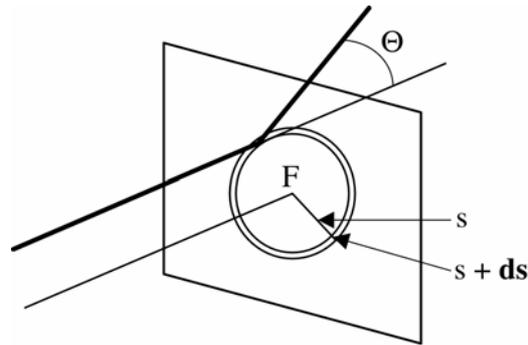
On considère une particule incidente avec une énergie  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ . La distance de la trajectoire asymptotique incidente avec le centre de répulsion s'appelle le paramètre d'impact, ici noté  $s$ . Le moment cinétique (constante du mouvement) a donc la valeur  $L = mv_0s$ . Des expressions de  $E$  et  $L$  en terme de la vitesse initiale et du paramètre d'impact, on tire pour l'angle de déviation :

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{K}{msv_0^2}$$

En résumé, par le fait que la loi d'interaction est parfaitement connue, et l'équation d'évolution peut être résolue analytiquement, on obtient une relation bijective entre le paramètre d'impact et l'angle de déviation.

Dans la pratique, une expérience de diffusion fait intervenir plusieurs centres diffuseurs et un faisceau de particules incidentes. C'est le cas par exemple de l'expérience de Rutherford : un faisceau de particules  $\alpha$  entre en collision avec les noyaux d'une feuille d'or. Ce qui est mesuré, c'est la probabilité d'avoir un faisceau diffusé dans une direction entre un angle  $\Theta$  et  $\Theta + d\Theta$ .

Le faisceau incident est tel que toutes les valeurs de  $s$  sont équiprobables. La probabilité que le faisceau émergent est à un angle entre  $\Theta$  et  $\Theta + d\Theta$  est donc proportionnelle à la surface de l'anneau compris entre  $s$  et  $s+ds$ . Cette surface  $d\sigma = 2\pi s ds$  est appelée une **section efficace**.



En d'autres termes, le sens d'une section efficace comme celle-ci est le suivant : si un flux de  $F$  particules par unités de surface est incident sur la cible, le nombre de particules qui sortiront entre les angles  $\Theta$  et  $d\Theta$  est donné par  $F d\sigma$ .

En première analyse, il est supposé que les centres diffuseurs sont loin les uns des autres. On peut alors traiter la feuille d'or de l'expérience de Rutherford comme s'il s'agissait de plusieurs centres diffuseurs indépendants, et on néglige les diffusions multiples. Si la densité de centres diffuseurs par unité de surface vaut  $n$ , alors le nombre de particules diffusées est proportionnel à  $n$ . Finalement, si  $N$  particules sont incidentes, le nombre  $dN$  de particules diffusées dans un angle entre  $\Theta$  et  $\Theta + d\Theta$  est donné par :

$$\frac{dN}{N} = n d\sigma$$

Cette démarche est très générale. Elle est appliquée dans toutes sortes de domaines de la physique : diffusion de neutrons (par exemple pour étudier les vibrations d'atomes dans un solide), diffusion électronique (déterminant par exemple la résistivité d'un métal), diffusion de particules de hautes énergies sur des cibles solides (donnant des informations par exemple sur la structure des noyaux.)

On peut concrétiser cette notion de section efficace en utilisant le résultat ci-dessus liant l'angle de diffusion  $\Theta$  au paramètre d'impact. Par différentiation, on a :

$$\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta = -\frac{K}{ms^2v_0^2} ds$$

En regroupant les expressions de  $s$  et  $ds$  en termes de  $\Theta$  et  $d\Theta$  il vient pour la section efficace :

$$d\sigma = \left(\frac{K}{2mv_0^2}\right)^2 \frac{2\pi \sin(\Theta)}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta$$

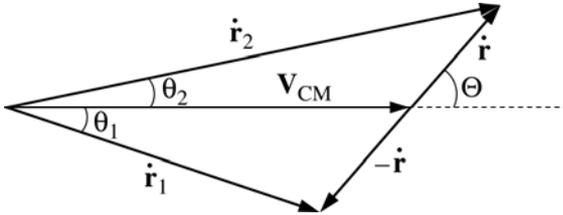
S'il fallait se préoccuper du recul de la cible, alors il faudrait conduire une analyse qui suit la description du problème à deux corps. Le résultat ci-dessus serait celui obtenu pour la masse effective dans le référentiel centre-de-masse.

