

Plans de leçons et montages  
Agrégation de Physique-Chimie (option physique)  
Session 2019

Jules FILLETTE

23 juin 2019



# Table des matières

<b>I Leçons de Physique</b>	<b>5</b>
1 Contact entre deux solides. Frottements.	7
2 Gravitation.	11
3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre.	15
4 Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.	19
5 Lois de conservation en dynamique.	23
6 Cinématique relativiste.	27
7 Dynamique relativiste.	31
8 Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.	35
9 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.	39
10 Phénomènes interfaciaux impliquant les fluides.	41
11 Gaz réels, gaz parfait.	45
12 Premier principe de la thermodynamique.	49
13 Evolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé.	53
14 Machines thermiques réelles.	57
15 Transitions de phase.	61
16 Facteur de Boltzmann	65
17 Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.	69
18 Phénomènes de transport.	73
19 Bilans thermiques : Flux conductifs, convectifs et radiatifs.	77
20 Conversion de puissance électromécanique	81
21 Induction électromagnétique	85
22 Rétroaction et oscillations.	87
23 Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Etude spectrale.	91
24 Ondes progressives, ondes stationnaires.	95
25 Ondes acoustiques.	99
26 Propagation avec dispersion.	103
27 Propagation guidée des ondes.	105
28 Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.	107

<b>29 Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.</b>	<b>109</b>
<b>30 Rayonnement dipolaire électrique.</b>	<b>113</b>
<b>31 Présentation de l'optique géométrique à partir du principe de Fermat</b>	<b>117</b>
<b>32 Microscopies Optiques.</b>	<b>121</b>
<b>33 Interférences à deux ondes en optique.</b>	<b>125</b>
<b>34 Interférométrie à division d'amplitude</b>	<b>129</b>
<b>35 Diffraction de Fraunhofer</b>	<b>131</b>
<b>36 Diffraction par des structures périodiques.</b>	<b>135</b>
<b>37 Absorption et émission de la lumière.</b>	<b>139</b>
<b>38 Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.</b>	<b>143</b>
<b>39 Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.</b>	<b>145</b>
<b>40 Confinement d'une particule et quantification de l'énergie.</b>	<b>149</b>
<b>41 Effet tunnel.</b>	<b>153</b>
<b>42 Fusion, fission.</b>	<b>157</b>
<b>43 Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux.</b>	<b>161</b>
<b>44 Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.</b>	<b>165</b>
<b>45 Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.</b>	<b>169</b>
<b>46 Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques</b>	<b>173</b>
<b>47 Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.</b>	<b>175</b>
<b>48 Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.</b>	<b>179</b>
<b>49 Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités</b>	<b>183</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>187</b>

**Première partie**

**Leçons de Physique**



# LP n° 1 : Contact entre deux solides. Frottements.

## NIVEAU : CPGE

Le point de le plus détaillé sur ce sujet apparaît au programme de MP. En aucun cas il n'est explicitement question de l'aspect microscopique mais vu le titre de la leçon il semble inévitable d'évoquer le sujet. Pour moi, la description qualitative que l'on va en faire ici permet de rester dans l'adhérence du programme de MP. Il faut aussi noter que ledit programme restreint l'étude aux solides en translation!

## PRÉREQUIS :

- Cinématique & mécanique du point
- Cinématique du solide

## PLAN :

1. Description du contact entre deux solides
2. Discussion sur les lois du frottement
3. Oscillateur amorti par frottements solides

## BIBLIOGRAPHIE :

- [1] *Les milieux granulaires*, B. Andreotti et coll.
- [10] *Mécanique, tome 2*. Bertin-Faroux-Renault
- [13] *Toute la mécanique*. Bocquet-Faroux-Renault
- [15] P. Brasselet, *Mécanique PCSI-MPSI*.
- [40] Gié MP, Tec & Doc (ou tome de mécanique 2eme année).
- BUP n°744 sur *Le portrait de phase des oscillateurs*

## IDÉES À FAIRE PASSER :

Le frottement solide est un phénomène compliqué à décrire dans le détail. On en propose une modélisation phénoménologique introduisant deux coefficients distincts. Ces lois ont une forme originale nécessitant de les utiliser avec précaution.

**Introduction :** Dans le cours de mécanique du point il n'y avait pas de contact, donc pas de frottement. On avait toujours que la réaction du support, et on faisait l'hypothèse de glissement sans frottement pour pouvoir résoudre. Comment peut-on affiner le traitement des exos de méca en tenant compte des frottements solides? Typiquement :

**Expérience :** On pose un pavé sur un plan et on incline le plan. D'après la mécanique du point le pavé devrait tomber, mais ça n'est évidemment pas le cas.

Remarque (à dire) : On travaillera systématiquement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et on ne considèrera que des solides indéformables.

## 1 Description du contact entre deux solides

### 1.1 Modèle du contact ponctuel, aspects cinématiques

[40], p. 200 - Définir proprement le contact entre deux solides et la **vitesse de glissement**. Évoquer les vitesses de rotation dites de pivotement et de roulement. Le programme nous restreint aux solides en translation donc la seule grandeur qui nous intéresse c'est la vitesse de glissement et il y aura soit équilibre (si pas de mouvement d'un solide par rapport à l'autre) soit glissement. Remarque : si la vitesse de glissement est nulle, les solides ne glissent pas l'un par rapport à l'autre et les points  $I_1$  et  $I_2$  restent confondus, d'où la notion de points coïncidant.

### 1.2 Actions de contact entre solides

[40], p. 255 & [10], p. 103 - Décrire les actions au point I exercées par le solide  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{S}'$ . L'hypothèse de contact ponctuel permet d'annuler les moments. Décomposer la résultante selon le plan  $\Sigma$  tangent en I à chacun des deux solides en forces tangentielle ( $\vec{T} // \Sigma$  - caractérise la friction) et normale ( $\vec{N} \perp \Sigma$  - contact tant que  $\vec{N} \neq 0$  et non encastrement si  $\vec{N}$  dirigé de  $\mathcal{S}'$  vers  $\mathcal{S}$ , sinon il y a rupture de contact).

### 1.3 Lois d'Amontons Coulomb

[40], p. 257-258 - Énoncer hyper correctement les lois de Coulomb comme dans le Gié, insister sur le fait que dans les deux cas de glissement ou équilibre on a toujours une égalité qui permet d'écrire l'équation du mouvement et une inégalité qui permet de donner la condition de validité du cas dans lequel on est. On peut aller jusqu'à détailler

l'énoncé comme dans [1], p. 20. Prendre surtout soin de préciser que les forces apparaissent en norme dans les lois et que par conséquent il faut prendre grand soin à bien définir les notations utilisées (cf. exemple ci-dessous).

Faire l'application ultra classique à un solide en équilibre sur un plan incliné. Lier l'angle de glissement au coefficient de frottement statique. On prend soin de définir correctement les vecteurs avec leur norme signée ou non, par exemple :  $\vec{T} = -T\vec{u}_x$  avec  $T < 0$ ... peu importe le choix fait, il faut que ce soit proprement indiqué. On peut checker le calcul dans [15], p. 50-51.

**Expérience : Refaire proprement l'expérience et trouver une valeur d'angle avec incertitude. On l'ajoute à un tableau dans lequel on a déjà fait plusieurs fois la même mesure. La valeur de  $f_s$  est donnée par la moyenne et l'incertitude par l'écart-type.**

Donner sur **slide** quelques ordres de grandeur de  $f_s$  et  $f_g$  pour différents contacts.

**Transition :** On voit que  $f_s$  et  $f_d$  varient en fonction du contact. De quoi est-ce qu'ils dépendent, seulement de la matière? De la masse / surface / température? On va mener dans la deuxième partie une discussion générale sur les lois que l'on vient d'énoncer.

## 2 Discussion sur les lois du frottement

### 2.1 Dépendance de $f_s$ et $f_d$

Discuter les dépendance de  $f_s$  et  $f_d$  avec l'aire de contact, la masse... je n'ai pas trouvé de référence qui discute cela correctement. Il faut noter que les deux coefficients dépendent du poli des surfaces et, surtout, qu'**ils sont indépendants de  $\vec{N}$ !!!**

### 2.2 Interprétation au niveau microscopique

On n'a pas prétention à démontrer les lois mais, connaissant ces lois, on peut essayer d'en donner une interprétation microscopique. Elle est efficacement décrite dans [1], p. 21-22. et détaillée aussi dans [13], p. 358. Il faut ajuster le discours en fonction du temps imparti et éventuellement préciser d'emblée qu'on a conscience que ce n'est pas explicitement au programme mais qu'on reste dans l'adhérence du programme sans rien exiger des élèves à ce sujet.

### 2.3 Aspects énergétiques

On a traité souvent jusque là des exercices de mécanique pour lesquels les frottements de travaillaient pas (cf. [10], p. 108). Dans le cas général où les frottements travaillent, les lois de Coulomb impliquent qu'ils soient dissipatifs. Traiter l'exemple de l'expérience de mesure de  $f_d$  par application successives du TEC.

**Expérience : Faire l'expérience de mesure du frottement dynamique comme décrite dans le montage MP01. Prendre un point devant le jury (ou pas selon le temps) et montrer qu'on vérifie le résultat que l'on vient de trouver.**

Les frottements n'ont pas un effet systématiquement négatif sur le frottement, l'exemple de la voiture est bien interprété dans [10], p. 108 pour expliquer que sans frottement on ne pourrait pas engendrer de mouvement!

**Transition :** On a fait le tour de la question et décrit correctement les actions de contact entre deux solides. On a traité des exemples simples mais il y a de nombreuses situations physiques dans lesquelles les frottements font apparaître une phénoménologie nouvelle.

## 3 Oscillateur amorti par frottements solides

Le problème est intégralement traité dans [40], p. 263. On commence par le présenter correctement.

### 3.1 Positions d'équilibre de l'oscillateur

Discuter proprement du début du mouvement avec les lois de Coulomb. A quelle condition y a-t-il équilibre? A quelle condition y a-t-il mouvement? En déduire l'existence non pas d'une position particulière mais d'une **plage d'équilibre de l'oscillateur**. On suppose par la suite que le mouvement commence hors de la plage d'équilibre (...).



### 3.2 Équation du mouvement

Trouver l'équation du mouvement en fonction du signe de  $\dot{x}$ . Au début,  $x$  diminue donc  $\dot{x} < 0$  et l'équation du mouvement est  $m\ddot{x} = -kx + fmg$ . On peut exprimer la solution et on trouve que c'est un arc de sinus centré non pas sur 0 comme pour un oscillateur harmonique mais sur  $X$ ! On descend donc moins bas que ce qu'on devrait du fait de la dissipation d'énergie due à la force de frottement. De la même manière, lorsque  $x$  augmente on a un nouvel arc de sinus dont le centre est  $-X$  et on remonte moins haut que prévu. Bien sûr, on change de phase à chaque fois que la vitesse s'annule.

### 3.3 Représentation graphique du mouvement

Dans le graphe  $(x, t)$  on a des arches de sinus de même période mais successivement centré sur  $X$  ou  $-X$  (cf. [40], p. 265) et le mouvement s'arrête lorsque la vitesse s'annule et que l'oscillateur est dans la plage d'équilibre.

La même interprétation peut être proposée, pour finir, sur le portrait de phase : on a des demi-cercles centrés sur  $\pm X$  dont le centre change à chaque fois que  $\dot{x} = 0$  et le mouvement s'arrête lorsque  $\dot{x} = 0$  et que  $x \in [-X; X]$ . Voir le graphe dans le BUP sur le portrait de phase des oscillateurs.

Remarque : Une autre phénoménologie nouvelle que l'on peut abordée est la décroissance linéaire de l'enveloppe contrairement au cas du frottement fluide pour lequel la décroissance est exponentielle. On peut se servir des deux programmes [Python Oscillateur\\_Amorti\\_Fluide](#) et [Oscillateur\\_Amorti\\_Solide](#) pour mettre en évidence cette différence.

**Conclusion** : Les forces de frottements sont partout et si nous sommes souvent amenés à les négliger c'est parce que leur traitement est délicat, voire souvent impossible à mener de manière exacte. Lorsque c'est le cas elles apportent une phénoménologie nouvelle dans les problèmes de physique comme on l'a illustré dans cette leçon. On peut ouvrir sur le fait que les lois de coulomb composent un modèle simpliste et que la réalité est nettement plus complexe : les coefficients dépendent de la vitesse, etc... cf. description microscopique! On peut aussi ouvrir sur l'exemple du fixe-glisser qu'on a pas traité ici.

#### BONUS :

1. La contribution d'Amontons aux lois du frottement solide a consisté à démontrer, en 1699, par l'expérience, que  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  ne dépendent pas de la surface de contact entre les solides.
2. On trouve sur internet un cours très complet sur le sujet, celui de la MP3 du lycée Montaigne de Bordeaux.
3. L'exemple du fixe-glisser, si on veut l'inclure dans cette leçon, est clairement exposé dans [10], p. 109.



## LP n° 2 : Gravitation.

### NIVEAU :

Je choisis de placer cette leçon au niveau Licence car il me paraît utile de discuter de la forme des trajectoires et de leur équation, ce qui sort du programme officiel des classes préparatoires. De plus, on peut voir cette leçon comme le début logique d'un cours sur la relativité qu'il n'est pas cohérent de faire en CPGE.

### PRÉREQUIS :

- Mécanique du point (Lois de Newton, aspect énergétique, cinématique en cylindrique, moment cinétique, ...)
- Électrostatique

### PLAN :

1. L'interaction gravitationnelle
2. Mouvement dans un champ de gravitation
3. L'interaction gravitationnelle dans le système solaire

### BIBLIOGRAPHIE :

- [9] *Mécanique, Tome 1*. Bertin-Faroux-Renault.
- [15] P. Brasselet, *Mécanique. PCSI-MPSI*.
- [57] *Mécanique. Fondements et applications*. J.-P. Pérez.
- [63] *Physique PCSI, Tout-en-un* Dunod, Nouveau programme
- [67] *Physique MPSI, Tout-en-un* Dunod, Ancien programme

### IDÉES À FAIRE PASSER :

La gravitation est un problème a priori compliqué à l'échelle du système solaire (tout le monde attire tout le monde) mais ramené au problème a deux corps (ce qui est déjà une bonne approximation), c'est un des rares sujets maximalelement intégrables de la physique.

**Introduction :** Reprendre efficacement l'aspect historique avec les [slides](#) en parallèle :

- Claude Ptolémée, dans l'antiquité, recueille des données sur les positions des astres dans le ciel, la datation des éclipses etc...
- Nicolas Copernic développe et défend la théorie de l'héliocentrisme.
- Galilée reprend la thèse copernicienne et développe les outils d'observation (lunette astronomique) de précision pour obtenir de meilleures données.

Finalement, les relevés majeurs de l'époque sont surtout dus à l'astronome danois Tycho Brahe (1546 - 1601) et c'est l'allemand Johannes Kepler qui parvient à unifier ces observations sous trois lois majeures - voir [slide](#).

S'appuyant sur ces travaux, Newton postule la loi de la gravitation universelle et parvient à démontrer les résultats de Kepler vers 1687. C'est l'objectif de cette leçon que de retrouver ces démonstrations.

## 1 L'interaction gravitationnelle

### 1.1 Force et énergie gravitationnelle

[57], p. 71 - et [63], p. 621-622 - Schéma de la situation étudiée (interaction de deux corps distants de  $r$  (penser à mettre les vecteurs  $\vec{F}$  et  $\vec{u}$ ) - Expression de la force - Valeur de la constante de gravitation universelle  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  - Expression en coordonnées sphérique - Travail élémentaire, expression de l'énergie potentielle  $E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ .

### 1.2 Le champ gravitationnel

[57], p. 71 - On procède par analogie avec l'électrostatique. **Il faut s'entraîner à dire cette partie pour la rendre efficace!**

On a la force gravitationnelle et on connaît déjà l'interaction coulombienne : elles ont la même forme - Or à l'interaction coulombienne on a associé le champ électrostatique de sorte que  $\vec{F} = q \vec{E}$  - On connaît l'expression de  $\vec{E}$  pour une charge ponctuelle - Si on définit le champ de pesanteur par analogie  $\vec{G}(r) = \dots$  - On vérifie que  $\vec{F}(r) = m \vec{G}(r)$ . Conclure quand même cette partie en écrivant le champ gravitationnel au tableau!

### 1.3 Interaction gravitationnelle à l'extérieur d'un corps sphérique

Dans le prolongement de la partie précédente on applique le théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{intérieure à la surface}}$$

à un corps sphérique de rayon non nul, mais en un point qui lui est extérieur. On trouve l'expression du champ de gravitation en ce point et on reconnaît celui d'une même masse assimilée à un point. Pratique pour la suite et l'étude des astres!

---

**Transition :** Quel est alors le mouvement d'une particule massive dans un champ de gravitation ?

---

## 2 Mouvement dans un champ de gravitation

### 2.1 Loi des aires

A priori il faut travailler dans le référentiel barycentrique, mais vu les rapport des masses du soleil et de la terre on va considérer qu'il est confondu au référentiel héliocentrique. (D'ailleurs, c'est encore plus le cas avec terre/satellite!) - Voir [67], p.736 pour une critique de cette modélisation.

Dans ce cadre on applique le TMC pour montrer que le moment cinétique est conservé : le mouvement est plan et la vitesse aréolaire est constante (faire la démonstration en exprimant l'aire balayée par le produit vectoriel :  $A(t) = |\overrightarrow{OM}(t) \wedge \overrightarrow{OM}(t + dt)|$ , voir [63], p.751).

### 2.2 Étude qualitative du mouvement

$r^2\dot{\theta}$  étant constante, on isole le mouvement radial dans l'énergie mécanique. On fait apparaître l'énergie potentielle efficace sous la forme

$$E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r}$$

On présente sur [slide](#) les états liés, et de diffusion.

### 2.3 Équation de la trajectoire

Introduction du vecteur de Runge-Lenz, conservation, et établissement de la trajectoire. Voir [67].

---

**Transition :** On a retrouvé deux des trois lois de Kepler dans le cas très général de corps en interaction gravitationnelle. Pour obtenir la troisième, propre au système solaire, il nous faut entrer un peu plus dans le détail du système.

---

## 3 L'interaction gravitationnelle dans le système solaire

### 3.1 Mouvement des planètes autour du soleil

Il reste à démontrer la troisième loi de Kepler. Le faire ([67], p. 738), et faire l'ajustement (linéaire, en log-log) des données de [15], p.238 déjà mises sur [slides](#) pour montrer que ça marche effectivement! Retrouver la valeur de  $G$ .

### 3.2 Influence de la gravitation sur le lancement d'un satellite

Cette partie peut aisément sauter si besoin!

On calcule ([67], p.745) la première vitesse cosmique, vitesse de satellisation, sur la trajectoire circulaire de rayon  $R_T$ ; puis la deuxième vitesse cosmique, vitesse de libération, vitesse minimale pour annuler  $E_m$  et sortir de l'influence gravitationnelle de la terre.

---

**Conclusion :** Cette leçon nous a permis de redéfinir proprement les grandeurs et phénomènes associés à celle des quatre interactions fondamentales qui régit les grandes échelles : la gravitation. Nous avons pu décrire efficacement l'évolution des systèmes stellaires mais c'est en fait plutôt surprenant : nous n'avons jamais posé la question de la vectorisation de cette force! Quelle est la particule vecteur de la gravitation? Comment se propage-t-elle dans le temps et l'espace? Autant de questions qui nécessitent la théorie de la relativité générale pour être résolues.

**BONUS :** \_\_\_\_\_

---

1. **Quelques mots de RG :** La relativité générale est une théorie non linéaire. Elle repose sur l'identification (Einstein, 1905) des masses inertielle (la masse du terme  $ma$ ) et grave (celle du  $mg$ ). Cette identification n'a rien d'évident (même si elle nous semble évidente du fait qu'on l'a toujours conçue comme telle), et est aujourd'hui vérifiée expérimentalement à une très bonne précision ( $10^{-12}$  près, d'après Wikipédia...). C'est ce principe d'équivalence « force = accélération » qui mène à l'établissement de la RG. Une correction classique est l'apparition d'un terme en  $1/r^3$  dans l'énergie potentielle effective qui permet d'ailleurs de démontrer la précession du périhélie de mercure. La linéarisation de cette théorie mène à l'équation de propagation des ondes gravitationnelles (Prix Nobel 2017).
2. **Sur l'analogie électrostatique et ses limites :**
  - Comme la charge est positive ou négative, l'interaction Coulombienne peut être attractive ou répulsive, là où l'interaction gravitationnelle est systématiquement attractive du fait de  $m > 0$ . D'ailleurs, deux charges de même signe se repoussent!
  - Différence importante d'échelle : l'électrostatique régit l'échelle atomique, alors que la gravitation régit le mouvement des corps célestes.
  - $\vec{E}$  dépendant du temps engendre  $\vec{B}$ , mais pas d'équivalent pour le champ de gravitation. D'ailleurs, l'électromagnétisme est à l'électrostatique ce que la relativité générale est à la gravitation : l'élargissement de la théorie aux particules en mouvement.
  - L'appendice 1 de [9] fait exactement le raisonnement inverse, partant des lois de Kepler pour remonter aux propriétés de la gravitation.
3. On trouve dans [15], p.30 une définition détaillée de la masse.



# LP n° 3 : Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

**NIVEAU :** CPGE

Cette leçon est confortablement inscrite dans le programme de PC.

**PRÉREQUIS :**

- Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}(O'/\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(O'/\mathcal{R})$$

- Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \Omega^2 \overrightarrow{HM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$$

- Dynamique en référentiel non galiléen (forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis).

**PLAN :**

1. Description d'un mouvement au voisinage de la terre
2. Conséquences des termes d'entraînement
3. Conséquences de la force de Coriolis

1. [15] P. Brasselet, *Mécanique PCSI-MPSI*. Incontournable.
2. [54] *La physique par la pratique*, B. Portelli.
3. [57] J.P. Pérez, *Mécanique. Fondements et applications* (2001)
4. [10] *Mécanique 2*, Bertin-Faroux-Renault (1985)

**BIBLIOGRAPHIE :**

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

on a déjà vu la dynamique en référentiel non galiléen. Cette leçon est l'occasion de s'interroger sur la réciprocity du caractère galiléen et les critères subséquents.

**Introduction :** On a supposé dans les cours précédents que le référentiel terrestre était galiléen, on a fait des modélisations avec ce système : on a négligé les effets des autres astres sur la terre ainsi que le mouvement propre de la terre. Mais pour expliquer les phénomènes qui nous entourent, on a besoin de prendre en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre. On va voir comment quantifier.

## 1 Description d'un mouvement au voisinage de la terre

### 1.1 Référentiels disponibles pour la description du mouvement

On considère des mouvements à l'échelle de la planète pour lesquels la rotondité de la terre ne peut être négligée et dont la description ne peut être menée dans le référentiel du laboratoire. Définir les référentiels de Copernic, géocentrique et terrestre. C'est ce dernier qui est le plus adapté à la description du mouvement mais peut-il être considéré galiléen?

Voir la discussion de [15], p. 158 - Le référentiel terrestre est en rotation propre dans  $R_G$  et ne peut donc pas être galiléen. Quid de  $R_G$ ? Décrire son mouvement dans  $R_C$  et quantifier son caractère galiléen en ... De même, quid de  $R_C$ ? Décrire son mouvement dans la galaxie et quantifier son caractère galiléen en...

Dans le cadre de notre étude on supposera que le référentiel de Copernic est galiléen et le mouvement étudié sera décrit à partir de ce référentiel de référence.

### 1.2 Dynamique dans le référentiel terrestre

[54], p. 18, questions I.11 et II.1 - Écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre en prenant pour référentiel galiléen de référence le référentiel de Copernic. Commenter rigoureusement chaque terme.

### 1.3 Importance relative des termes inertiels

[54], p. 18, questions II.2-3-4 - Prendre les termes inertiels un à un et en évaluer rapidement des ordres de grandeurs. Mettre éventuellement les données utiles sur slide. Pour le terme de marées, voir aussi [15], p. 163.

**Transition :** Par la suite on va discuter des conséquences de chaque terme. On commence par regarder l'effet du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur un objet immobile au voisinage de la terre.

## 2 Conséquences de la force d'entraînement

### 2.1 Entraînement dû à la translation de la terre autour du soleil, les marées

Rappeler de quel terme on parle ici et constater qu'il est dû au mouvement de la terre autour du soleil indépendamment de son mouvement propre, on a déjà fait le DL dans la partie I.1. et évalué les ordres de grandeurs associés. Expliquer le phénomène des marées à partir de [15], p. 165. La figure VI-5 de cette page est essentielle à faire au tableau pour comprendre l'aspect différentiel de l'effet de marées, et le fait qu'il y ait deux marées par jour. On peut prolonger l'explication (voir toujours [15] dans les pages suivantes : 166, 167, ...) selon le temps disponible.

Il me semble intéressant de ne pas pousser trop loin sur les marées mais d'évoquer la réciproque, limite de roche, in [15], p. 173.

### 2.2 Entraînement induit par la rotation propre de la terre, pesanteur

[15], p. 176-178 - Identifier la rotation propre de la terre comme origine du terme qui nous intéresse ici. Définir proprement le poids et le champ de pesanteur terrestre. Discuter de la direction de  $\vec{g}$  et évoquer éventuellement le fait que prendre en compte cette correction n'a pas de sens si on ne prend pas aussi celle due à la non sphéricité de la terre qui est à peu près du même ordre de grandeur.

**Transition :** Comment l'aspect non galiléen du référentiel terrestre modifie-t-il le mouvement d'un corps dans son voisinage?

## 3 Conséquences de la force de Coriolis

### 3.1 Ordre de grandeur et expression de la force

Voir [15], p. 178-179. Être bref, on se donne juste les outils pour faire la suite efficacement.

### 3.2 Effet sur un mouvement vertical, déviation vers l'est

Combiner [15], p. 181 et [57], p. 113 pour expliquer l'expérience de Reich.

On fait le traitement perturbatif en considérant  $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$  comme une perturbation du cas galiléen. Le pfd s'écrit  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{ic}$  soit à l'ordre 0 :  $x_0 = y_0 = 0$  et  $z_0(t) = -gt^2/2 + h$ . On se sert de cette expression pour estimer  $\vec{F}_{ic} = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}_0 + \dot{x}_1 \\ \dot{y}_0 + \dot{y}_1 \\ \dot{z}_0 + \dot{z}_1 \end{pmatrix}$  de sorte qu'à l'ordre 1,  $\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\Omega \cos(\lambda) \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = 0 \end{cases}$  donc  $x_1 = \Omega \cos(\lambda) gt^3/3$  et  $\Delta x = x_1 = \Omega \cos(\lambda) g \frac{1}{3} \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} > 0$  et la déviation s'effectue vers l'est! (Une AN. pour Reich donne 2,8 cm).

Il faut insister sur le fait que ça a été, avec le pendule de Foucault, une des premières preuves irréfutables du mouvement de rotation propre de la terre!

### 3.3 Effet sur un mouvement horizontal, le vent géostrophique

[54], p. 94 - A détailler plus ou moins selon le temps restant. On veut montrer comment la force de Coriolis est au cœur de l'étude du comportement de la dynamique des vents. A partir d'une approximation (géostrophique), on interprète les situations cycloniques et anticycloniques. Il faut au moins donner Navier-Stokes. Définir le nombre de Rossby, donner un O<sub>dg</sub> pour la terre, et négliger l'accélération convective devant la force de Coriolis dans l'approximation géostrophique. Arriver à l'équilibre géostrophique (Rôle majeur de la force de Coriolis!). le vent souffle parallèlement aux isobares, en déduire les deux conditions cyclonique et anti-cyclonique et comparer aux photos. PWP



**Conclusion :** [10], p. 149 - On a donc vu les effets non négligeables du caractère non Galiléen du référentiel terrestre : déviation vers l'est, cyclones, marées... on a une autre utilité de la force de Coriolis : détermination de la direction du pôle Nord.

**BONUS :**

---

- A toutes fins utiles, la formule de dérivation vectorielle en changement de référentiel est rappelée dans [15], p. 18 et les lois de compositions dans le cas le plus général d'un changement de référentiel quelconque sont données dans [15], pp. 19-20.
- La limite de la description statique du phénomène de marées est évoquée dans [54], p. 38, question 10.
- Phénomène de marée : déforme le manteau terrestre et cette déformation provoque une modification de la vitesse de rotation de la terre. Pour conserver le moment cinétique du système Terre-Lune, la lune s'éloigne de la terre d'environ 3,8 cm/an.
- Relire dans [15] : jour solaire/sidéral, précession des équinoxes, théorie dynamique des marées



# LP n° 4 : Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.

NIVEAU : LICENCE

PRÉREQUIS :

- Mécanique du point et du solide (théorèmes généraux)
- A compléter selon les besoins en méca Q.

PLAN :

1. Mouvement de précession
2. Conséquences dans le domaine macroscopique
3. Conséquences dans le domaine microscopique

BIBLIOGRAPHIE :

- [57] J.-P. Pérez, *Mécanique*, 7e édition.
- [10] Mécanique 2, Bertin-Faroux-Renault (1984).
- [8] Électromagnétisme 4 : milieux diélectriques et milieux aimantés, Bertin-Faroux-Renault (1984)
- [15] P. Brasselet, *Mécanique. PCSI - MPSI*, PUF (2000)
- Mon dossier de M2 sur la RMN

IDÉES À FAIRE PASSER :

La précession est un phénomène très répandu en physique mais compliqué. On se place généralement dans l'approximation gyroscopique pour la simplifier et mettre en évidence son caractère paradoxal.

**Introduction :** L'intérêt de la description du mouvement de précession par du constat d'un paradoxe dans le mouvement d'un solide en rotation autour d'un point fixe :

**Expérience :** La toupie, lorsqu'elle tourne sur elle-même très vite, ne tombe pas sous l'effet du poids. Mais elle tombe effectivement lorsqu'elle commence à ralentir.

C'est ce phénomène que l'on va essayer de comprendre dans cette leçon et ses conséquences dans différents domaines de la physique aux échelles macroscopique et microscopique.

**Note :** Il faudra bien prendre soin tout au long de la leçon de bien différencier la rotation de l'objet dans le référentiel galiléen, repérée par le vecteur  $\vec{\Omega}$ , de la précession de ce vecteur décrite par le vecteur  $\omega$ .

## 1 Mouvement de précession

### 1.1 Définition et propriétés de la précession

Définir proprement le mouvement de précession : Le vecteur  $\vec{A}$  précesse à vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $\vec{u}$  si  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$  et

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Démontrer alors les deux propriétés fondamentales : la norme de  $\vec{A}$  et conservée au cours d'un tel mouvement, de même que sa projection sur l'axe de précession  $\vec{A} \cdot \vec{u}$ . Le vecteur  $\vec{A}$  décrit donc un cône autour de  $\vec{\omega}$  d'angle au sommet déterminé par les conditions initiales.

La forme de l'équation de précession rappelle nettement celle du TMC... Est-ce qu'on peut le ramener à un tel mouvement?

### 1.2 Description du mouvement d'un solide autour d'un point fixe

Décrire le mouvement d'un solide avec un point fixe soumis seulement au poids - bien écrire les vecteurs correctement. Il reste à exprimer le moment cinétique mais a priori il est pas simple du tout : aucune rotation n'est bloquée dans ce problème.

Voir [57], chapitre sur la dynamique des systèmes (p. 315) - Exprimer le théorème du moment cinétique appliqué à un système matériel en un point  $O$  fixe dans le référentiel galiléen d'étude. Préciser les modifications dans le cas où le point n'est pas fixe et/ou le référentiel n'est pas galiléen. Voir quelques pages plus loin (III.4) pour préciser que dans le cas d'un solide indéformable il y a un lien direct entre moment cinétique et vitesse de rotation. Compléter avec la fin du chapitre 17 : le lien est appelé opérateur d'inertie et est a priori non symétrique de sorte que  $\vec{L}$  et  $\vec{\Omega}$  ne sont pas alignés.

### 1.3 Approximation gyroscopique

L'opérateur d'inertie étant symétrique, il est diagonalisable et les vecteurs d'une base dans laquelle l'opérateur est symétrique sont appelés axes principaux d'inertie (ils dépendent du solide et de sa forme, pas de son mouvement!). On peut alors exprimer le moment cinétique :  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_x + \dot{\psi}\vec{e}_y + \dot{\phi}\vec{e}_z$  et

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \vec{\Omega}$$

de sorte que dans le cas général  $\vec{L}$  et  $\vec{\Omega}$  ne sont pas alignés! SAUF si on est dans un cas agréable où une composante domine les autres, par exemples  $J_3\dot{\phi} \gg J_1\dot{\theta}, J_2\dot{\psi}$ ; cette condition est appelée **approximation gyroscopique**.

Prendre des exemples de solides en rotation dans l'approximation gyroscopique :

- Terre :  $J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2MR^2}{5}$  pour une boule, et  $\dot{\phi} = 1$  tr/jour mais  $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$  donc approximation gyroscopique parce que la vitesse de rotation selon un des axes propres est très grande devant les autres. C'est très souvent le cas!
- Faire l'ordre de grandeur pour le gyroscope.

terre

Dans ce cas favorable, le moment cinétique et le vecteur rotation sont alignés avec un des vecteurs propre du solide et ça va bien se passer

---

**Transition :**

---

## 2 Conséquence dans le domaine macroscopique

### 2.1 Effets gyroscopiques

On revient sur notre exemple de la toupie. [10], p. 144 - PWP schéma du problème de la toupie. On veut retrouver les affirmations suivantes :

- lorsque la toupie est en rotation rapide autour de son axe OG, cet axe OG décrit en général un cône autour de la verticale OZ à la vitesse angulaire  $\Psi$
- cette vitesse angulaire (vitesse de précession) est d'autant plus faible que la toupie tourne plus vite autour de OG.

L'approximation gyroscopique nous permet d'écrire  $L = J\omega$ . On calcule le moment du poids, on dérive le moment cinétique, en faisant attention que  $u$  est tournant. On écrit le TMC, on en déduit la vitesse de précession. OdG calcul de la vitesse de précession pour notre toupie. ( $a = 5$  cm,  $\omega = 30$  tr/s).

[10], p. 148 - Trois effets gyroscopiques : précession, couple de réaction à la contrainte exercée, modification des positions de stabilité. On explique donc ce qui semblait paradoxale : la toupie « résiste au poids »

### 2.2 La précession des équinoxes

On vient d'expliquer que soumis à un couple, un gyroscope précesse. La terre est soumise à un couple provenant de l'action de la Lune et du Soleil du fait de son aplatissement. Le mouvement qui en résulte est la précession des équinoxes.

Voir [57], chapitre 26, V.6 - Commencer par exposer ce que sont les équinoxes. Donner le moment des actions gravitationnelles des autres axes sur la terre déformée et interpréter les différents termes (lire d'où vient le moment pour répondre aux questions mais pas besoin de le démontrer ici). Applications numériques. \_\_\_\_\_

**Transition :** On a fait l'étude des mouvements de système à notre échelle (toupie) et à grande échelle (terre dans système solaire), que se passe-t-il à petite échelle (micro)?

---

## 3 Conséquence dans le domaine microscopique

On doit pouvoir s'en sortir avec le [57] et mon dossier de M2 (sur le site de ressource de Montrouge).

### 3.1 Influence d'un champ magnétique sur le mouvement d'un spin

Voir [57], chap 26, VII - Ecrire le TMC pour un moment magnétique, faire le modèle de Bohr pour montrer la proportionnalité entre moment cinétique orbital et moment magnétique. La mécanique quantique permet de généraliser rigoureusement ce résultat (cf. [8], pp. 148 & 155, et LP45) SANS APPROXIMATION! - C'est la grande force de la méca Q sur la méca classique : la proportionnalité entre moment cinétique et moment de la force apparaît sans approximation aucune. On va donc voir apparaître à nouveau un mouvement de précession.

### 3.2 Précession de Larmor

[57], idem - Injecter la relation dans le TMC, aboutir à la précession de Larmor, donner la pulsation et DES ORDRES DE GRANDEUR. Relaxation sous l'effet des « frottements » (agitation thermique notamment). On aboutit à un système de  $N$  spins alignés ou contre-alignés avec le champ magnétique : levée de dégénérescence des niveaux d'énergie mais en moyenne l'aimantation est beaucoup trop faible pour être détectée il faut donc la faire varier pour la détecter par induction.

### 3.3 Utilisation de la RMN

Influence du champ tournant, condition de résonance. [Programme python RMN\\_Classique](#) pour montrer que l'amplitude de vibration est maximale à la résonance donc facilement détectable.

**Conclusion :** on a vu l'utilité du mouvement gyroscopique à deux échelles différentes. Il y a une différence entre les deux, on n'a pas besoin d'approximation gyroscopique dans le modèle quantique car le spin est directement proportionnel au moment cinétique.

**BONUS :**

1. Toupie : degrés de liberté bloqués car peut tourner que sur une demi sphère donc pour le gyroscope, on le pose sur un axe, on a une liaison cardan qui permet d'accéder à tous les degrés de liberté.
2. On appelle moment d'inertie les éléments de la diagonal de l'opérateur  $I$  et produits d'inertie les autres éléments.
3. L'équation de précession pour la toupie s'obtient grâce à l'approximation gyroscopique, on peut écrire que  $\vec{OM} = /L_0 \vec{L}_0$ .



## LP n° 5 : Lois de conservation en dynamique.

### NIVEAU : CPGE

---

Cette leçon ne correspond pas directement à un paragraphe du programme de CPGE mais y apparaît par morceaux. En revanche, le problème à deux corps est explicitement traité au programme de sup.

### PRÉREQUIS :

---

- Théorèmes généraux de mécanique du point et du solide

### PLAN :

---

1. Conservation de la quantité de mouvement
2. Conservation du moment cinétique
3. Conservation de l'énergie

### BIBLIOGRAPHIE :

---

- [13] Bocquet, Faroux, Renault, *Toute la mécanique.*
- [15] P. Brasselet, *Mécanique PCSI-MPSI.*
- [40] H. Gié, *Physique Spé. MP\*, MP et PT\*, PT.*
- [57] J.-P. Pérez, *Mécanique. Fondements et applications.*
- [72] C. Semay, *Relativité restreinte. Bases et applications.*

### IDÉES À FAIRE PASSER :

---

Les lois de conservation sont très importantes en dynamique en cela qu'elles permettent souvent de pouvoir résoudre des problèmes (a minima de relier l'état final aux conditions initiales) sans s'intéresser ni connaître les états intermédiaires et la description précise des interactions en jeu.

---

**Introduction :** On a rencontré jusqu'ici une panoplie de lois, dites lois de la dynamique, qui nous permettent de faire le lien entre la variation d'une quantité et les causes de cette variation (principe fondamental de la dynamique, théorème de l'énergie mécanique, théorème du moment cinétique,...). Dans les cas particuliers où le terme de cause est nul, on met en évidence une grandeur dont la valeur (norme, direction et sens) est constante dans le temps. On parle alors de loi de conservation.

## 1 Conservation de la quantité de mouvement

### 1.1 Origine de la conservation

On commence par l'équation que les élèves connaissent le mieux : le principe fondamental de la dynamique. L'écrire d'abord sous la forme usuelle  $m\vec{a}$  et rappeler que fondamentalement c'est plutôt  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$ , discuter des conditions d'annulation du second membre et aboutir à la conservation de la quantité de mouvement. Voir [15], p. 36 et évoquer la conservation des composantes si le vecteur unitaire est constant.

### 1.2 Illustration

Pas de référence - Traiter l'exemple du bonhomme qui marche d'un bout à l'autre d'une barque flottant sans frottement sur l'eau d'un lac. On se demande de quelle distance la barque a bougé pendant le mouvement. On trouve par application de la conservation de la quantité de mouvement entre l'instant où tout est immobile et l'instant où le bonhomme marche,

$$l_{\text{déplacement}} = L_{\text{barque}} m_{\text{bonhomme}} / m_{\text{barque}}$$

Il est ici question de montrer pour la première fois que les lois de conservation nous permettent de dire des choses sur un mouvement dont la description précise nous est inaccessible. En effet, au premier abord on aurait pu chercher à décrire les frottement entre les pieds et la barque, appliquer les actions réciproque etc...

### 1.3 Référentiel barycentrique et mobile fictif

Définition et caractère galiléen du référentiel barycentrique. Quantité de mouvement nulle dans ce référentiel.

### Transition :

---

## 2 Conservation du moment cinétique

### 2.1 Origine de la conservation

[15], p. 39 - Reprendre l'énoncé du théorème du moment cinétique et exprimer les conditions de conservation du moment cinétique. La remarque fin de page de [15], p. 40 sur l'apport du TMC par rapport au pfd est fort intéressante et peut être discutée ici.

### 2.2 Illustration

Traiter l'exemple classique de la danseuse qui déplie et replie les bras. Voir par exemple [57], p. 324. Noter que  $J$  varie en  $l^2$  on a rapidement un gros changement de vitesse. Trouver le facteur d'accélération ( $\approx 5$  fois plus vite) en ordre de grandeur.