Le changement de variable fournit les relations entre les vitesses nécessaires pour trouver l'angle dans le référentiel d'inertie choisi. Si les masses sont égales :

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{V}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{V}$$

Un peu de trigonométrie fournit les relations entre l'angle  $\Theta$  et les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

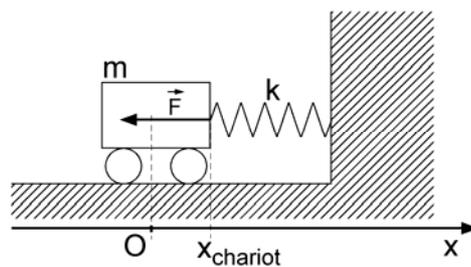


### Modèle de choc élastique

Un chariot assimilable à un point matériel de masse  $m$ , est mobile sans frottement sur un plan horizontal; ce chariot est muni à son extrémité d'un ressort de raideur  $k$  pouvant se comprimer. Par l'intermédiaire de ce ressort, le chariot, animé d'une vitesse  $v_0$ , heurte un obstacle fixe; le ressort se comprime alors, puis se détend, et le chariot repart en sens inverse. On admettra que le choc est parfaitement élastique, c'est-à-dire que l'énergie mécanique se conserve.

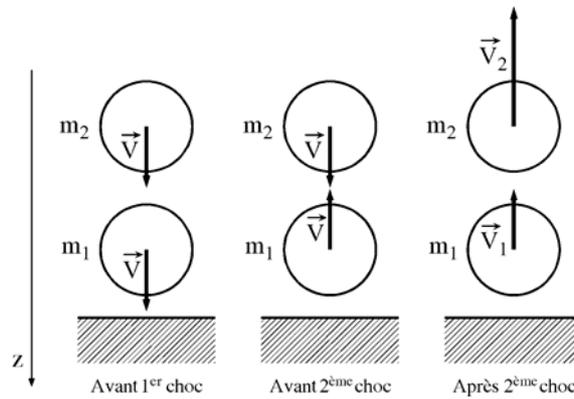
- Déterminer le laps de temps pendant lequel le ressort reste en contact avec l'obstacle (durée du choc). Quel est l'enfoncement maximal du ressort? Quelle est la force maximale exercée par le ressort ?
- Que deviennent les expressions précédentes lorsque  $k \rightarrow \infty$ ; que devient le produit  $F_M \cdot \Delta t$  de la force maximale par la durée du choc ?

- Quelle est la vitesse  $v'$  après le choc ? En déduire sans calcul la valeur de l'intégrale :  $\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F dt$  où  $t_0$  est l'instant caractérisant le début du choc, et  $F$  la force exercée par le ressort.



### Rebond de deux balles

On lâche, sans vitesse initiale, deux balles de même rayon, de masses  $m_1$  et  $m_2$  très différentes  $m_1 \gg m_2$ , le centre  $O_1$  de  $m_1$  étant situé sous le centre  $O_2$  de  $m_2$ , à l'aplomb de celui-ci. Soit  $h$  la hauteur de chute; à cause de la résistance de l'air, la balle la plus lourde rebondit sur le sol un petit peu avant que la balle la plus légère ne l'atteigne. En supposant tous les chocs élastiques, montrer que la balle la plus légère rebondit à une hauteur  $h' = 9h$ .



### La grosse Bertha

Si la "Grosse Bertha" était un canon de 10 tonnes qui lançait des boulets de 10 kg à 40 km (portée au sol), quelle était l'énergie que son dispositif d'amortissement devait absorber à chaque fois qu'un boulet était envoyé.

### Choc inélastique rectiligne

Deux plots sur une table à air (frottements et pesanteur négligés) entrent en collision. Les plots sont considérés comme des points matériels. Avant le choc, un plot est au repos sur la table, l'autre a une vitesse  $v_i$ . Après le choc, on suppose que les plots s'éloignent les uns des autres selon l'axe défini par la trajectoire du plot entrant en collision avec le plot au repos. Le coefficient de restitution, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{\text{vitesse relative d'éloignement}}{\text{vitesse relative de rapprochement}} = e$$

est supposé connu.

- Quelle grandeur est conservée dans le choc.
- Quelles sont les vitesses finales des deux plots après le choc ?