### 2.3 Forces centrales et loi des aires

Voir [15], p. 41-42 ou [67], p. 695 - On se place dans le plan polaire. Utiliser le TMC dans le système isolé, étude de la force centrale parallèle à la direction d'application; le moment est nul et le moment cinétique se conserve. Donner l'expression du moment cinétique et traiter les deux cas  $C = 0$  et  $C \neq 0$ . Définir la constante des aires.

---

**Transition :** Last but not least... LA loi de conservation par définition en mécanique c'est la conservation de l'énergie. J'aurais aimé la mettre en deuxième mais ça pose problème avec le système à deux corps car il faut d'abord avoir démontré que le mouvement est plan pour se placer en coordonnées polaires et étudier les trajectoires...

---

## 3 Conservation de l'énergie mécanique

### 3.1 Origine de la conservation

Reprendre rapidement la définition des forces conservatives ([15], p. 73), l'application du théorème de l'énergie mécanique ([15], p. 76) et aboutir à la conservation de l'énergie ([15], p. 77).

Discuter du fait que dans les problèmes de mécanique réels il y a toujours des frottements donc que la conservation de l'énergie est toujours une approximation plus ou moins bonne selon les cas. Prendre l'exemple de la chute libre de la balle de golf et discuter des deux phases du mouvement :

- Pendant la chute libre seul le poids s'exerce, conservatif, donc il y a conservation de l'énergie mécanique.
- Lors des chocs il peut y avoir variation de l'énergie cinétique. Introduire le coefficient de restitution évoquer les chocs élastiques pour lesquels  $e = 1$ . Voir [13], p. 195.

Expérience : Avoir fait en préparation l'expérience et le traitement des rebonds de la balle de golf, voir (MP01) pour la procédure. On a tracé l'énergie mécanique de la balle en fonction du temps et on peut faire deux constats en rapport avec cette leçon :

- L'énergie mécanique est effectivement conservée en première approximation lors de la phase de chute libre
- Lors du rebond, de l'énergie est dissipée de sorte que les chocs ne sont pas élastiques. On pourrait d'ailleurs démontrer expérimentalement que le coefficient de restitution est bien constant (il ne dépend *a priori* que des matériaux!)

Remarque : C'est peut être l'occasion de préciser que contrairement aux deux autres L'ÉNERGIE EST UNE GRANDEUR CONSERVÉE et que si l'énergie mécanique varie c'est qu'il y a conversion depuis ou vers une autre forme d'énergie (thermique, interne, ...)

### 3.2 Illustration

Traiter l'effet Compton par conservation de l'énergie ET de la quantité de mouvement. Voir [72], p. 214 et leçons de relativité si besoin. Évidemment ici on n'a pas le formalisme quadri-vectoriel à disposition...



### 3.3 Caractérisation graphique des trajectoires

Voir [15], à partir de la page 227 - On reprend le problème à deux corps et on exprime l'énergie mécanique du système. Cela permet de discuter en détail la forme des trajectoires selon les cas d'interaction considérés.

**Conclusion :** On a ici illustré les trois lois de conservation à connaître dans le cadre du programme de prépa. Au delà des lois en soit il faut surtout retenir leur efficacité pour traiter un certain nombre de problèmes a priori compliqués soit parce que la description des interactions est inaccessible, soit par ce que le mouvement est intrinsèquement complexe du fait du grand nombre de degrés de liberté. Ouvrir au choix sur le lien avec les invariance, c'est bien écrit dans [40], p. 313 ou sur les systèmes intégrables ([57], p. 413).

#### BONUS :

- Sans prétendre devenir subitement un spécialiste ni de la mécanique quantique ni des symétries en physique, il me semble assez incontournable d'aller lire l'article Wikipédia au sujet du vecteur de Runge-Lenz car les questions viendront probablement tourner autour du sujet. Cela dit, hors de question de parler de cela dans la leçon, on n'est plus du tout dans l'esprit du programme actuel!
- L'application des lois de conservation au mouvement à forces centrales et au problème à deux corps fait l'objet d'un chapitre consacré dans [13], à partir de la page 122.
- Je m'aperçois a posteriori que les lois de conservation en mécanique font l'objet d'un chapitre (M7) du Gié de MP/MP\* [40]. Il faut au moins aller y lire le paragraphe sur le lien avec la thermodynamique (p. 310) et le paragraphe sur le lien avec les invariance et le théorème de Noether (p. 313).
- Voir aussi, dans le Pérez de mécanique ([57], p. 413) le paragraphe sur les systèmes intégrables.
- Il manque peut-être la notion d'intégrale première du mouvement à faire apparaître dans cette leçon, voir [10], p. 79.
- **ATTENTION!** Lorsqu'on parle d'invariance, il faut s'entendre sur le fait que ça doit être le **potentiel** qui doit être invariant et non les forces. La raison c'est que le théorème de Noether considère les lagrangiens (donc énergie). Un contre-exemple : la chute libre! La force est invariante par translation verticale, pour autant l'impulsion selon cet axe n'est pas satisfaite.
- Enfin il faut avoir à l'esprit, dans cette leçon, la distinction entre grandeurs conservées et grandeurs conservatives. Les premières sont conservées par « le hasard des choses » : le système est isolé, les actions se compensent, il se trouve que la grandeur en question ne varie pas. Les secondes sont conservatives car elles ne peuvent être intrinsèquement créées ou consommées par le système. Elles ne peuvent donc apparaître que par échange. La charge, la matière (dans une certaine limite) et l'énergie totale du système sont des grandeurs conservatives mais l'impulsion, le moment cinétique et l'énergie MÉCANIQUE du système sont des grandeurs éventuellement conservées.



# LP n° 6 : Cinématique relativiste.

NIVEAU : LICENCE 3

---

## PRÉREQUIS :

- Mécanique Classique/Newtonienne
- Interféromètre de Michelson
- Électromagnétisme & Équations de Maxwell.

## PLAN :

1. Une évolution pour la mécanique newtonienne
2. Intervalle entre deux événements
3. Lois de composition en cinématique relativiste

## BIBLIOGRAPHIE :

- [9] BFR, *Mécanique 1*. Il faut prendre l'édition de 1984 car celle de 1976 ne traite pas la relativité!
- [12] Article original de Bertozzi décrivant son expérience et les résultats.
- [43] J. Hladik, *Introduction à la relativité restreinte*.
- [59] J.-P. Perez, *Relativité. Fondements et applications*.
- [72] C. Semay, *Relativité restreinte, bases et applications*.
- Cours de relativité d'A. Comtet, notamment pour la démonstration de Lorentz.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

La mécanique classique ne suffit pas à expliquer certains événements. Elle est l'approximation à faible vitesse d'une théorie mécanique plus générale : la mécanique relativiste, qui implique de ne plus considérer le temps comme variable absolue.

*Remarque : je pense que ça peut valoir le coup, dès le début de la leçon, de préciser qu'on a aucune prétention à démontrer rigoureusement les résultats de relativité, mais de faire sentir l'esprit de l'élargissement de la théorie de la mécanique newtonienne vers la relativité générale.*

**Introduction :** Dans l'étude de la mécanique on a fait sans le dire une hypothèse systématique de vitesse faible, et c'est ce qui nous a permis d'appliquer systématiquement la mécanique newtonienne. Le but de cette leçon est de voir en quoi celle-ci donne des résultats aberrants à vitesses élevées, et comment passer outre ces aberrations. Comme son nom l'indique on va porter un intérêt majeur à la relativité du mouvement ce qui implique d'avoir défini au préalable les notions d'observateur (qui regarde), de référentiel (par rapport à quoi il décrit le mouvement), de repère (comment il exprime la position du point dans l'espace) et d'évènement (analogue au point de la mécanique classique prolongé dans la dimension temporelle). Voir [slide](#).

## 1 Une évolution pour la mécanique classique

**C'est une partie pédagogiquement cruciale pour faire sentir le besoin d'élaborer une théorie plus large!**

### 1.1 Incompatibilité de l'électromagnétisme avec la transformation de Galilée

Rappeler la transformation de Galilée sur les positions puis les vitesses et exposer son incompatibilité avec l'électromagnétisme car la vitesse de la lumière est définie indépendamment du référentiel [9], p. 215. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SONT INCOMPATIBLES AVEC LA TRANSFORMATION DE GALILÉE.

Une question se pose : qui de l'électromagnétisme ou de la mécanique doit être corrigé?

### 1.2 Invariance de la vitesse de la lumière

L'invariance de la vitesse de la lumière a été testée à plusieurs reprises : on présente l'expérience de Michelson & Morley (+[72], p.10 et [59], p.10) qui aboutit à l'invariance de la vitesse de la lumière. D'autres expériences plus modernes ont testé cette invariance et ont toutes abouti à la validation de cette hypothèse. On présentera plus tard une d'elle, l'expérience de Bertozzi.

Transition : Les scientifiques du début du XX, Einstein en tête, ont imposé cette règle comme postulat et développé, à partir de là, une nouvelle théorie du mouvement.

### 1.3 Les postulats d'Einstein

[9], p.219 - Énoncé du principe de relativité restreinte (voir détails sur ce principe [9], p. 212-213, exclure la gravitation et préciser qu'on ne s'intéresse qu'à des référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres), et de l'invariance de la vitesse de la lumière (il faut à ce stade définir ce qu'on entend par invariance : [9] pp.211-212 - La vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel. On dit que  $c$  est invariante). Évoquer un troisième principe de validité de la mécanique classique pour  $v \ll c$ .

*Remarque* : la présentation du postulat n°2 a un intérêt historique et simplifie les démonstrations, mais n'est pas incontournable pour établir les résultats de la théorie (cf. [43] p. 28).

---

**Transition** : On a mis en défaut la transformation de Galilée et montrer que le temps ne peut plus être considéré comme absolu. Dès lors, comment faire le lien entre les coordonnées d'un même événement dans des référentiels différents :  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  ?

---

## 2 Changement de référentiel en relativité

### 2.1 L'importance nouvelle du temps

Pour le voir simplement, c'est l'invariance de  $c$  qui rend le temps relatif. Pour le comprendre on peut traiter un premier exemple : l'horloge à photons ([72], p.16 & [59], p. 39-40) - Si on fait bien le schéma et qu'on expose clairement ce qui se passe, le calcul se résume à Pythagore et tout va bien. Il faut préciser :

- que si  $v = 0$ , on retrouve  $\Delta t = \Delta t'$  ;
- que le battement dans le référentiel (R) dans lequel l'horloge est en mouvement est plus long que celui dans le référentiel de l'horloge.
- l'importance du rapport numérique trouvé, appelé  $\gamma$  et dont l'importance apparaît nettement plus tard dans la leçon.

### 2.2 Invariance de l'intervalle

L'invariance de l'intervalle est déduite du second postulat d'Einstein, faire le calcul en exprimant la vitesse d'un signal lumineux dans un référentiel puis dans l'autre :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c = c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

On est alors ramené à chercher les changement de référentiel qui laissent cet intervalle invariant.

### 2.3 Transformation de Lorentz spéciale

Définition générale d'une transformation de Lorentz ([72] p.22). Sous quelques hypothèses sur l'espace-temps (cf [72] pp.27-33) on démontre la forme que doit prendre cette transformation restreinte à des référentiels en translation rectiligne uniforme (leurs axes restent alignés); on parle alors de transformation de Lorentz spéciale. Reconnaitre le facteur  $\gamma$  que l'on a déjà rencontré dans l'horloge à photon et le tracer en fonction de  $\beta$  ([slide](#) ou [programme Python](#)), quantifier un ordre de grandeur de la vitesse telle qu'il y ait un écart d'un certain pourcentage par rapport à Galilée. Remarquer que la transformation réciproque est simplement obtenue en inversant le sens de la vitesse  $v \rightarrow -v$ .

---

**Transition** : Comme toujours en physique, l'apparition d'une nouvelle théorie implique un certain nombre de conséquences dont la validité doit être testée expérimentalement.

---

## 3 Conséquences sur les lois de la cinématique

### 3.1 Durée et longueur entre deux événements

On a déjà vu l'impact de cette nouvelle théorie sur les durée lorsqu'on a étudié l'exemple de l'horloge à photon. Redonner la formule entre les durées dans chaque référentiel et insister sur le fait qu'il y a DILATATION DES TEMPS. Définir la notion cruciale de **temps propre**.

Faire de même sur les longueurs, traiter l'exemple usuel de la règle (cf. [59], p. 43) et montrer que les longueurs se contractent. Définir la notion de longueur propre.

La dernière question qui se pose légitimement est celle de la transformation des vitesse par changement de référentiel en relativité restreinte.

### 3.2 Lois de composition des vitesses

Selon le temps qui reste, démontrer ou simplement donner les lois de composition des composantes longitudinales et transversales de la vitesse (démonstration rapide dans [72] p.82). Retrouver galilée lorsque  $v \rightarrow 0$  et insister sur le fait que ces transformations ne sont valides que lorsque la vitesse relative des deux référentiels est CONSTANTE (c'est ce qui fera la différence avec la relativité générale). Montrer que la vitesse est limitée par la vitesse de la lumière et traiter l'expérience de Bertozzi (voir [slide](#) et article).

**Conclusion :** Après avoir établi le besoin de prolonger la mécanique newtonienne par une théorie relativiste lors de l'étude de mouvements à une vitesse proche de celle de la lumière, on a étudié les conséquences de cette nouvelle vision des choses sur la description du mouvement et l'importance nouvelle de bien définir référentiel, repère, temps etc... Maintenant une question se pose : comment est modifiée la dynamique? Le pfd est-il toujours valable?

#### BONUS :

- On peut aussi faire remarquer que l'avènement de la relativité ne signe pas l'arrêt de mort de la mécanique newtonienne : celle-ci reste tout à fait à propos pour la description des mouvements pour lesquels  $v \ll c$  (c'est notamment justifié par la courbe de  $\gamma = f(\beta)$  qui n'est notablement différent de 1 que pour des vitesses très élevées!)
- Un des aboutissement rapide de la relativité a été de faire apparaître, combinée à la mécanique quantique, la notion de spin (cf. Dirac, 1927). De la même manière que la relativité est née d'une incompatibilité avec l'électromagnétisme, la théorie quantique des champs, née de l'incompatibilité électromagnétisme/quantique a donné lieu aux interactions faibles et fortes.
- Comme toujours dans l'enseignement de la physique on aborde chaque sujet en faisant d'abord un maximum d'hypothèses simplificatrices pour que le problème puisse être traité à un niveau élémentaire, puis au cours du parcours scolaire on lève petit à petit un certains nombres de simplification pour découvrir la théorie plus générale qui sous-tend chaque sujet. Ça n'est pas pour autant que ce qu'on faisait précédemment était faux mais cela ne s'appliquait que dans certains cas précis comme dans le cas de l'optique géométrique devenu ondulatoire pour palier le problème de la diffraction.
- On peut se servir du programme associé à cette leçon pour tracer  $\gamma$  mais ça n'apporte pas grand chose... Sauf si on veut zoomer sur une partie de la courbe en particulier.



# LP n° 7 : Dynamique relativiste.

NIVEAU : LICENCE 3

PRÉREQUIS :

- Cinématique relativiste
- Mécanique Classique
- Mouvement de particules chargées

PLAN :

1. Formalisme quadri-vectriel
2. Lois de la dynamique relativiste

BIBLIOGRAPHIE :

- [9] BFR, *Mécanique 1*. Il faut prendre l'édition de 1984 car celle de 1976 ne traite pas la relativité!
- [72] C. Semay, *Relativité restreinte, bases et applications*.
- [61] Polycopié de cours de Jean-Michel Raymond
- [12] Article de Bertozzi
- Cours de relativité d'A. Comtet.

IDÉES À FAIRE PASSER :

L'importance nouvelle du temps détaillée en cinématique relativiste implique de développer un nouveau formalisme de la dynamique, en dimension quatre : les quadri-vecteurs. Les lois usuelles de la dynamique sont alors modifiées, de même bien sûr que leurs conséquences qui font apparaître des phénomènes nouveaux.

**Introduction :** En mécanique classique la seconde loi de Newton est invariante par transformation de Galilée et est ainsi vraie dans tout référentiel galiléen. En revanche, le PFD n'est pas covariant au sens de la relativité restreinte. Il faut donc développer de nouvelles lois, covariantes et cohérentes avec celles de la mécanique newtonienne aux faibles vitesses (principe de relativité). Pour cela il faut d'abord exprimer un nouveau formalisme prenant en compte la dimension temporelle de manière adéquate.

## 1 Formalisme quadrivectoriel

### 1.1 Espace-temps de Minkovski

[9], p. 221 - Présentation de la situation de relativité restreinte (référentiel galiléen) :  $(R')$  en translation à vitesse  $V$  dans  $(R)$ . On redonne la transformation de Lorentz spéciale en terme du vecteur  $\tilde{x} = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , que l'on appellera dorénavant quadri-vecteur position, de  $\gamma$  et de  $\beta$ .

[9], p. 230 - On définit les quadrivecteurs comme vecteurs de quatre quantités  $A^0, A^1, A^2$  et  $A^3$  qui se transforment comme  $\tilde{x}$ . De même que l'intervalle  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  est un invariant relativiste, la pseudo norme d'un quadrivecteur  $A$ , donnée par  $-(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$  est un invariant relativiste. Le temps propre  $d\tau$  est tel que  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  et est donc aussi un invariant relativiste. On va voir que les invariants relativistes ont le même statut que les quantités conservées en mécanique.

### 1.2 Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

Si on veut faire de la mécanique il faut commencer par définir un quadrivecteur vitesse. Une définition naturelle est de prendre  $\tilde{u} = d\tilde{x}/d\tau$ . C'est bien un quadrivecteur car  $d\tilde{x}$  est un quadrivecteur (différence de quadrivecteurs) et  $d\tau$  est un scalaire, invariant par changement de référentiel.

On a  $-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  donc  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$  d'où on tire

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt}$$

Les coordonnées de  $\tilde{u}$  sont donc  $(\gamma c, \gamma \vec{v})$  et il a pour pseudo-norme  $\tilde{u}^2 = -c^2$ . Pour faire de la dynamique on peut, par analogie avec la mécanique newtonienne, définir l'impulsion d'une particule libre :  $\tilde{p} = m\tilde{u} = (p^0 = \gamma mc, \vec{p} = \gamma m \vec{v})$ . On voit réapparaître l'impulsion classique, reste à comprendre qui est  $p^0$ . Pour cela on va en faire le développement limité lorsque  $v/c \rightarrow 0$  :

$$p^0 = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{1}{c} [mc^2 + mv^2/2 + \dots]$$

donc la composante zéro du vecteur impulsion apparaît comme l'énergie de la particule considérée  $p^0 = E/c$  d'où la dénomination de quadri-vecteur énergie-impulsion. La démonstration de ce résultat est hors de portée ici ; elle est due à Lewis et Tolman (1909) (voir [9], pp. 254).

Voir dans [9], p. 257 pour la démonstration de la relation fondamentale  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ .

### 1.3 Loi de conservation - Effet Compton

Déjà, il faut généraliser les résultats précédent au cas du photon (particule sans masse). Comme c'est la seule sans divergence on admet :  $E = pc$  et  $E = h\nu$  d'où

$$\vec{p} = \left( \frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right) \text{ et } \vec{p}^2 = 0$$

Remarque : La validité des lois de conservation en relativité est imposée par le principe de relativité. Voir [9], p. 255.

Interaction d'un photon avec un électron au repos. En théorie quantique des champs ça devrait être complètement imbitable mais là ça marche super bien par conservation de l'énergie et de l'impulsion du système photon + électron. Voir [72], p.214 et éventuellement p.228 et [9], p. 280 - *Note a posteriori* : le traitement de cet effet en terme de quadri-vecteur est beaucoup plus efficace et parfaitement présenté dans [61], p. 123.

**Transition** : On a réussi à prolonger le formalisme d'une manière qui semble efficace, et on a déjà déduit des lois intéressantes. Reste à décrire la plus important d'entre elles : le principe fondamental de la dynamique !

## 2 Lois de la dynamique en relativité restreinte

### 2.1 Principe fondamental de la dynamique

Par principe de relativité, on cherche à écrire le pfd de manière covariante (de sorte que les deux côtés de l'égalité varie de manière similaire par changement de référentiel), par exemple en ayant de chaque côté un quadri-vecteur. Une idée est d'écrire simplement le prolongement le plus simple :

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{f}$$

où l'on a fabriqué un quadri-vecteur accélération de la même manière qu'on avait imaginé le quadri-vecteur vitesse, et on fait apparaître un quadri-vecteur force tout à fait indéfini pour le moment et dont on va explorer les propriétés par la suite.

### 2.2 Propriétés de la quadriforce

Prenons l'équation précédente en produit scalaire avec  $\vec{u} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$  pour trouver  $\vec{u} \cdot \vec{f} = 0$ . C'est une bonne nouvelle : on a rajouté une dimension à la force, mais on a ajouté une contrainte donc on a pas de contenu physique supplémentaire ! Pour la suite, voir [9], p. 264.

#### Partie spatiale de la quadriforce

En étudiant la partie spatiale du pfd il vient  $\frac{d}{d\tau}(\gamma m \vec{v}) = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \gamma m \vec{a} = \gamma m \vec{f}$  d'après la loi de Newton donc  $\vec{f} = (f^0, \gamma \vec{f})$  où  $\vec{f} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$  : on retrouve presque le pfd mais avec une énorme différence : l'inertie augmente avec la vitesse !

#### Partie temporelle de la quadriforce

Avec ce qui précède et le fait que  $\vec{u} \cdot \vec{f} = 0$  on déduit la partie temporelle de  $\vec{f}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{f} = 0 \Leftrightarrow -\gamma c f^0 + \gamma \vec{f} \cdot \gamma \vec{v} = 0 \Leftrightarrow f^0 = \gamma/c \vec{f} \cdot \vec{v}$$

donc la composante zéro du quadri-vecteur force est en fait la puissance de la force newtonienne ! Ainsi,

$$\vec{f} = \left( \frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{f} \right) \quad (7.1)$$

et la force newtonienne n'est effectivement pas covariante, au contraire de la quadri-force.



### Application à un champ magnétique uniforme constant

Cet exemple peut sauter le temps vient à manquer. Voir [9], p. 288.

### 2.3 Aspect énergétique

La composante zéro du pfd donne immédiatement le théorème de l'énergie cinétique mais avec une expression pour  $E_c$  très différente de l'énergie cinétique newtonienne.

La composante zéro du pfd donne exactement  $\frac{d}{dt}(m\gamma c) = \frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}$  et on a déjà démontré que  $\frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}$  de sorte que :

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{c}{\gamma} \frac{d}{dt}(m\gamma c) = \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \frac{dE_c}{dt}$$

car  $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ .

### Accélération d'une charge par application d'une différence de potentiel

Voir [9], p. 286 et suivantes - On s'intéresse à la vitesse acquise par une particule chargée soumise à une différence de potentiel notée  $U$ .

- En classique, on applique le théorème de l'énergie cinétique  $\Delta E_c = eU$  de sorte que si la vitesse et le potentiel initiaux sont nuls, la vitesse à l'impact avec la plaque de potentiel  $U$  est  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2eU}{mc^2}$  directement proportionnelle à  $U$  sans vitesse limite.
- En relativité on applique le même théorème mais cette avec la bonne énergie cinétique  $E_c = (\gamma - 1)mc^2$  et il vient  $\gamma = 1 + \frac{eU}{mc^2}$  soit

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left[ \frac{1}{1 + \frac{eU}{mc^2}} \right]^2$$

de sorte qu'on vérifie bien  $v \leq c$ , on retrouve bien le même résultat à la limite classique  $v \ll c$  et on voit cette fois apparaître une vitesse limite lorsque  $U$  devient grand devant  $mc^2/e$ .

On peut alors vérifier expérimentalement la validité de la théorie qu'on a développé. L'expérience a été menée par Bertozzi, on l'interprète sur [slide](#) (voir LP06).

**Conclusion :** Cette formulation covariante des lois de la dynamique dans le formalisme quadri-vectoriel est la clef vers la physique des hautes vitesses, donc des hautes énergies. Cette théorie a notamment été efficacement testée lors d'expériences de collisions entre particules et la découverte des quarks etc...

#### BONUS :

1. Voir « quelques mots de relativité générale » en bonus de la leçon gravitation.
2. Le fait que la force relativiste  $\vec{f}$  coïncident avec la force classique n'est pas trivial du tout. C'est vrai pour la force électrique  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  car les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont intrinsèquement relativistes. Le bon outil pour traiter la dynamique relativiste ce sont les lagrangien, action, etc...
3. Selon le temps on peut faire toute une partie sur le mouvement dans un champ électromagnétique, tout est détaillé dans [9] à partir de la page 286. Il faut au moins faire Bertozzi et montrer la vitesse limite... Pour le reste c'est à décider au cas par cas.



# LP n° 8 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

NIVEAU : CPGE

On appuie cette leçon sur le programme de PC.

PRÉREQUIS :

- Description d'un fluide en mouvement
- Force de pression et équivalent volumique
- Diffusion de particules, de la chaleur (phénomènes de transport)

PLAN :

1. Notion de viscosité
2. Dynamique des fluides newtoniens

3. Description des écoulements fondamentaux

BIBLIOGRAPHIE :

1. [41] *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit (2001).
2. [53] *Physique PC/PC\**. H. Gié et coll.
3. [71] *Physique PC/PC\**. Tout-en-un, Dunod (4e édition)

IDÉES À FAIRE PASSER :

L'objectif principal est de décrire l'écoulement d'un fluide général. On caractérise la diffusion de quantité de mouvement par viscosité et on complète l'étude dynamique en modifiant l'équation d'Euler qui devient Navier-Stokes. Cette nouvelle équation est compliquée à résoudre entre autre à cause du terme non-linéaire. On présente deux écoulements fondamentaux pour lesquels la géométrie implique que ce terme soit strictement nul.

**Introduction :** On a développé les outils pour décrire le mouvement d'un fluide et établi les équations pour un fluide parfait. Cela dit, les outils que nous avons développés jusqu'ici ne nous permettent pas d'expliquer la différence entre les écoulements suivants :

**Expérience :** Faire couler différents fluides (par exemple de l'eau est un fluide nettement plus visqueux) et montrer qu'il y a quelque chose non encore inclus dans la description qui doit les différencier.

Cette leçon va être l'occasion d'introduire la notion de viscosité qui va nous écarter du cas idéal, puis de déterminer l'influence de ce nouveau paramètre sur l'équation de la dynamique et les conditions limites pour enfin discuter des différents régimes d'écoulement nécessitant ou non la prise en compte de cette nouvelle phénoménologie.

## 1 Notion de viscosité

### 1.1 Expérience introductive

Voir [53], pp. 417 - 419.

**Expérience :** Voir [71], p. 298 et vidéo sur Youtube, vers 3:50 . On fait glisser deux plaques en sens inverse de part et d'autre d'un fluide visqueux. On constate que le fluide se met petit à petit en mouvement sur toute sa largeur, ce qui est modélisé par le déplacement relatif des croix les unes par rapport aux autres et à la déformation progressive de chacune. MENTIONNER QUE DANS LE CAS DE LA VIDÉO LE RÉGIME PERMANENT EST BIEN ATTEINT! Ceci implique que la quantité de mouvement fournie à la plaque a diffusé dans le fluide. D'autre part on peut mesurer la force nécessaire pour mettre la plaque en mouvement et il vient expérimentalement

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{d}$$

C'est l'analogie de la définition de la pression dans le fluide mais ici  $\eta$  est une constante caractéristique du fluide, appelée viscosité dynamique, exprimée en Pa.s. Donner des ordres de grandeur sur slide. En fait ici on s'est intéressé à un écoulement très simple pour rendre les choses facile mais en vrai il faut plutôt retenir  $d\vec{F}_x(y, t) = \eta_{x,y} \frac{\partial v_x}{\partial y} dS\vec{u}_x$  (ça peut peut-être s'accompagner d'un petit schéma, typiquement [71], p. 299). Mentionner le cas des fluides non newtonien [41], p. 174.

## 1.2 Équivalent volumique de la force de cisaillement

Le problème à ce stade c'est que dans les équations dynamique des fluides toutes les forces sont volumiques (le poids s'exprime  $\rho \vec{g}$ , les forces de pression  $-\overrightarrow{grad}(P)$ , ...) donc il nous faut déterminer la forme équivalente volumique des forces de viscosité. A traiter très proprement (attention au signe etc, on fait comme dans pas mal d'exos type onde sur une corde etc : la force positive est celle exercée par « le dessus sur le dessous »). C'est bien fait dans [71], p. 300 et dans [53], pp. 520 - 421. Insister sur le fait que la forme simple en  $\eta \Delta v$  n'est vrai que pour un fluide incompressible (hypothèse dont on se passait pour démontrer l'équation d'Euler) de sorte que DÈS QUE CETTE EXPRESSION DES CONTRAINTES VISQUEUSES APPARAÎT ON DOIT AVOIR FAIT L'HYPOTHÈSE DE FLUIDE INCOMPRESSIBLE!

## 1.3 Équation de diffusion de la quantité de mouvement

Voir [71], p.295 pour le calcul et [53], p.420 + note de bas de page pour l'interprétation.

---

**Transition :** On a le formalisme pour décrire la force de cisaillement de sorte qu'on va devoir ajouter au transport de quantité de mouvement par convection un transport diffusif. Comment le prendre en compte dans la dynamique, et quand est-ce que l'on peut, ou pas, la négliger?

---

## 2 Dynamique des fluides newtoniens

### 2.1 Équation de Navier-Stokes

Il y a deux solutions pour aboutir à Navier-Stokes : soit on part d'Euler et on ajoute la force de viscosité sous réserve des bonnes hypothèses, soit on applique rapidement le pfd à une particule fluide, cf. [71], p. 305 et [53], p. 420 (je penche plutôt pour cette deuxième solution qui invite plus naturellement à réinterpréter brièvement chaque terme - faire notamment apparaître le terme convectif et le terme diffusif).

### 2.2 Conditions aux limites en présence de viscosité

Pour les fluides parfaits on avait exprimé les conditions limites de manières assez binaires : la vitesse du fluide normale à une paroi était nécessairement nulle par hypothèse de non-pénétration, mais on ne pouvait rien stipuler sur la vitesse tangentielle. La viscosité nous permet d'imposer une nouvelle conditions : que la vitesse tangentielle soit elle aussi nulle. (Voir interprétation énergétique, que l'on peut évoquer, dans [41], p. 266). Évoquer les conditions aux limites dynamique à présenter sur [slide](#), voir Cours de M. Rabaud, pp. 25-30.

### 2.3 Résolution d'un écoulement fondamental, l'écoulement de Poiseuille

L'équation de Navier-Stokes est NON LINÉAIRE! donc fort difficile à résoudre dans le cas générale. Pour autant il existe des écoulements qui, DU FAIT DE LEUR GÉOMÉTRIE annule le terme non linéaire et peuvent alors être rigoureusement résolus.

- D'une part, l'écoulement de Couette (déjà vu en I.) sur lequel on ne s'attarde pas (expliquer brièvement pourquoi les termes s'annulent et éventuellement montrer le profil de vitesse sur [slide](#)).
- D'autre part l'écoulement de Poiseuille. Présenter le type d'écoulement dont on parle ici. On va le résoudre en géométrie cylindrique (ça modélise par exemple l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins, ou du magma dans les cheminées volcaniques) - cf. [71], p. 351 ou [53], p. 435 et encore le cours de M. Rabaud L3, p. 126. Voir, sur les travaux de Poiseuille, le début (au moins) de cette vidéo sur les écoulements de poiseuille. Si on fait le calcul du débit (ce qui me paraît assez recommandé) on peut faire l'expérience! et enfin montrer la [vidéo](#) montée pour voir la forme de l'écoulement.

---

**Transition :** On a présenté dans cette dernière partie les écoulements pour lesquels des solutions exactes sont rendues accessibles par la géométrie de la situation. Lorsque ça n'est pas le cas on peut généralement simplifier l'équation de Navier-Stokes en comparant les termes diffusif et convectif.

---

### 3 Importance relative de la diffusion et de la convection, régimes d'écoulement

#### 3.1 Le nombre de Reynolds

Définition par le rapport des termes convectifs et diffusif (cf. [53], p.423 ou [71], pp. 298-299). Interprétation en termes de temps caractéristiques (ce qui permet de définir le Reynolds même si on est pas dans le cas de Navier-Stokes) permettant de dégager deux grands types d'écoulement.

On va à nouveau pouvoir négliger le terme non linéaire si l'écoulement est dominé par la viscosité. C'est le cas de l'écoulement de Stokes que l'on présente maintenant.

#### 3.2 Écoulement à dominante visqueuse, l'écoulement de Stokes

Voir cours de M. Rabaud (L3), pp. 128 et suivantes. On peut s'intéresser à la réversibilité cinématique de l'écoulement (pp. 133 - 134) puis [vidéo](#) de l'écoulement de Poiseuille renversé et/ou éventuellement à la force de Stokes, accompagnée de l'expérience (mais ça commence sûrement à faire beaucoup là...).

---

**Conclusion :** Dernier régime d'écoulement, à dominante convective, implique de la turbulence. Domaine de la physique extrêmement complexe et champ encore très actuel de recherche en physique.



# LP n° 9 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.

**NIVEAU : LICENCE?** \_\_\_\_\_

Programme de PC.

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Description des fluides en mouvement
- Actions de contact dans un fluide en mouvement
- Équation de Navier-Stokes (?)

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Le modèle de l'écoulement parfait
2. Forces et Faiblesses du modèle

3. Lien entre écoulement parfait et l'écoulement réel

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

1. [41] *Hydrodynamique Physique*, Guyon-Hulin-Petit
2. [53] *Physique Spé. PC\*, PC*, Gié
3. [71] *Physique PC/PC\**, Tout-en-un, Dunod (4e édition)
4. Cours de M. Rabaud en L3 FIP

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

Dans le cas général de l'étude d'un fluide l'équation de Navier-Stokes est une équation compliquée à au moins deux titres : la non linéarité, et la diffusion (laplacien de la vitesse). On étudie ici le cas où la diffusion est négligeable, on constate que cela simplifie grandement l'étude mais on expose aussi une limite du modèle.

**Introduction :** Dans la leçon précédente on s'est penché sur les écoulements pour lesquels le terme non-linéaire dans l'équation de Navier-Stokes. Cela concernait les écoulements fondamentaux pour lesquels la géométrie imposait la nullité du terme et les écoulements à faible nombre de Reynolds pour lesquels il était négligeable devant le terme visqueux.

## 1 Le modèle de l'écoulement parfait

### 1.1 Qu'est-ce qu'un écoulement parfait ?

Définition d'un écoulement parfait : [41] pp. 170 - 171. Distinction avec le fluide parfait ( $\nu$  rigoureusement nul : exemple de l'hélium isotope 4 en dessous de 2,17K - cf. [41], pp. 170, 353 & 433).

Du point de vue de la particule fluide, l'évolution est adiabatique (évolution rapide devant les temps de diffusion) et réversible (pas de phénomènes dissipatifs), donc isentropique. *Remarque : ça sert notamment dans le calcul de la célérité des ondes acoustiques dans l'air, cf. LP25.*

### 1.2 Équation dynamique régissant l'écoulement parfait

On pourrait déduire l'équation d'Euler de celle de Navier-Stokes en négligeant la viscosité mais on serait alors contraint de sauvegarder l'hypothèse de fluide incompressible dont Euler se passe sans problème, je suggère donc de la démontrer à nouveau par application du pfd à une particule fluide ([71], p. 355) et préciser a posteriori le lien avec l'équation de Navier-Stokes. Pour pouvoir résoudre complètement l'écoulement il faut imposer des conditions limites.

### 1.3 Conditions limites imposées à l'écoulement parfait

Voir [slide](#) et prendre le temps de préciser un peu les différences avec les conditions limites imposées au fluide visqueux.

**Transition :** Voyons si ce modèle au premier abord assez simpliste peut permettre de décrire efficacement et fidèlement des écoulements réels.

## 2 Forces et faiblesses du modèle

### 2.1 Lien entre courbure et pression dans l'écoulement

On explique ici naïvement l'effet Coanda : la pression augmente du centre de courbure vers l'extérieur de l'écoulement. Voir [71], pp. 356-359 et Cours de M. Rabaud de L3, p. 47.

**Expérience :** On peut faire l'expérience et mettre en lévitation une balle de Ping-pong!

On garde les subtilité (mise en rotation et impossibilité du maintien sans traînée) pour la fin de cette partie...

### 2.2 Aspects énergétiques de l'écoulement, l'équation de Bernoulli

Démonstration du théorème dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen. On traite alors les cas irrotationnel et tourbillonnaire (cf. [71], pp. 370-372. FAIRE L'INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DU THÉORÈME en précisant que ce n'est possible que parce qu'on a négligé tous les processus de dissipation!

Application au tube de Pitot ([71], p. 376) et

**Expérience de la turbine avec anémomètre à fil chaud et tube de Pitot pour montrer que la vitesse varie bien en racine du  $\Delta p$ .**

### 2.3 Le problème de la circulation

Définir la circulation et démontrer (selon le temps) le théorème de Kelvin (voir cours de L3, pp. 51-52 et [41], pp. 360-370 (notamment l'interprétation physique)?

On s'intéresse alors à l'écoulement parfait d'un fluide autour d'un obstacle infiniment long (2D). Voir [41], pp. 318-322. On montre que la force de traînée est nulle et que la force de portance est proportionnelle à la circulation  $\Gamma$ .

**Transition :** Le problème étant que ces deux informations sont incompatible puisqu'a priori, avant la mise en écoulement la vorticité est nulle, donc elle le reste et les avions ne volent pas...

## 3 Lien entre l'écoulement parfait et l'écoulement réel

Voir [71], pp. 309-311. En fait il existe une couche limite dans laquelle la viscosité a un effet mais elle s'étend en gros sur une taille  $\delta = L/\sqrt{Re}$  de sorte que dans l'hypothèse effectuée de Reynolds grand elle a une taille négligeable ... mais non nulle! (On peut détailler plus ou moins cette idée à l'aide du cours de L3 et de [41]).

A mon avis il ne reste plus grand temps pour discuter quoi que ce soit mais au cas où on peut aborder le problème du vol à l'aide de [41], pp. 534 et suivantes.

**Conclusion :** Le modèle de l'écoulement parfait est un outil efficace pour traiter de l'écoulement des fluides loin des obstacles et pour des écoulements laminaires. En revanche, l'analyse rigoureuse de comportement des fluides au voisinage d'obstacle doit être traitée avec l'outil général de Navier-Stokes, ou a minima en s'intéressant en détail au comportement de la couche limite!

#### **BONUS :**

1. Comme autre limite du modèle on peut évoquer le problème de Venturi (voir [53], p. 458).
2. On peut rajouter une partie sur les écoulements potentiels mais ça se chevauche pas mal avec l'aile d'avion et surtout on sortirait largement du temps imparti à mon avis.
3. Si besoin on peut jeter un œil au cours de F. Moisy en ligne.



## LP n° 10 : Phénomènes interfaciaux impliquant les fluides.

### NIVEAU : LICENCE

Il y a beaucoup de chose à ce sujet dans le Dunod de PC mais très peu apparaissent effectivement au programme de prépa, d'où la nécessité de se placer niveau licence.

### PRÉREQUIS :

- Description des fluides en mouvement
- Actions de contact dans un fluide en mouvement
- Interactions moléculaires
- Mécanique

### PLAN :

1. Tension superficielle
2. Lois d'équilibre d'interfaces
3. Phénomènes dynamiques

### BIBLIOGRAPHIE :

- [29] *Gouttes, bulles, perles et ondes*. P.-G. de Gennes et coll.
- [41] *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit.
- [49] *Why is surface tension a force parallel to the interface*, A. Marchand et coll.
- [71] *Physique PC/PC\**. Tout-en-un, Dunod (2014)
- Cours de M. Rabaud à la prépa Agreg

### IDÉES À FAIRE PASSER :

Les phénomènes interfaciaux impliquant les fluides nécessitent une description microscopique rigoureuse pour être correctement compris. Pour autant, une fois modélisée l'énergie de surface et la force parallèle via le coefficient usuel  $\gamma$ , la démonstration et la compréhension de nombreux résultats devient accessible.

**Introduction** : Les interfaces entre deux fluides sont des objets très communs, notamment liquide / gaz par exemple pour ce qui est du plus commun, eau / air. deux types de comportement selon les quantités mises en jeu : gouttes, ou bulles; et ondes (typiquement vagues). Comment décrire ces phénomènes? Quelles sont les grandeurs physiques importantes en jeu?

## 1 Tension de surface

Expérience : Cadre métallique avec une barre au milieu : on fait des films de savon de chaque côté et on en perce un : la barre se rétracte complètement de l'autre côté. Autre point de vue : on tient la barre et on fait un film d'un côté seulement. Quand on lâche la barre elle part : on exerçait une force pour lutter contre l'action du film!

### 1.1 Définition thermodynamique

Voir [49], p. 1 - Définition de  $\gamma$  à partir de l'énergie libre : coefficient de tension superficielle ou tension de surface. Dimension, unité, valeurs usuelles. Bien préciser que  $\gamma$  dépend des deux matériaux constituant l'interface!

Interpréter en disant que les fluides ont intérêt à minimiser les surfaces défavorables. Démontrer la loi d'Young-Dupré par un raisonnement énergétique dès cette étape, cf. [49], p. 2.

### 1.2 Force associée à la tension de surface

On peut invoquer le principe des travaux virtuels pour faire la transition mais c'est peut être un peu lourd pour pas grand chose.

Voir [49], pp. 4-5 (II.B.2.) - On commence par expliquer pourquoi il ne peut exister de force qu'attractive en considérant l'équilibre d'une particule fluide : loi de la surface elle est à l'équilibre par isotropie (les forces attractive et répulsive ne se compensent pas, mais les forces attractives dans toutes les directions se compensent entre elles, et idem pour les forces répulsives). Proche de la surface, on a rompu la symétrie haut/bas de sorte que l'équilibre vertical de la particule implique que les forces verticales attractive et répulsive se compensent. En revanche, dans le plan parallèle à la surface la symétrie n'est pas brisée de sorte que l'équilibre est conservé quoiqu'il arrive, notamment que les forces répulsives et attractives dans ce plan se compensent ou non. Ainsi, la force est nécessairement parallèle à l'interface, et résultera de la non compensation de forces attractives et répulsives.

L'intensité de la force résulte du fait qu'on constate expérimentalement que l'attraction est plus forte que la répulsion. La suite du raisonnement est attachée à la figure 7, p. 5.

### 1.3 Facteurs influençant $\gamma$

Température : [41], p.53 pour les valeurs de variations relative de  $\gamma$  avec  $T$  puis [41], p.54 pour loi (à ne pas donner) et applications (à donner).

Surfactants : [41], p.54. et/ou [29], p. 171.

---

**Transition :** Comment se manifeste cette tension de surface dans les problèmes d'hydrodynamique? Quelle importance a-t-elle dans l'établissement des équilibres?

---

## 2 Lois d'équilibre d'interfaces

### 2.1 Phénomène de mouillage

Voir [29], p. 24 - Définir le paramètre d'étalement et les deux types de mouillage. Dans le cas du mouillage partiel on connaît la forme de la goutte via la loi d'Young-Dupré déjà démontrée en I.

**Expérience :** On peut projeter deux gouttes d'eau sur des matériaux différents (typiquement verre et téflon) pour voir l'angle changer.

Que se passe-t-il si la goutte est de plus en plus grosse? Intuiter le phénomène un peu avec les mains, décrire la forme que doit avoir la goutte au final et introduire la longueur capillaire comme dans [29], p. 40 - Le profil exact importe peu!

### 2.2 Une méthode de mesure de la tension de surface

Selon le temps, on peut faire ici l'interprétation de la force exercée par un fluide sur une plaque verticale tirée vers le haut et expliquer le principe de la balance d'arrachement. Eventuellement faire la manip... :)

**Expérience :** Faire une mesure de  $\gamma$  avec la balance d'arrachement. On peut en profiter pour mettre en évidence expérimentalement l'influence de l'imureté de l'eau (au cours du temps) et des surfactants.

### 2.3 Discontinuité de la pression et montée capillaire

Démontrer la loi de Laplace, in [29], p. 16 et [71], p. 319. Appliquer éventuellement à l'adhésion capillaire ([29], p. 17). Observation historique de la montée capillaire, importance notamment en biologie + éventuellement la manip :

**Expérience :** On fait l'expérience associée et idéalement on relève les points pour trouver la tendance en  $1/R$ .

[71], p. 321 - Calcul de la variation d'énergie pour une variation d'altitude  $dz$ . Équilibre atteint lorsque cette variation n'est plus positive i.e.  $dE/dz = 0$ . On peut remarquer que c'est une bonne méthode pour mesurer la tension superficielle!

Autre chose : quelle force tire le liquide vers le haut? Analyse en terme de force in [29], p. 53.

---

**Transition :** Les phénomènes interfaciaux à l'équilibre sont donc assez bien décrits par les outils que nous avons développés en première partie. La description se complique si on prend en plus en compte un écoulement macroscopique du fluide.

---

## 3 Phénomènes interfaciaux en régime dynamique

### 3.1 Ménisque dynamique

Voir le modèle de Landau-Levich-Derjaguin, in [29], p. 112. A décrire brièvement et résoudre en loi d'échelle.

### 3.2 Propagation d'ondes à l'interface entre deux fluides

[41], à partir de la page 328 et polycopié de M. Rabaud L3 à partir de la page 69.

### Relation de dispersion

Voir [41], p. 330 et poly de M. Rabaud, pp. 72-73. Milieux dispersif.

Expérience : Montrer les ondes de surfaces dans la cuve à onde. On peut avoir relever la relation de dispersion en préparation.

### Cas limites

Décrire l'influence de la gravité versus capillarité en comparant les termes sous la racine. Montrer que la grandeur qui fait le lien entre les deux est la longueur capillaire. Distinguer les cas de la houle et du déferlement. cf. Poly de Rabaud L3, p. 74.

On peut faire remarquer que la longueur capillaire garde son rôle de séparatrice entre les domaines capillaire et de gravité en statique : si on prend une goutte, sa taille et sa forme vont être régies par la capillarité si elle est petite (goutte sphérique) et plutôt par la gravité (flaque) si elle est grosse.

---

**Conclusion :** Les phénomènes interfaciaux impliquant les fluides sont multiples et divers. Ils ont l'avantage d'être assez simplement interprétables une fois bien comprises les énergie et force associées à la tension de superficielle. Cela dit, les aspects dynamiques font rapidement apparaître des phénomènes compliqués, notamment d'hystérésis dû au mouillage.

**BONUS :**

---

- Dans [29] il y a beaucoup d'application un peu différentes des trucs habituel et pas forcément très compliquées... Notamment, pour la partie dynamique, j'aime beaucoup le traitement du solide tiré de l'eau à vitesse constante où l'on s'intéresse à l'épaisseur du film qui reste attaché. On peut aussi profiter de cette leçon pour répondre à des questions légitimes sur les ménisques etc...
- Inutile de préciser que j'ai signalé la présence de manip dès que c'était possible d'en faire dans cette leçon mais il va falloir choisir!



# LP n° 11 : Gaz réels, gaz parfait.

**NIVEAU : LICENCE (2)**

On peut difficilement mettre cette leçon au programme de prépa si on veut pouvoir parler des développements du gaz réel (Vand der Waals & Viriel).

**PRÉREQUIS :**

- Mécanique classique
- Thermodynamique (principes, potentiels et fonctions thermodynamiques)
- Écoulement

**PLAN :**

1. Le modèle du gaz parfait.
2. Du gaz parfait aux gaz réels, détentes
3. Description des gaz réels

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [5] *Thermodynamique*, Bertin-Faroux-Renault.
- [31] B. Diu, *Thermodynamique* (édition 2007).
- Voir aussi le chapitre associé dans [26]
- [63] Physique PCSI, tout-en-un (5ème édition)
- [60] J.-P. Pérez, *Thermodynamique. Fondements et applications*, 3ème édition.
- Cours de thermodynamique de P. Puzo
- [67] Physique première année, Dunod ancien programme (2003)
- [30] B. Diu, *Physique statistique*.

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

Le gaz parfait est un modèle simple que l'on peut résoudre quasi-entièrement, mais qui ne suffit pas à décrire l'ensemble des phénomènes associés. Constat que l'on peut faire grâce aux différents diagrammes thermodynamiques et auquel on peut apporter une solution en étudiant des gaz réels selon différents modèles.

**Introduction :** Puzo, p.48 ou [60], p.29 et voir [slide](#) en parallèle - Au XVIIème siècle Boyle et Mariotte étudient les gaz et établissent indépendamment la loi  $PV = \text{cste}$ . Suivent ensuite plusieurs scientifiques qui établissent différentes lois permettant de déterminer une loi générale : l'équation des gaz parfaits. On va s'intéresser dans un premier temps à l'étude de ce modèle et à ses limites pour ensuite essayer de préciser la description.

## 1 Le modèle du gaz parfait

### 1.1 Définition

[31], p. 242 - Diagramme d'Amagat + zoom à faible Pression sur [slide](#). On voit que certains gaz peuvent être approximatés par un gaz parfait. On fixe la température  $T$  et on examine pour une mole de gaz son comportement. On constate que pour une pression faible il existe un comportement universel des gaz.

[31], p. 237 - Ce comportement universel permet de dire qu'un gaz parfait vérifie l'équation d'état  $PV = nRT$ . Puzo, p. 42 - On appelle gaz parfait l'état vers lequel tendent tous les gaz lorsque leur dilution tend vers l'infini. Définition et conditions de validité dans [30], p. 293.

Transition : A un gaz réel on associe un gaz parfait constitué des mêmes molécules, sans interactions à longue portée. Une approche plus détaillée ne peut donc se passer d'une description microscopique.

### 1.2 Description microscopique du gaz parfait

Puzo, p. 42–43 - On donne ici une deuxième définition des gaz parfait, cette fois liée à un aspect microscopique : ensemble d'atomes ou de molécules sans interaction longue portée, sphères quasi ponctuelles, seules actions : collisions élastiques. Répartition statistique des vitesses homogène, stationnaire et isotrope (dictée par la distribution de Maxwell-boltzmann, ne pas en parler).

Transition : Comment déduire de ce modèle l'équation macroscopique que l'on a énoncé en I.1) ?

### 1.3 Pression cinétique d'un gaz parfait

Puzo, p. 45 - On considère un gaz dans une enceinte, suivant les conditions énoncées précédemment, pour trouver l'équation d'évolution du gaz, on va remonter à un principe que l'on connaît : le PFD. On doit alors exprimer les forces subies par le système : ici on ne considère que la pression et la quantité de mouvement des particules. La pression que

le gaz exerce sur les parois du récipient est due aux chocs des molécules sur ces parois. Détermination de la pression. Démonstration de la pression cinétique pour un GP monoatomique se déplaçant selon une unique direction.

[63], p. 830 - Schéma, calcul des impulsions, formule du nombre de particules en fonction de la densité particulaire, application du théorème d'équipartition, retrouver l'équation d'état. (soit comme dans le Dunod avec la définition de la température cinétique soit en prenant le temps d'énoncer le théorème d'équipartition)

Voir [30] à partir de la page 354 : définition mécanique de la pression, pression cinétique : évocation du calcul simpliste (déjà vu a priori) ; on traite ici le calcul exact. On peut compléter ce paragraphe grâce au chapitre 4 de [5].

---

**Transition :** on a trouvé l'équation d'état du gaz parfait. On a vu que l'énergie interne de ces gaz ne dépendait que de  $T$ , en fait c'est un critère nous permettant de savoir si on a un gaz parfait ou un gaz réel.

---

## 2 Du gaz parfait aux gaz réels, détente

Équation de droites particulières dans des diagrammes donnés pour le gaz parfait. C'est l'occasion de préciser le comportement du gaz parfait (Energie interne, enthalpie, capacité thermique...) et de présenter lesdits diagrammes dans le cas d'un gaz réel, de constater l'écart à l'idéalité et idéalement présenter une correction.

### 2.1 Lois de Joule

[63], p. 841 & 908 - Première et deuxième lois de Joule. Deux lois satisfaites uniquement dans le cas du GP. Troisième définition pour un gaz parfait : un gaz est parfait s'il obéit rigoureusement aux deux lois de joule. [Démonstration de l'équivalence dans le TD de M. Pierce]

Ainsi, si un gaz ne suit pas ces lois il n'est pas parfait. cela donne un bon critère expérimental pour évaluer si un gaz est parfait ou non.

### 2.2 Détente de Joule-Gay Lussac

[67], p. 855 et [5], p. 214 - Définir les états initial et final à l'aide de schémas au tableau. Donner les différentes hypothèses de travail (adiabatique, pas de travail extérieur, système = gaz) et obtenir que la détente est une transformation isoénergétique. L'énergie interne du gaz parfait ne dépendant que de la température on en déduit immédiatement que la détente se fait à température constante. D'où : un gaz qui subit une détente de JGL sans variation de température suit la première loi de Joule.

Remarque : La détente de JGL est isoénergétique quel que soit le gaz utilisé (parfait ou non). La discrimination se fait au niveau de la température : si la température  $T_1 = T_2$  on a un GP, si  $T_1 > T_2$  on n'est pas dans le cas d'un gaz parfait mais d'un gaz réel.

OdG : pour une mole de  $CO_2$  passant de d'un état initial  $P_i = 8$  bar,  $T_i = 298$  K et  $V_i = 2$  L à un état final  $P_f$ ,  $T_f$  et  $V_f = 5$  L on trouve expérimentalement  $\Delta T = -0,27$  K (Puzo, p. 129).

### 2.3 Détente de Joule-Thomson

[67], p. 859 & [5], p. 216 - Description du système sur [slide](#), faire la démonstration que la détente est isenthalpique. Dans le cas du GP on obtient une détente isotherme, et dans le cas du gaz réel? Exposer les diagrammes des frigoristes sur [slide](#) pour décrire le comportement du gaz parfait (on retrouve notamment le comportement du GP aux basses pressions).

[67], p. 862 & [60], p. 162 - On constate que les isenthalpes ne sont pas des droites pour des fortes pressions. Constaté aussi qu'il y a une inversion des variations de température. Selon sa température et pression initiale le gaz peut se détendre en réalisant un refroidissement ou un échauffement. Il existe une température d'inversion. Le gaz doit être inférieur à  $T_i$  pour avoir un refroidissement. OdG pour l'hélium, le dihydrogène et le diazote.

---

**Transition :** à présent on peut déterminer la nature d'un gaz à l'aide des détente. Mais comment décrire un gaz réel?

---

## 3 Description des gaz réels

### 3.1 Prise en compte des interactions entre particules

[60], p. 30 - On a vu que le modèle du GP est bon tant que la pression du fluide est faible pour pouvoir négliger les interactions. L'ingrédient manquant pour décrire le gaz réel c'est existence de ces interactions.

Puzo, p. 117 - Observation : diagramme de Clapeyron sur **slide** et constater qu'aux hautes températures les isothermes sont semblables à celles du GP, mais pour les gaz réels, expérimentalement on constate l'existence d'un plateau. Idem, p. 31 - Existence de forces non négligeables : lorsque les molécules se rapprochent : répulsion à faible distance. (à dessiner). [5], p. 209 - La force qui s'exerce entre les molécules tend vers 0 lorsque le rayon croît. (Dessiner) Existence d'une position d'équilibre. Si  $l'E_p$  tend vers 0 on retrouve le GP.

Transition : Comment traduire ces interactions dans l'équation d'état?

### 3.2 Modèle de Van der Waals

Donner les corrections apportées au modèle du GP : volume effectif + pression moléculaire due aux interactions attractives. [31], p. 245 - Lorsqu'on trace l'équation de VdW on obtient : **slide** (attention sur la figure il y a  $V_c$  et  $P_c$ ...). Existence d'un maximum et d'un minimum. L'arc compris entre le max et le minimum n'a pas de réalité physique et donne une transition de phase (existence d'un plateau). Faire le dessin au tableau.

---

**Conclusion :** Conclusion : Récap + on peut faire une meilleure description du gaz réel que Van der Waals avec le développement du Viriel + une description classique n'est pas toujours possible, existence de statistiques quantiques (fermi-dirac, bose-einstein).

**BONUS :**

---

1. Revoir les conditions d'application de théorème d'équipartition
2. Existence d'autres gaz réels : cours de Puzo
3. Revoir le corrigé du TD de Matthieu Pierce pour la démo de la relation des gaz parfait et les différentes approximations.
4. Note de page de page du diu p.274 pour l'interprétation qualitative de Joule Gay lussac





# LP n° 12 : Premier principe de la thermodynamique.

NIVEAU : CPGE

Programme de PCSI.

PRÉREQUIS : \_\_\_\_\_

•

PLAN : \_\_\_\_\_

1.

BIBLIOGRAPHIE : \_\_\_\_\_

- [63] Physique, tout-en-un PCSI (5eme édition)
- [67] *Physique, 1ere année*, Dunod (2ème édition, 2003)
- *Thermodynamique*, B. Diu (2007)

IDÉES À FAIRE PASSER : \_\_\_\_\_

**Introduction :** [67], p. 769 - Historique pour arriver au 1er principe, discuter des notions de chaleur et de travail. On a déjà étudié les notions de travail mécanique et de transfert thermique qui sont les échanges d'énergie existant au sein d'un système non isolé, comment décrire l'énergie de ce système, quelles sont ses caractéristiques?

## 1 Energie d'un système

### 1.1 Définition

[63], p. 839 & [67], p. 828 - Définition de l'énergie interne et donner ses propriétés. [63], p. 899 - Définition de l'énergie d'un système thermo. Bien distinguer les énergies micro et macro et leur attribuer le mouvement qui les caractérisent. Rq : Energie définie à une constante près.

Transition : pour faire le bilan d'énergie d'une transformation il faut évaluer une variation d'énergie.

### 1.2 Premier principe

[67], p. 829 Enoncé du premier principe de la thermo avec son expression. [63], p. 887 définition du transfert thermique. Le travail est celui défini en mécanique (il contient le travail des forces de pression qu'il y a en prérequis.) Le premier principe est un principe de conservation de l'énergie et s'applique entre 2 états d'équilibre (donc pas grave s'il est défini a une cste près). [63], p.900 Insister sur le fait que le travail et le transfert thermique sont des grandeurs algébrique. Equivalence chaleur-travail : animation, expérience de Joule.

### 1.3 Capacités thermiques

[63], p. 840 - définition de la capacité thermique à volume constant en lien avec l'énergie interne, expression dans le cas d'un gaz parfait monoatomique et diatomique. [63], p. 841 - Première loi de Joule + variation d'énergie interne molaire (loi de Dulong et Petit)

**Transition :** ce principe permet de réaliser des bilans d'énergie au cours de transformation

## 2 Expression du premier principe lors des transformations usuelles

### 2.1 Détente de Joule-Gay Lussac

[67], p. 855 - Définir les états initial et final à l'aide de schémas. Donner les différentes hypothèses de travail (adiabatique, pas de travail extérieur) donc la détente est une transformation à énergie constante. L'énergie interne du gaz parfait ne dépendant que de la température, la détente se fait a température constante. CCL : un gaz qui subit une détente de JGL sans variation de température suit la première loi de Joule. Permet de déterminer qu'on a un GP.

Transition : si on n'a pas un système isolé?

## 2.2 Système avec une source de travail

[63], p. 903 - Étude de l'échauffement d'un gaz par compression. Description du système et de l'expérience. **slide** Appliquer le 1er principe au système constitué d'air (gaz parfait diatomique). Donner les hypothèses : pas de variation d'énergie cinétique macroscopique, transformation brutale = adiabatique. Exprimer le travail, l'énergie interne et ainsi remonter à la température final dans le piston. Cet exemple illustre le fait que la température peut augmenter sans qu'il y ait un transfert thermique, quand le système reçoit l'énergie correspondante sous forme de travail. Faire l'application numérique : on trouve 700 K!! Si on place un morceau de papier dans le tube il peut prendre feu. **slide** photo (sur l'image c'est fait avec du papier flash dont la température d'auto inflammation est de 160C°, celle du papier normal est de 233 C°).

## 2.3 Evolution isochore

Application du 1er principe à l'échauffement isochore d'un gaz sans variation d'énergie mécanique. [63], p.883 Montrer que le travail des forces de pression est nul lors d'une transformation isochore. [63], p. 902 ou [67], p. 849 - Donner le premier principe dans le cadre de ces hypothèses. Exprimer le transfert thermique en fonction des températures et de la capacité thermique. Avec la mesure de 2 températures on peut trouver le transfert thermique qui a lieu.

---

**Transition :** [67], p. 840 - Étude d'une autre transformation : monobare. Schéma de la situation initiale et finale. Appliquer le premier principe et trouver l'expression de Q. On aimerait trouver une fonction dont la variation est égale au transfert thermique. On pose  $H^*$ . Le problème c'est que cette fonction dépend de la pression extérieure. On change de cadre : en se plaçant dans le cas d'une transformation isobare. On introduit ainsi une nouvelle fonction noté H!

---

# 3 Enthalpie

## 3.1 Définition

[63], p.906-907 - Définition de l'enthalpie + unité. Donner aussi l'enthalpie massique et molaire. Premier principe pour une transformation monobare avec équilibre mécanique à l'EI et l'EF. L'intérêt de cette formule est qu'elle évite le calcul du travail des forces de pression pour évaluer le transfert thermique. Définir la capacité thermique à pression constante et donner la formule qui relie H à  $C_p$ .

[63], p. 908 Expliciter le cas du GP : la deuxième loi de Joule. Déterminer la relation de Mayer et en déduire la capacité thermique à pression constante d'un gaz mono puis polyatomique. Enfin donner l'enthalpie d'une phase condensée indilatable et incompressible.

Transition : comment trouver la valeur de la capacité thermique d'un matériau?

## 3.2 Application à la calorimétrie

[63], p.915-916 + [Annexe] Définir le système, expliquer la nécessité de définir la masse en eau du calorimètre et donner un OdG. Détermination de la capacité thermique massique d'une statuette en or. Donner un schéma de l'état initial et final. Donner les hypothèses d'évolution du système (monobare, adiabatique, pas de travail...) donc  $\Delta H = 0$ . Donner l'expression des enthalpies de l'eau, calorimètre et Or. Faire le calcul et remonter à la valeur de la capacité thermique massique de l'or puis la masse molaire de la statuette. Conclure que ce n'est pas de l'or.

Transition : le calorimétrie permet l'étude d'une autre grandeur : l'enthalpie de changement d'état.

## 3.3 Enthalpie de changement d'état

[63], p. 911 On considère un système diphasé à définir. Définir l'enthalpie molaire et massique de changement d'état. Traiter l'exemple de la machine thermique : on se place à 100° et à 1 bar, on va avoir une vaporisation de manière isobare et isotherme de l'eau afin de récupérer un travail. Afin d'obtenir la valeur de l'enthalpie de vaporisation on peut utiliser un diagramme  $(\ln(P), h)$ , diagramme dit des frigoristes. (Placer les points de la pression et la température pour le changement d'état considéré lire les valeurs d'enthalpies et en déduire l'enthalpie de changement d'état). Faire l'application numérique et en déduire le travail.

---

**Conclusion :** Récap + on a fait l'étude de bilan énergétique uniquement mais on ne connaît pas de critère d'évolution. Il faut un 2ème principe.

**BONUS :** \_\_\_\_\_

---

- Mouvement oscillant en méca mais pas en thermo car l'entropie créée est source d'irréversibilité, le lien entre la méca et la thermo est les frottements. En thermo,  $V$  ne peut que décroître et est borné, on aura converti l'énergie potentielle en chaleur.
- TD Matthieu Pierce 1 pour la démo des lois de joule et de l'équivalence loi de joule = gaz parfait



## LP n° 13 : Evolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé.

**NIVEAU : LICENCE 3**

Presque tout est au programme des classes prépa, sauf la notion de potentiel thermodynamique.

**PRÉREQUIS :**

- 1er et 2nd principes de la thermodynamique
- Fonctions thermodynamiques
- Mécanique du point
- Description d'un système thermodynamique
- Identités thermodynamiques.

**PLAN :**

1. Description et condition d'équilibre d'un système isolé
2. Système en contact avec un thermostat

3. Système en contact avec un thermostat et un réservoir de volume

**BIBLIOGRAPHIE :**

1. [25] Thermodynamique PC-PSI, les nouveaux précis Bréal, Choimet
2. [31] Diu de thermodynamique
3. [52] *Physique PC PC\**, tec& doc, S. Olivier
4. [66] Physique Tout-en-un PC/PC\* Ancien programme, Dunod

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

**Introduction :** [25], p. 37 - On connaît les propriétés d'un système à l'équilibre thermodynamique, mais comment trouver, pour des conditions expérimentales données, l'état d'équilibre adopté par le système? On se limite aux systèmes fermés (qui n'échangent pas de matière avec l'extérieur).

### Préambule : Évolution et condition d'équilibre en mécanique

[25], p. 38 - En mécanique, si on a un système à l'équilibre et qu'on perturbe cette équilibre on sait que les positions d'équilibre vont correspondre à des maxima d'énergie potentielle (stabilité selon max ou min). L'énergie potentielle peut croître ou décroître selon que l'énergie est dissipée ou simplement convertie en énergie cinétique. On voudrait trouver une fonction qui ait le même statut en thermodynamique pour répondre au même type de problème.

## 1 Étude d'un système isolé

Renforcer l'hypothèse de fermé en isolé revient en fait à annuler les transferts d'énergie à la paroi.

### 1.1 Contrainte sur l'évolution

[25], p. 39-40 - Application du second principe, pour un système isolé on a  $\Delta S \geq 0$ . Lien avec la méca. On compare  $S$  pris par des états fictifs, l'état effectivement réalisé est celui d'entropie maximale.

### 1.2 Étude d'un exemple

Traiter la détente de Joule - Gay-Lussac comme [25], p. 38. Définir au passage les paramètre de contrôle et variable interne.

### 1.3 Notion de potentiel thermodynamique

[52], p. 284 - Néguentropie c'est le potentiel thermodynamique de la transformation : à définir. Affirmer la non unicité du potentiel thermodynamique. Entropie max, mais par rapport à quelle variable?

**Transition :** On a trouvé des conditions pour réaliser l'équilibre d'un système isolé (minimum de néguentropie implique égalité des pressions et températures) mais qu'en est-il d'un système fermé mais non isolé? Existe-il une manière systématique de résoudre le problème? Oui, les potentiels thermodynamiques sont l'outil adapté ici.

## 2 Système en contact avec un thermostat

Hypothèses de travail (monotherme et pas d'échange de travail) + paramètres de contrôle.

### 2.1 Choix du potentiel thermodynamique

[25], p. 42 - Les deux principes de la thermodynamique donnent un critère d'évolution du système (monotherme et isochore)  $\Delta F^* \leq 0$ , avec  $F^* = U - T_0 S$ .  $F^*$  est le potentiel thermodynamique de cette transformation. Il permet de trouver l'équilibre du système

### 2.2 Mise à l'équilibre thermique

[66], p. 848 - Exemple d'un morceau de fer chauffé jeté dans un lac froid. La condition d'équilibre est  $T_{eq} = T_0$ . Tracer l'évolution de  $F(T)$  et calculer  $\Delta F^*$  au cours de la transformation.

### 2.3 Travail maximum récupérable

[25], p. 55 - On a fait le calcul avec  $W = 0$ , on va montrer que les potentiels définis précédemment permettent de quantifier le travail maximal que l'on peut extraire d'un système en évolution monotherme.  $\Delta W_{max} \leq -\Delta F^*$ . Égalité atteinte que dans le cas réversible. Pour monotherme :  $\Delta W_{max} = -\Delta F$ . Car à l'équilibre thermodynamique,  $F^*$  s'identifie à l'énergie libre du système (car  $T = T_0$ ). [66], p. 846 - Exemple de la bouteille d'air comprimé.

### 2.4 Stabilité

Optionnel - voir [25], p. 44, Application 2.

---

**Transition :** Un autre cas de système fermé est celui d'un système en contact avec un thermostat et un réservoir de volume.

---

## 3 Système en contact avec un thermostat et un réservoir de volume

Hypothèses de travail : monotherme, monobare, pas d'échange de travail utile avec l'extérieur.

### 3.1 Potentiel thermodynamique approprié

[25], p. 45 - les 1er et 2nd principes donnent une nouvelle fois le critère d'évolution monotherme et monobare  $\Delta G^* \leq 0$  avec  $G^* = U - T_0 S + P_0 V$ . La condition d'équilibre devient  $dG^* = 0$ .  $G^*$  est donc le potentiel thermodynamique de la transformation monotherme, monobare.

### 3.2 Recherche d'équilibre & travail max récupérable

[25], p. 46 - Equilibre thermique et mécanique d'un fluide monophasé,  $T = T_0$ ,  $P = P_0$  et  $G^* = G(T_0, P_0)$ . Puis p. 56 : Travail max récupérable au cours d'une évolution monotherme et monobare puis isotherme et isobare.

### 3.3 Application à la loi de Laplace

Voir [25], p. 58, application 1 - Exemple de la bulle de savon. On retrouve la loi de Laplace.

Expérience : Loi de Laplace à vérifier et montrer que la petite bulle est mangée par la grosse [voir Polycopié de TP Montrouge *Fluides & capillarité*].

---

**Conclusion :** Généralisation de la méthode de résolution : trouver un potentiel thermo, trouver les variables internes indépendantes pour minimiser le potentiel thermodynamique. Tableau récap des différents potentiels qu'on a vu en fonction de la transformation sur [slide](#).

**BONUS :** \_\_\_\_\_

1. Lire la correction de leçon de Thibierge : En thermodynamique plus qu'ailleurs, il est indispensable de préciser les hypothèses sur les transformations, les variables dont dépendent les grandeurs mises en jeu, ou encore le statut des égalités. Seulement dire «  $dS$  c'est  $dU/T$  donc c'est  $C_V dT/T$  » ne suffit pas (même sur un exemple bien posé) car ne montre pas la raison de l'égalité : est-ce un bilan sur la transformation? une identité thermodynamique? une équation d'état? Beaucoup plus de précision est requise à ce niveau là. Ces remarques auraient

pu figurer dans chacun des paragraphes de ce compte-rendu, et sont bien sûr valables pour toutes les leçons de thermodynamique. Petit point de vocabulaire : un système est dit fermé s'il ne peut échanger de matière avec l'extérieur et calorifugé (ou isolé thermiquement) s'il ne peut échanger d'énergie thermique. La signification du terme isolé est moins précise, et signifie au moins qu'il ne peut échanger de travail et souvent qu'il ne peut échanger ni travail ni chaleur. Par ailleurs, une transformation est spontanée si le système ne reçoit pas de travail de l'extérieur, mais il peut en céder.

2. Bien revoir tout le chapitre 1 de [25]





## LP n° 14 : Machines thermiques réelles.

**NIVEAU :** CPGE

La majorité de cette leçon est au programme de PCSI mais l'utilisation du second principe en écoulement et l'étude détaillée du frigo impose de se placer au niveau PC.

**PRÉREQUIS :**

- Principes de la thermodynamique, y compris en écoulement
- Cycle de Carnot
- Machines dithermes

**PLAN :**

1. Illustration sur le cas simple d'une machine thermique fermée

2. Étude d'une machine thermique en système ouvert

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [55] *Physique, une approche moderne*, Lagoutte (2011)
- [63] *Physique PCSI*, Dunod (5ème Edition)
- [71] *Physique PC/PC\**, Dunod (1ère édition)
- BUP n°832 sur *Le réfrigérateur*

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

Le but de cette leçon est de montrer aux élèves, futurs ingénieur, que si l'apprentissage de la physique passe par une description simplifiée de phénomènes complexes on ne doit pas perdre de vue que les applications, notamment dans le cadre des métiers d'ingénieur, se font sur des systèmes réels que l'on doit aussi être en mesure de décrire.

**Introduction :** Dans le cours précédent on a abordé les machines idéales c'est-à-dire dans le cas réversible, on va maintenant s'intéresser au cas réel de machine thermique : irréversibles.

### 1 Illustration sur le cas simple d'une machine thermique fermée

[55], p. 891 - le moteur de Stirling est une machine fermée : une masse de fluide subit un cycle de transformations thermodynamiques. On peut utiliser sans danger différents types de combustibles.

[55], p. 893 - Description du dispositif : moteur monophasique, à air. Constitué de deux pistons : de déplacement et de travail, agencés par un système de bielle reliées à un vilebrequin : transformer le mouvement de translation en rotation. Source froide : atmosphère, source chaude : dans le tube en verre. Présenter sur le vrai moteur. Exp : Lancer le moteur

#### 1.1 Cycle idéal, cycle réel

Description des 4 phases du dispositif **slide** en associant le tracé (au tableau) du cycle idéal dans le diagramme de Clapeyron (2 phases isobares et 2 isothermes). On considère le gaz comme parfait. Compression isotherme à  $T_f$  ( $Q_f < 0$ ), chauffage à volume constant, détente isotherme à  $T_c$ , refroidissement isochore.

**Expérience : Interpréter le cycle à l'oscilloscope.**

Constater que le cycle réel ne ressemble effectivement pas à celui du cas idéal.

#### 1.2 Rendement

[55], p. 895 - hypothèses + calcul du rendement. [2] p.1004 Q.3) pour les calculs de  $W$  et  $Q$ . Constater qu'on obtient la même formule que pour le cycle de Carnot mais que la comparaison directe est impossible. En effet on n'est pas en présence d'un moteur ditherme, il y a répartition d'une multitude de sources thermiques. De plus il faudrait prendre en compte la capacité thermique molaire de l'air. Donner la formule du rendement avec la rectification. [63], p. 1004. Calculer avec des valeurs numériques le rendement de Carnot et comparer au rendement obtenu par l'expérience faite en préparation. (Regarder le poly de TP sur les moteurs et le MP 35) Transition : A quoi est due l'irréversibilité du cas réel?

### 1.3 Entropie créée

[55], p. 1004 (Q6) Faire le calcul de l'entropie créée (adapter les notations avec le livre précédemment utilisé) Mettre en avant la création d'entropie comme source d'irréversibilité. : irréversibilité thermique, idée des frères

---

**Transition :**

---

## 2 Étude d'une machine thermique en système ouvert

BUP, p. 539 - Pour refroidir un local il faut lui extraire de l'énergie : un moyen simple est de provoquer la vaporisation d'un fluide. Il faut donc que le fluide se vaporise à une température plus basse que celle du local. C'est ce principe qu'il faut utiliser dans un frigo : la première problématique est de trouver un fluide qui à une T de vaporisation plus basse que celle du frigo : eau ne convient pas, il faut prendre du Tétrafluoroéthane. **slide**. Ainsi, il suffit de vaporiser dans le local le fluide R134a initialement sous forme liquide à la pression de 1,64 bar. Le fluide absorbera de l'énergie provenant du local et, ainsi, le refroidira et deviendra vapeur : il faut ensuite faire le chemin inverse à l'extérieur de la pièce d'intérêt.

### 2.1 Etude de la machine

BUP, p. 541 - **slide** schéma global, expliquer chaque étape et le lien avec les propriétés du fluide Donner le rôle des 4 morceaux du frigo à l'aide des pages 539 à 541 : évaporateur, compresseur, détenteur, condenseur. Leur associer les changements d'états et de pression/température.

Transition : pour suivre l'évolution du fluide dans le réfrigérateur, il faut utiliser un outil particulier : diagramme des frigoristes

### 2.2 Diagramme des frigoristes (ln(P),h)

BUP, p. 542 - Présenter un diagramme des frigoristes simplifié **slide** et expliquer chacune des courbes. Diagramme des frigoristes (log(P),h) est associé à chaque fluide. Présenter les différentes portions de courbe : isentropique (au niveau du compresseur), isotherme (dans l'évaporateur) et isotherme (dans l'évaporateur et le condenseur), isenthalpes, isentropes ainsi que les zones de coexistence de phase. Utilisation de ce diagramme pour le frigo. Commencer par donner les hypothèses de travail : conduite calorifugée, viscosité et frottements inexistantes. **slide** du schéma du frigo (que les points blanc) Faire le lien entre le schéma (uniquement les points blancs : on simplifie) et le diagramme des frigoristes. Il faut expliquer comment on choisit les places les points : les points 1, 3 et 4 viennent de l'intersection de l'isotherme et des isotitres (pour les trouver on prend les données fournies pour le frigo et on place les points sur le diagramme), le point 2 on suit l'isentropie dans le cas idéal mais ici on se décale à cause de la non réversibilité de la machine. Mettre en avant les différents changements d'états associés.

CCL : dans le réfrigérateur le fluide décrit 2 isobares, une isentrope et une isenthalpe.

Transition : Le diagramme permet la visualisation de la valeur des enthalpies molaires qui permettent une étude énergétique.

### 2.3 Études énergétiques

[71], p. 62 - Ce qui nous intéresse c'est l'énergie retirée au local à refroidir. A l'aide du premier principe en écoulement et du diagramme faire le bilan énergétique traversant l'évaporateur **slide**, puis déterminer le travail électrique utilisé pour le fonctionnement du compresseur. BUP, p. 548 - Enfin déterminer l'énergie dégagée par l'évaporateur et montrer que le détenteur à effectivement selon une isenthalpe. [71], p. 62.

BUP, p. 548 - Définir l'efficacité du réfrigérateur et faire l'application numérique. Comparer à l'efficacité idéale de Carnot.

[71], pp.62-64 - Le réfrigérateur étudié est source de production d'entropie que l'on peut déterminer à l'aide du second principe en écoulement (faire le calcul pour le condenseur, dont l'entropie créée est quasi nulle, et pour le détenteur). La principale source d'irréversibilité est le détenteur.

BUP, p. 548-549 - Le cycle étudié est celui d'une machine réelle, cependant nous avons introduit des hypothèses sur les frottements et l'adiabaticité des tuyaux qui peuvent être remise en cause. Il y a aussi des pertes, il en résulte que le compresseur n'est pas isentropique. **slide** diagramme plus réaliste

---

**Conclusion :** Récap + utilisation concrète des diagrammes pour aborder l'étude d'autres systèmes : pompe à chaleur, centrales thermiques etc...

**BONUS :**

---

- Si le moteur tourne trop vite : réduction du cycle à des arcs d'isothermes.
- La comparaison des efficacités d'une machine réelle et d'une machine de Carnot exige que l'on précise les températures choisies car dans la machine réelle au cours d'un cycle les échanges thermiques s'effectuent en continu
- Certaines machines utilisent des fluides subissant des changements d'état : c'est intéressant car les enthalpies massiques de transition de phase liquide-gaz sont élevées (avec une faible quantité de matière (en l'occurrence une masse) on a bcp d'énergie : c'est le but des machines thermiques de transporter l'énergie de manière efficace). Dans les frigos c'est de l'isobutane et pour les centrales thermiques de l'eau.
- Frottements/diffusion : dépend de la vitesse de circulation du fluide (moteur : frottements, frigo : diffusion)
- $E = P dt$  donc si on est réversible : dt infini, puissance nulle. Pour récupérer de la puissance, il faut aller plus vite, devenir irréversible.



# LP n° 15 : Transitions de phase.

NIVEAU : LICENCE 3

## PRÉREQUIS :

- Potentiels thermodynamiques
- Variance
- Équation de Van der Waals
- Électromagnétisme dans les milieux
- Ferromagnétisme, paramagnétisme

## PLAN :

1. Une transition du premier ordre, la transition liquide-vapeur
2. Une transition du second ordre, la transition ferro-paramagnétique

## BIBLIOGRAPHIE :

- [5] Bertin-Faroux-Renault, *Thermodynamique* (1976)
- [31] B. Diu, *Thermodynamique* (2007)
- [60] J.-P. Perez, *Thermodynamique. Fondements et applications* (3ème édition)
- Cours de P. Puzo en ligne, chap. 7.
- Cours de G. Ferlat en ligne.
- TD de Matthieu Pierce : énoncé et corrigé.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

Les transitions de phase sont des phénomènes physiques très riches et complexe qui ne sont pas décrits par les modèles simples que nous avons l'habitude d'utiliser (gaz parfait, champ moyen). Pour cause, elles résultent principalement de l'interaction entre les constituants du système étudié. Notion d'universalité.

**Introduction :** Définir la phase thermodynamique (cf. TD) puis [31], p. 295 - Étude du passage d'une phase à une autre : transition de phase. Cette transition implique une modification des propriétés macroscopique d'un corps de façon brutale. Dans un premier temps nous allons traiter la transition de phase de l'eau se produisant à pression atmosphérique et à des températures facilement atteintes.

## 1 Une transition du premier ordre, la transition liquide-vapeur

### 1.1 Diagrammes des variables d'état

[31], p. 373 - Calcul de la variance pour un corps pur diphasique à l'équilibre. Les paramètres sont :  $T$ ,  $P$ ,  $x^g$ ,  $x^l$  (voir à ce sujet la note de bas de page de [31], p. 373) et on donne les relations entre ces paramètres (ne pas oublier l'égalité des potentiels chimiques entre les deux phases), on trouve  $\nu = 1$ . Interpréter graphiquement sur diagramme ( $P, T$ ) et montrer sur [slide](#) celui de l'eau d'abord avec seulement la courbe de vaporisation puis total.

[31], p. 300 - On constate l'existence des 3 phases sur le diagramme, les frontières représentent tous les états de coexistence des 2 phases à  $T$  et  $P$  correspondant aux coordonnées du point. Constater la présence des points triple et critique et la justifier avec la variance, cf. [31], p. 374.

Exp : Bouillant de Franklin pour expliquer comment on se déplace sur le diagramme  $P, T$

[31], p. 300 - En regardant juste ce qu'il se passe lorsqu'on augmente la température on aurait envie de dire que l'eau passe subitement du liquide à la vapeur... ce qui n'arrive pas en réalité : les proportions de chaque phase varie continument! On a besoin du diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ). [slide](#) digramme 3D puis que LV (ou boîte ENSP 589) Constater les différentes phases, le point critique et les isothermes, ce diagramme permet d'obtenir les titres en vapeurs et en liquide.

Transition : on peut connaitre la composition d'un système à partir de la connaissance de  $P, V, T$  et de diagrammes  $P, T$  et  $P, V$ . Mais comment décrire thermodynamiquement les transformations?

### 1.2 Description thermodynamique

Transition ponctuelle dans le diagramme  $P, T$  mais dans le Diagramme  $P, V$  on constate que la transition n'est pas instantanée. [2] p. 237 + [4] p. 144 + [3] p.258 Afin de décrire la transformation le potentiel le plus adapté est l'enthalpie libre car  $dG = VdP - SdT$ . Définition de  $g_1$  et  $g_2$  moalires (avec 1 : liquide, 2 : gaz). Faire le calcul dans le cas ou  $g_1 = g_2$  et préciser qu'il y a un nombre invariant de moles :  $dn_1 = -dn_2$ . Les 2 phases coexistent en proportion arbitraire. Représentation graphique des minimas : un faible apport d'énergie permet de basculer d'un état à l'autre. [slide](#) On

constate l'existence d'un équilibre hétérogène (deux phases différentes peuvent coexister à l'équilibre) caractéristique d'une transition appelée premier ordre [31], p. 296.

[3] p. 259 - On définit une transition du premier ordre : continuité de  $g$  (constaté sur le graphe précédent) et discontinuité de la dérivée première : on peut définir l'entropie massique et le volume massique qui sont discontinus lors de la transition de phase.

Transition : l'entropie massique et le volume massique permettent de faire une étude énergétique.

### 1.3 Relation de Calpeyron

[5], p. 238 - Étude de l'aspect énergétique du changement d'état : on reprend l'entropie massique et le volume massique. Pendant le changement d'état il y a variation de ces 2 grandeurs : calculer la pente de la courbe de changement de phase. Faire le calcul et obtenir de lien entre la dérivée de la pression et les grandeurs molaires. Alexandra d'Arco G. Bertrand J. Fillette [31], p. 324 & [5] p.238 - Définir la chaleur latente molaire. Démonstration pour arriver à la relation de Clapeyron. Cette relation donne le coup énergétique de la transition de phase. OdG de la chaleur latente :  $H_2O \approx 40,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$ ,  $N_2 \approx 5,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$  et  $H_2 \approx 58,1 \text{ kJ.mol}^{-1}$  (cf. NIST).

### 1.4 Modélisation de la transition

Cours de Puzo, p. 124 & [60], p. 157 & programme python « VanderWaals » & TD M. Pierce, p. 12 - On modélise la situation par un gaz de van der Waals (redonner la formule), si on s'intéresse à cette formule, on devrait voir la courbe sur le [slide](#), expérimentalement, on observe un palier au changement d'état : le modèle de Van der Waals est correct mais dès qu'on a une transition de phases, elle se fait à  $T$  et  $P$  constante : démo par le calcul. Définir le gaz de VdW, donner les zones d'instabilité de la dérivée : transition de phase. Montrer l'existence d'un palier tel qu'on la même aire.

---

**Transition** : existence d'autres types de transformation?

---

## 2 Une transition du second ordre, la transition ferro-para

On connaît la phénoménologie : à champ nul, un milieu ferromagnétique (donner des exemples?) possède une aimantation non nulle pour  $T < T_C$  et nul (en fait, proportionnelle au champ) pour  $T > T_C$ . L'idée de cette partie est de l'expliquer thermodynamiquement.

### 2.1 Choix et contraintes sur le potentiel thermodynamique

[31], p. 213 & TP M. Pierce, p. 8-9 - Expliquer pourquoi  $G$  est le potentiel adapté et écrire son développement en puissance de  $M$ .

### 2.2 Minimisation du potentiel

[31], p. 214 & TD M. Pierce, p.8-9 - Calcul des dérivée première et seconde du potentiel à l'équilibre et relation entre les coefficients. Condition de stabilité.

Pour aller plus loin dans la description il faut injecter les résultats expérimentaux observés en fonction de la température.

### 2.3 Confrontation aux résultats expérimentaux

[31], p. 216 - Pour la température inférieure à la température critique il y a existence d'une aimantation. En déduire les signes des constantes et la stabilité des solutions. Même raisonnement à  $T_C$  et au-dessus de  $T_C$ . Supposer la forme de  $\alpha \approx \alpha_0(T - T_C)$  à partir des conditions trouvées sur son signe. Tracer au tableau le potentiel en fonction de l'aimantation pour différentes températures.

### 2.4 Prédications du modèle

[31] p. 218 & [60], p. 267 - En déduire l'aimantation à l'équilibre et tracer  $M$  en fonction de  $T$  (un vrai diagramme de phase serait plutôt une ligne de  $T$  avec le domaine ferro en dessous de  $T_C$  et le para au-dessus). Calculer l'entropie, montrer qu'elle est continue de sorte qu'il n'y a pas échange de chaleur : transition du second ordre! C'est confirmé par le fait qu'il n'y a jamais coexistence des 2 phases! La capacité calorifique à pression constante, elle, est en revanche discontinue! Montrer les variations génériques de  $G$ ,  $S$  et  $c_p$  pour une telle transition sur [slide](#).

**Conclusion :** On a vu deux transitions de phase illustrant chacune des deux grandes familles de transition, du 1er et 2nd ordre. On a fini par calculer le comportement de l'aimantation à la température critique en loi de puissance. Ce comportement est tout à fait général et au sein d'une même famille il existe des classes dites d'universalité pour lesquelles ces exposants sont les mêmes!

**BONUS :** \_\_\_\_\_

- Définition générale d'une transition de phase : singularité d'une fonction thermodynamique ou de l'une de ses dérivées, frontière dans l'espace des variables intensives, paramètre d'ordre ( $\rho$  pour la transition liquide-vapeur,  $m$  pour la transition ferro-para), développement du potentiel en puissances du paramètre d'ordre.





# LP n° 16 : Facteur de Boltzmann

**NIVEAU :** CPGE

On traite cette leçon au niveau de programme de MP.

**PRÉREQUIS :**

- Cours de thermodynamique
- Hydrostatique
- Loi d'Arrhenius.

**PLAN :**

1. Nécessité d'une description statistique illustrée sur l'exemple de l'atmosphère isotherme
2. Description statistique d'un système macroscopique à l'équilibre avec un thermostat

3. Illustration sur l'étude détaillée d'un système à deux niveaux

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [30] B. Diu, *Physique statistique*, Hermann 1997
- [64] *Physique MP/MP\**, Dunod (1ere édition)
- Cours de S. Komilikis.
- Tec & Doc MP, nouveau programme.

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

**Introduction :** Le cours de thermodynamique permet d'obtenir des grandeurs avec les données macros. La physique statistique permet de comprendre les propriétés macro des systèmes à partir des données micro sur les constituants.

## 1 Nécessité d'une description statistique illustrée sur l'exemple de l'atmosphère isotherme

L'idée de cette leçon c'est de faire le lien entre les grandeurs macroscopiques qu'on a l'habitude d'étudier et l'état microscopique des particules. On commence par prendre un exemple simple : toutes les particules sont attirées vers le bas mais elles ne peuvent toutes se plaquer au sol car la pression équilibre la gravité selon l'équation de l'équilibre mécanique  $dP/dz = -\rho g$ .

### 1.1 Pression dans l'atmosphère isotherme

Cours de SK, p.3 & [64], p. 932 - Position du problème sur [slide](#) puis p. 934 - Hypothèses :  $g$  uniforme, température homogène, composition de l'air (80%  $N_2$ , 20%  $O_2$ ) considéré comme un mélange idéal de GP. Loi des gaz parfaits pour obtenir  $P$  en fonction de  $\rho$  et on injecte dans l'équation mécanique pour obtenir l'équation différentielle sur  $P(z)$ . Apparaît une longueur caractéristique (le vérifier par analyse dimensionnelle), en donner un ordre de grandeur. Comme toujours dans ce genre d'équation différentielle c'est l'échelle caractéristique de décroissance de  $P$ , le vérifier en résolvant et traçant le profil de pression en fonction de  $z$ . Insister sur le facteur exponentiel (qui n'est pas encore tout à fait le facteur de Boltzmann) et discuter rapidement de l'influence de  $g$  et  $T$  (facteurs d'ordre et de désordre).

### 1.2 Position d'une particule dans l'atmosphère

[64], p. 935 - Qu'en est-il des particules? A priori dans ce problème purement classique la seule question pour une particule d'air c'est : à quelle altitude je me trouve? Évidemment on en sait rien du tout, et de toute façon elle est soumise à l'agitation thermique donc elle n'a pas une position déterminée, mais on peut essayer de dire des choses pas trop bêtes... On peut notamment commencer par décrire l'état mésoscopique (à définir) du système.

Déjà, on a la pression donc on peut savoir qu'elle est la masse volumique locale de l'air à l'altitude  $z$ .

Du coup on peut accéder au nombre  $dN(z)$  de particules dans un volume  $d\tau$  autour de la position  $z$ !

Finalement, on ne sait pas dire quelle particule est à quel endroit mais on n'a seulement besoin de savoir combien il y a de particules autour d'une altitude donnée. On va donc abandonner l'idée de décrire la position exacte de chaque particule et s'attacher à plutôt d'écrire la probabilité pour une particule d'être dans un état donné.

**Transition :** analyse microscopique donne accès aux propriétés macroscopiques : il faut définir le cadre de la physique statistique. Notion de probabilité à généraliser dans le cadre de la physique statistique. existe-t-il une loi permettant de donner ces probabilités?

## 2 Description statistique d'un système macroscopique à l'équilibre avec un thermostat

### 2.1 Les objets de la physique statistiques

[64], p. 929 - Définitions d'un système thermodynamique, de son macro-état et de son micro-état. On peut prendre l'exemple du dé pour que ce soit bien clair (voir [slide](#)).

Pour un système thermodynamique, IL EST ILLUSOIRE DE VOULOIR CONNAÎTRE AVEC EXACTITUDE LE MICRO-ÉTAT d'autant qu'il n'est pas unique : plusieurs micro-états peuvent correspondre à un même macro-état! Ainsi, **on renonce à déterminer l'état instantané d'une particule et on adopte le point de vue suivant :**

- On cherche l'ensemble des états accessibles à la particule compte-tenu des contraintes.
- On cherche par des considérations théoriques à attribuer des probabilités d'occupation à ces différents états.
- On détermine le macro-état à partir d'un état moyen lié aux probabilités.

Remarque (importante) : Ces probabilités n'ont rien à voir avec celle de la mécanique quantique. Ici, elles trahissent vraiment une méconnaissance de l'état instantané du système.

### 2.2 Loi de Boltzmann pour un système à spectre discret d'énergie

[64], p. 937 - On se place dans un cadre assez strict : système fermé, en équilibre avec un thermostat et formé de particules indépendantes du point de vue du phénomène considéré. De plus, on suppose que les particules accèdent à des états ayant tous des énergies différentes et réparties de manière discrète. On a alors la loi de Boltzmann :

A l'équilibre thermique à  $T$ , la probabilité  $p_i$  qu'une particule se trouve dans un état ( $i$ ) d'énergie  $E_i$  est

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-E_i/k_B T}$$

Insister sur le facteur de Boltzmann, la fonction de partition (calculée par normalisation) et introduire la notation  $\beta = 1/k_B T$ . Donner la valeur de  $k_B$  et l'ordre de grandeur de  $k_B T$  à température ambiante :  $k_B T_{amb} = 1/40 \text{ eV} = 250 \text{ meV}$ .

Remarque : On ici supposé que les états accessibles ont tous une énergie différente. A une énergie  $E$  donnée ne peut alors correspondre qu'un unique état. On dit que l'état d'énergie  $E$  est non dégénéré. Si plusieurs états ont la même énergie  $E$  on dit que l'état d'énergie  $E$  est dégénéré ( $g(E)$  fois) et la probabilité d'être dans un état d'énergie  $E$  est  $g(E) \cdot p(E)$ .

Commenter la dépendance de la probabilité avec la comparaison de l'énergie du niveau à l'énergie thermique.

### 2.3 Lien avec la description macroscopique

Le lien avec le macro-état se fait avec les valeurs moyennes : à la limite thermodynamique (cf. [30], pp. 280-282) les valeurs moyennes coïncident en très bonne approximation avec les valeurs instantanées des grandeurs macroscopiques. Calculer par exemple la valeur moyenne du nombre de particules dans un état d'énergie donnée. **Faire le lien avec la densité trouvée en I.** On peut faire pareil pour l'énergie, ça nous servira plus tard.

---

Transition :

---

## 3 Illustration sur l'étude détaillée d'un système à deux niveaux

Partie à compléter avec le Tec& Doc MP/MP\* nouveau programme.

### 3.1 Exemples de systèmes

[64], p. 945 - exemple du cristal paramagnétique (atome de spin 1/2 soumis à un champ B) et voir LP43.

### 3.2 Population

[64], p. 941 - Donner les probabilités d'être dans les états 1 et 2 et calculer la fonction de partition. Si le système est formé de  $N$  particules identiques et indépendantes il est décrit au niveau macroscopique par les valeurs moyennes des populations. Commenter les variations de  $N_1/N$  et  $N_2/N$  en fonction de  $T^*$  (température adimensionnée). **slide**

Différencier les cas  $k_B T \ll \epsilon$  (niveau excité n'est quasiment pas peuplé) et  $k_B T \gg \epsilon$  (les deux niveaux sont également peuplés - l'énergie thermique compense l'effet d'ordre). Exemple avec l'hélium :  $\Delta E \approx 1\text{eV}$  or  $k_B T_{amb} \approx 25\text{meV}$  donc excitation du niveau 2 gelée.

### 3.3 Energie du système

Calculer l'énergie moyenne pour le système puis pour  $N$  particules. Commenter le tracé de l'énergie en fonction de la température. **slide**. Si on a du temps, rajouter le calcul de la capacité calorifique

### 3.4 Importance des fluctuations

[64], p. 931 & cours de SK - Expression de la variance et de l'écart type. Calculer l'énergie totale du système et l'écart type. L'énergie croît comme  $N$  alors que l'écart type croît en racine de  $N$ . Les fluctuations deviennent donc négligeables au passage à la limite thermodynamique et l'énergie du système est égale à sa moyenne statistique.

Si on a du temps, commenter la fluctuation de l'énergie en fonction de la capacité calorifique.

**Conclusion :** A travers le modèle de l'atmosphère isotherme on a introduit le facteur de Boltzmann qui évalue l'importance du système face à l'agitation thermique. La loi de Boltzmann permet de calculer les probabilités des micros états afin de déterminer l'état du système à partir de considérations microscopiques. Il existe des systèmes non décrits par la statistique de Boltzmann mais par d'autres tq fermi-Dirac ou Bose-einstein.

#### BONUS :

- Toute la leçon (toute la physique statistique en fait...) repose sur le PRINCIPE ERGODIQUE, voir [30], p. 33.
- Lire les expériences de détermination du nombre d'Avogadro de Jean Perrin. Si on trouve  $R$  on retrouve  $k_B$ . A présent la constante de Boltzmann est fixée par la nouvelle convention des unités SI.
- Relire statistique pour bosons et fermion.
- Relire un peu de biblio sur l'atmosphère isotherme (nom des différentes couches de l'atmosphère et leur hauteur).
- Relire la loi de Boltzmann dans le cas continu dans le cours [2], puis connaître les hypothèses pour passer au discontinu
- Relire le théorème d'équipartition et sa preuve dans [30], p. 307 & [64], p. 947.
- Dans le cas des fluctuations si  $N$  tend vers l'infini on tend vers la limite thermo : équivalent des 3 ensembles.
- Relire vite fait les trois ensembles dans le Diu.
- Vocabulaire : on ne devrait pas dire atmosphère isotherme mais adiabatique.
- Ici on a fait que la méthode discrète mais on aurait pu discuter de manière classique, voir [2].
- Selon le temps disponible, on peut faire une partie plus ou moins longue sur la capacité thermique dont l'importance réside dans la formule  $\sigma_E^2 = C_V k_B T^2$  : les fluctuations intrinsèquement liés à la méconnaissance du micro-état sont en fait liés à une grandeur macroscopique mesurable!



# LP n° 17 : Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.

## NIVEAU : LICENCE

Cette leçon est partie intégrante de l'ancien programme de prépa (MP notamment) mais n'y apparaît quasiment plus du tout, ou sous forme d'une approche documentaire descriptive. Je la place ici niveau licence (2) sans pour autant l'aborder du point de vue de la physique statistique (gaz de photons etc...) qui relève plutôt d'un cours de L3, voire M1.

### PRÉREQUIS :

- Méthode du bilan
- Lois de la diffusion
- Électromagnétisme

### PLAN :

1. Échanges d'énergie par rayonnement
2. Propriétés du rayonnement d'équilibre thermique

3. Rayonnement des corps et bilan radiatif

### BIBLIOGRAPHIE :

- [18] Hprépa de thermodynamique, MP/MP\*
- [30] B. Diu, *Physique statistique*.
- [60] J.-P. Pérez, *Thermodynamique. Fondements et applications*.
- [71] Dunod PC, nouveau programme

### IDÉES À FAIRE PASSER :

Le rayonnement est un phénomène difficile à décrire. D'une part il faut mettre en place un certain nombre de grandeurs spécifiques que les étudiants n'ont pas l'habitude de rencontrer et qu'il faut ici définir proprement. D'autre part le rayonnement émis par un corps quelconque est mal connu, c'est pourquoi cette leçon est rigoureusement encadrée par les notions D'ÉQUILIBRE THERMIQUE et de CORPS NOIR.

**Introduction :** Importance historique et constatation expérimentale au quotidien, voir [18] pp. 75-76.

**Expérience :** Augmenter progressivement l'intensité parcourant une ampoule à filament, et constater le changement de couleur et le changement d'intensité.

En fait, rayonnement = onde EM = flux de photons. Questions : quelle énergie est emportée par l'onde? Comment relier le rayonnement émis à la température du corps? Comment cela dépend-t-il de son état physique?

## 1 Échanges d'énergie par rayonnement

### 1.1 Interaction du rayonnement avec la matière

Définir le flux, flux surfacique et flux surfacique spectral inspiré de [18], p. 77. Faire le parallèle entre le vecteur densité de flux surfacique de la diffusion et le vecteur de Poynting.

Grandeurs caractéristiques de l'interaction entre le rayonnement et une surface matérielle : flux incident, réfléchi, absorbé et transmis, dans [18] p. 78. Flux radiatif = flux total émis par le corps. Prendre exemple sur les flux radiatifs reçus et émis par le soleil et la terre (indépendamment).

### 1.2 Corps noir

Présenter le corps noir comme un cas particulier du cas général précédent pour lequel les flux réfléchi et transmis sont nuls ([18], p. 79) et poser la question de l'existence d'un tel corps. Proposer une réalisation expérimentale, cf. [71], p. 160; schéma au tableau. Discuter les corps noirs dans certains domaines du spectre, exemples de corps noir par domaine dans [71], p. 160. Approximer le soleil par un corps noir en négligeant tous les flux devant le flux émis.

**Expérience :** On peut sortir le four pour montrer un modèle expérimental de corps noir.

Evoquer la correction en corps gris, depuis [60], p. 358 et [71], p. 165.

### 1.3 Énergie du rayonnement

Energie volumique d'un rayonnement monochromatique, notamment le fait que chaque photon portant  $h\nu$  l'énergie du rayonnement équivaut au nombre de photons. Introduire le fait que le rayonnement étudié n'est pas monochromatique, donc qu'on a besoin de connaître l'énergie volumique de chaque mode : densité spectrale d'énergie volumique, voir [71], p. 162. Proposer le passage de l'expression en fréquence (plus pratique car on connaît l'énergie des photons de fréquence  $\nu$ ) à celle en longueur d'onde (usuellement utilisée pour décrire le rayonnement).

**Transition :** On a défini les outils nécessaires pour décrire le rayonnement de manière générale. Il s'agit maintenant, dans le cas de l'équilibre thermique, d'établir la dépendance de ces grandeurs avec la température.

---

## 2 Propriétés du rayonnement d'équilibre thermique

Imposer le cadre (enceinte thermostatée) et définir le rayonnement d'équilibre thermique ([71], p. 161).

### 2.1 Loi de Planck

Évoquer l'origine physique de la loi de Planck (gaz de photon, photon = boson, dénombrement des modes et intégration - attention à pas rentrer dans les détails au point de déborder des prérequis!); se préparer aux questions sur cette démonstration bien sûr, voir notamment [30], p. 825. Énoncer proprement la loi en fréquence et s'aider du **programme Python « Rayonnement »** pour tracer le relevé expérimental, et superposer la loi. Écrire la loi en longueur d'onde.

On peut enfin parler brièvement de l'aspect historique de la loi (voir la leçon sur le photon), notamment évoquer (et tracer) les lois de Wien et de Rayleigh-Jeans (on peut les déterminer en passant à la limite dans la loi de Planck, cf. [18], p. 84). Introduction de la quantification de l'énergie.

**Transition :** La densité spectrale est caractéristique du flux, mais elle n'est pas pratique pour caractériser les échanges d'énergie au niveau macroscopique. Pour cela il faut la loi de Stefan.

### 2.2 Loi de Stefan

Démonstration de la loi de Stefan dans [18], p. 83 pour le lien entre densité spectrale d'énergie volumique et flux surfacique spectral puis [18], p. 86-87 pour intégrer la loi de Planck. Définir et donner la valeur de la constante de Stefan.

Expérience : Si on est un peu fou on peut faire la manip... et espérer trouver la puissance 4! Voir par exemple le MP05.

**Transition :** Cette étude est valable pour le rayonnement d'équilibre thermique dans une enceinte thermostatée, mais a priori on ne voit pas trop le lien avec le rayonnement émis par les corps qui nous entourent...

---

## 3 Rayonnement des corps et bilan radiatif

### 3.1 Rayonnement émis par un corps noir

Affirmer que le rayonnement émis par le corps noir est le même que celui régnant à l'intérieur d'une cavité à l'équilibre thermique (voir [18], p. 84-85). On revient au **programme « Rayonnement »** pour constater qu'à température ambiante les corps noirs émettent dans l'infrarouge. Comparer le spectre d'équilibre thermique à 5900 K à celui du soleil sur **slide** et confirmer l'approximation réalisée plus haut.

Constater sur le tracé le déplacement du maximum. On l'exprime généralement en longueur d'onde : c'est la loi du déplacement de Wien. On l'énonce *a minima*, et on peut la démontrer rapidement si le temps le permet. Faire le lien avec la manip introductive et la couleur apparente des corps de plus en plus chaud.

### 3.2 Bilan radiatif d'une terre « corps noir »

On vient de voir que le soleil est un corps noir dont on a estimé la température, ce qui permet de déterminer la puissance émise par le soleil et reçue sur terre. Faire l'application. On suppose alors que la terre reçoit le rayonnement précédent et qu'elle absorbe tout, tel un corps noir. Elle est sans doute à l'équilibre radiatif (sa température moyenne en volume varie peu, et c'est le seul moyen qu'elle a de libérer de l'énergie). Quelle est alors sa température? - Comment corriger le modèle?

### 3.3 Facteurs d'influence sur la température de la terre

Pour abaisser sa température elle doit soit rayonner plus que le rayonnement du corps noir (mais on voit pas trop pourquoi ce serait le cas) soit absorber moins! On introduit l'albedo, on refait l'A.N. On a une température trop basse. Il faut introduire l'atmosphère. Traiter le modèle avec atmosphère selon le temps.

---

**Conclusion :** Faire le récap de la leçon : grandeurs caractéristiques du rayonnement et de son interaction avec la matière, propriétés du rayonnement établies à l'équilibre thermique dans une enceinte et lien avec le rayonnement du corps noir. Il faudrait alors étudier le comportement des corps réels, qui selon toute vraisemblance ne sont pas noirs... mais pas trop éloignés on plus vu que ça marche!

**BONUS :**

---

- On ne peut pas aborder sereinement les questions sans avoir relu la démonstration de la loi de Planck à partir de considérations statistiques sur le gaz de photons. Voir par exemple le chapitre associé du Diu de physique statistique [30].





## LP n° 18 : Phénomènes de transport.

### NIVEAU : CPGE

On place cette leçon au niveau PC, ce qui écarte d'office l'éventualité d'une étude approfondie de la convection et du rayonnement. La première peut tout de même être abordée par le spectre des fluides, le second fait l'objet d'une approche documentaire.

### PRÉREQUIS :

- Thermodynamique à l'équilibre
- Mécanique des fluides
- Notion de flux
- Loi d'Ohm Locale?
- Rayonnement thermique (lois de Wien et Stefan)

### PLAN :

1. Introduction à l'étude des systèmes hors équilibre

2. Transport de particules

3. Transport d'énergie sous forme de transfert thermique

### BIBLIOGRAPHIE :

- [31] B. Diu, *Thermodynamique* (2007) - Chap. 9.
- [66] *Physique PC/PC\**, Dunod (Ancien programme, 2006).
- [71] *Physique PC/PC\**, Dunod (2014).

### IDÉES À FAIRE PASSER :

Pour moi, cette leçon n°18 suit la n°17 et précède la n°19 pour de bonnes raisons :

- Le rayonnement n'a pas lieu d'être introduit ici. Il ne fait l'objet au programme de PC que d'une approche documentaire et à mon avis il faut ici le supposé connu.
- Il ne s'agit pas non plus de traiter des bilans thermiques et des applications des différents phénomènes.

En bref, il faut introduire les différents phénomènes dans toute leur diversité, préciser leurs différentes propriétés et éventuellement les comparer entre eux.

**Introduction :** [71], p. 119 & [31], p. 461 - On a précédemment étudié la thermodynamique des transformation entre état d'équilibre sans jamais se poser la question du chemin suivi (c'était d'ailleurs le grand intérêt des fonctions d'état!). Dans cette leçon, on va lever l'hypothèse d'équilibre thermodynamique et s'intéresser aux mécanismes de transport des grandeurs usuelles (matière, énergie, charge, ...).

## 1 Introduction à l'étude des systèmes hors équilibre

Phénomènes de transport = Inhomogénéité de grandeur intensive -> transport d'une grandeur extensive -> rétablir l'homogénéité

### 1.1 Évolution des grandeurs conservées

On va s'intéresser à des grandeurs conservées sans terme de source, typiquement les particules (sans réaction chimique), l'énergie ou encore la charge. Ainsi, on s'assure que les variations de ces grandeurs  $X$  dans un système donné ne peuvent être dues qu'à des échanges avec l'extérieur.

Surtout, le fait de travailler avec des grandeurs conservées implique que l'équilibre ne peut être atteint grâce aux collisions microscopiques mais ne peut advenir que du transport d'une certaine quantité d'un point à un autre de l'espace.

Reste encore un problème avant de commencer l'étude : les grandeurs thermodynamiques usuelles (température, entropie, énergie, pression, ...) n'ont été définies que pour un système à l'équilibre de sorte que dans notre étude où l'équilibre est justement perturbé il n'est pas acquis que ces grandeurs seront définies.

### 1.2 Nécessité de l'équilibre thermodynamique local

[31], p. 464 & [71], p. 120 - Définir les trois échelles et comment arriver à l'équilibre local par découpage en sous-volumes mésoscopiques. Donner des exemples d'échelles. Limite de l'hypothèse : déséquilibre pas trop fort ne permettant plus l'approximation linéaire.

### 1.3 Description locale des flux

Cette nouvelle notion d'équilibre implique une description locale de la répartition d'une quantité dans un système. Définir la densité volumique, [31], p. 468.

Enfin pour décrire efficacement le transport on définit la densité de courant  $\vec{j}$ , d'après [31], p. 468. La connaissance de cette grandeur en tout point permet la description complète de l'évolution du système.

---

**Transition :** Nous avons établi les conditions générales de l'étude des phénomènes de transport. Nous pouvons donc entamer l'étude successive de deux grands types de transport au programme de PC : le transport de matière et le transport d'énergie sous forme de transfert thermique.

---

## 2 Transports de particules

Lorsqu'on veut étudier un phénomène de transport quel qu'il soit, ici le transport de particules, on doit commencer par déterminer la cause du transport et exprimer la densité volumique de courant associée. Dans un premier temps on s'intéresse à la diffusion de particules (i.e. sans convection) donc dans une région de l'espace où pression et température sont uniformes. Il faut prendre le temps, pour répondre aux questions, de lire [31], pp. 473-483.

### 2.1 Loi de Fick

Qu'est ce qui impose le déplacement des particules? [71], p. 95 - On constate expérimentalement que les particules se meuvent depuis les zones où la concentration est la plus élevée vers les zones de plus faible concentration (voir mécanisme microscopique dans [31], p. 479).

Que vaut la densité volumique de courant surfacique? [71], p. 95 - Donner la loi de Fick et sa signification : diffusion des particules des zones de densités les plus élevées aux plus faibles. Définir le coefficient de diffusion, unité et ordres de grandeurs. Limite de validité (p. 96). On peut éventuellement (et selon le temps imparti) évoquer l'interprétation microscopique de la loi, cf. [31], p. 479.

### 2.2 Équation de diffusion

[71], pp. 91-93 - Bilan de particules sur un volume mésoscopique 1D et généralisation à 3D, puis combiner avec la loi de Fick pour obtenir l'équation de diffusion 3D ([71], p. 96).

On verra que cette forme d'équation est très générale pour la description des phénomènes diffusifs. De ce fait, il est cohérent de s'arrêter quelques instants sur son étude : voir [71], p. 97 et [31], p. 480 - Phénomène irréversible (expliquer que c'est très intuitif : si on fait tomber une tache d'encre sur un buvard c'est parfaitement impossible qu'elle revienne à sa forme initiale), évolution au cours du temps en  $L \approx \sqrt{DT}$  par adimensionalisation de l'équation de diffusion (p. 99) et expérience :

**Expérience :** Diffusion du glycérol dans l'eau. Voir MP33. Trouver la loi en racine de  $t$  et le coefficient de diffusion.

Remarque : la diffusion est un mécanisme de transport très peu efficace! Si on veut mélanger deux types de molécules il est extrêmement long d'attendre qu'elles diffusent les unes dans les autres! C'est bien plus efficace de forcer la convection (mais aussi beaucoup plus compliqué à décrire!) - On peut le faire expérimentalement en agitant la cuve de glycérol...

### 2.3 Diffusion sous l'effet d'une différence de potentiel

Voir [31], p. 483 selon le temps.

---

**Transition :** Sur l'exemple commun des particules on a bien compris la phénoménologie attachée au mécanisme de diffusion. On se propose donc de prolonger ce raisonnement à l'étude d'une grandeur plus proche du cours de thermodynamique : l'énergie.

---

### 3 Transport d'énergie sous forme de transfert thermique

#### 3.1 Modes de transport possibles

Voir [31], p. 487 - Rayonnement (déjà vu) et convection (déjà évoqué plus haut) on peut dire ici que le gradient de température est généralement la cause la convection naturelle. Montrer des images des courants océaniques ou des mouvements dans une casserole d'eau? - Cellule atmosphérique?

Aussi, diffusion de l'énergie sous forme de transfert thermique comme on en a l'habitude depuis longtemps : en mettant en contact deux objets à des températures différentes on sait bien que la « chaleur » diffuse de l'objet chaud vers l'objet froid.

#### 3.2 Loi de Fourier

Même principe que la loi de Fick. Voir [71], p.p. 130-131 et [31], p. 488.

#### 3.3 Équation de la chaleur

On refait le bilan 1D pour trouver l'équation locale généralisée à 3D et on injecte Fourier, cf. [71], p. 132. INSISTER LOURDEMENT SUR LE FAIT QUE C'EST EXACTEMENT LA MÊME ÉQUATION QUE PRÉCÉDEMMENT DONC TOUT S'APPLIQUE DE MANIÈRE ANALOGUE!. Traiter l'exemple du choc thermique de [31], pp. 500-501.

Expérience : Diffusion thermique dans le barreau de cuivre. On fait un relevé des points au cours du temps et on peut vérifier à nouveau la loi en racine de  $t$ .

On a le même argument que précédemment pour exprimer l'irréversibilité mais on a surtout ici le seconde principe de la thermodynamique à notre disposition : faire le bilan entropique dans le [71], p. 134.

#### 3.4 Transport d'énergie à l'interface entre un solide et un fluide

Modélisation par la conduction dans la couche limite. Intuiter la loi de Newton [71], p. 123.

**Conclusion :** Possibilité d'ouvrir sur l'effet Seebeck qui fait le lien entre différents modes de transport dans les métaux, ou la loi de Wiedmann-Franz. On peut aussi ouvrir sur le transport de quantité de mouvement et le nombre de Reynolds qui permet de quantifier l'importance relative de la convection et de la diffusion.

**BONUS :**

- Il faut remarquer que le meilleur moyen de négliger la convection sans plus de cérémonie, c'est de travailler dans des solides!
- Cette leçon à l'air longue, mais je pense que la partie sur la loi de Fourier et l'équation de la chaleur étant très analogue à la partie sur la diffusion de particule on peut facilement l'expédier.



# LP n° 19 : Bilans thermiques : Flux conductifs, convectifs et radiatifs.

NIVEAU : CPGE \_\_\_\_\_

PRÉREQUIS : \_\_\_\_\_

- Thermodynamique (1er principe)
- Diffusion de particules
- Mécanique des fluides
- Électromagnétisme
- Rayonnement du corps noir?

PLAN : \_\_\_\_\_

1. Formulation locale du bilan thermique
2. Propriétés des différents flux

3. Analyse d'une cellule solaire

BIBLIOGRAPHIE : \_\_\_\_\_

- [65] Dunod, MP/MP\* ancien programme.
- [66] Dunod, PC/PC\* nouveau programme.
- [64] Dunod, MP/MP\* nouveau programme.
- [31] *Thermodynamique*, Diu, Hermann, 2007.
- On peut éventuellement visiter ce site de l'université de Lyon.

IDÉES À FAIRE PASSER : \_\_\_\_\_

Il y a une méthode générale pour effectuer un bilan. Les différents types de transfert thermique diffèrent par l'expression du flux associé. Enfin, il faut faire sentir l'importance de l'outil « résistance thermique » pour traiter les problèmes de transfert thermique, et les hypothèses associées.

**Introduction :** On veut résoudre un problème du quotidien : comment évolue la température d'un système donné au cours du temps? Pour cela, on a besoin de s'intéresser à l'énergie du système, et de développer un nouveau formalisme pour les différents flux thermiques de conduction, convection et rayonnement.

## 1 Formulation locale du bilan thermique

### 1.1 Équilibres thermodynamique et mécanique

[31], p.488 et [35], p. 26 - Les systèmes étudiés vont voir leur température varier dans le temps et dans l'espace (de même que P éventuellement) : systèmes hors équilibres. L'étude de la température demande qu'elle soit au moins définie en tout point à tout instant. C'est l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local.

Sous cette hypothèse d'ETL, on aura aussi l'équilibre mécanique car le temps nécessaire pour qu'il s'établisse est beaucoup plus court.

### 1.2 Bilan thermique

Faire un schéma et définir le système étudié : sous-volume  $V$  d'une pccii délimité par une surface fermée  $\Sigma$ , puis on expose et applique la méthode du bilan thermique - On travaille à une seule dimension dans le cadre du programme de CPGE, puis on généralise en 3D.

1. Application du premier principe & annulation du terme de travail;
2. Expression intégrale de  $dU/dt$
3. Interprétation du terme de transfert thermique en échange + création (sources internes); expression avec la puissance volumique des sources internes.

Remarque sur les dimensions de  $dU$ ,  $\delta Q$  et  $p(M, t)$ . Difficulté de l'expression du terme d'échange dans le cas général.

### 1.3 Grandeurs associées aux transferts à travers une surface $\Sigma$

Définitions sur [slide](#) (flux thermique à travers  $\Sigma$ , flux thermique surfacique élémentaire, vecteur densité de flux thermique). Expression du  $\delta Q$  d'échange comme le flux de  $\vec{j}_{th}$ . **Prêter une attention particulières aux signes!**

Dernière étape du bilan : tout recoller et appliquer Green-Ostrogradsky. Ceci étant vrai pour tout sous-volume, c'est vrai en tout point. On obtient l'équation locale du bilan thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_{th}) = p \quad (19.1)$$

Là encore, on obtient l'équation à 1D et on généralise sans plus de cérémonie.

**Transition :** Comment exprimer  $\vec{j}_{th}$  ou  $\varphi$  dans les différents cas de transferts thermiques?

## 2 Propriétés des différents flux

### 2.1 Transfert par diffusion : la conduction

[71], p. 130-133 - Phénomène caractérisé par la loi phénoménologique de Fourier, avec  $\lambda$  la conductivité thermique du milieu (constante positive) en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ .

Remarques : gradient de T et signe - impose le sens donc irréversible; loi linéaire et instantanée; analogue à la loi d'ohm locale dans les conducteurs. **slide** : odg de  $\lambda$ .

Conséquence sur l'équation du bilan thermique. Équation de la chaleur qui devient, en absence de terme source, une équation de diffusion de coefficient  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ . Analyse de la réponse indicelle : temps caractéristique de la diffusion  $\tau = L^2/D$ . **slide** : Comparaison  $\lambda$  et  $D$ .

### 2.2 Transfert par convection

Transfert par convection = déplacement de matière qui transporte son énergie. Dans notre cas, équilibre mécanique donc pas de mouvement macroscopique. Mais possible convection aux limites de notre système. Il faut étudier la conducto-convection. **slide** : discontinuité apparente de Température. Interprétation par conduction dans la couche limite. Loi de Newton, avec  $h$  le coefficient de transfert conducto-convectif en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ .

### 2.3 Transfert par rayonnement

[71], p. 121 Définition du rayonnement. [65], p.842 Définition du rayonnement d'équilibre thermique. [65], p. 847 loi de Stefan. [65], p. 853 – 854 bilan radiatif à la surface d'un corps noir et arriver au lien avec le coefficient de transfert de la loi de Newton : on est content on a une loi qui a la même forme que pour la convection.

**Transition :** On s'est donné la méthode du bilan thermique et obtenu l'équation associée, on a aussi à notre disposition les bons outils pour décrire les flux thermiques. On va donc finalement mettre cette armada en branle pour s'attaquer à un problème concret et voir comment on peut aussi mettre à profit l'analogie avec l'électrocinétique. —

## 3 Analyse d'une cellule solaire

Tiré de l'exercice B.6 de [65], p. 867 et corrigé p. 1155.

### 3.1 Position du problème

Un capteur solaire thermique est un dispositif conçu pour recueillir l'énergie solaire transmise par rayonnement et la communiquer à un fluide caloporteur (gaz ou liquide) sous forme de chaleur. Cette énergie calorifique peut ensuite être utilisée pour le chauffage des bâtiments, pour la production d'eau chaude sanitaire ou encore dans divers procédés industriels. Présenter le schéma de la bête sur **slide**. Expliquer les phénomènes mis en jeu au niveau de chaque couche du capteur :

- Conducto-convection : au niveau de 1, de 4, 5 et 6.
- Conduction : au niveau de 2 et 3 et dans toutes les couches fixes.
- Le rayonnement solaire arrive au niveau de la couche 3 directement car le verre et l'air sont transparent à ces rayonnements.

Transition : possible de résoudre ce problème à l'aide du calcul de flux et de bilan radiatif sur chaque couche... Un peu long. Existence d'une analogie électrocinétique qui simplifie le problème.

### 3.2 Formalisme de la résistance thermique

[71], p. 139-140 - Prendre comme système d'étude l'épaisseur de verre de la couche 1 à 2. Donner le flux à travers cette surface et l'exprimer en fonction de la différence de température, en déduire l'expression de la résistance thermique + unité + faire l'application numérique dans le cas du verre. [65], p. 817 - Donner la résistance thermique dans le cas de la conducto-convection. De même on peut définir la résistance thermique dans le cas du rayonnement avec un  $h_{rad}$  comme dans [65], p.854-856.

Transition : formalisme permet de faire le bilan de manière simplifié.

### 3.3 Résolution

Équivalence des différents flux avec les résistances thermiques. Présenter le cas simple de la mise en série du caloporteur de l'isolant et de l'air. Puis l'air + verre + air. Enfin étudier les 2 interfaces du caloporteur et tout remettre ensemble. (Feuille annexe). PWP avec expression qu'on retrouve avec  $R_1$  et  $R_2$  simplement. [65], p.1158 + 867 Calculer le rendement du système.

Il faut exprimer  $T_F - T_0$  par la loi des mailles en notant les résistances  $R_1$  et  $R_2$  puis remplacer par l'expression des intensités pour exprimer  $\varphi_4$  et enfin remplacer  $R_1$  et  $R_2$  par leur expression.

**Conclusion :** Récap + les résistances thermiques qui ont permis une simplification du bilan c'est top mais il faut faire un peu attention aux conditions d'application : pas de terme de source ni de fuites thermiques, régime stationnaire, flux constant.

**BONUS :**

- La description détaillée des flux relève plus des prérequis (leçon « phénomènes de transport ») que de cette leçon véritablement. Il faut surtout garder du temps pour traiter calmement le capteur solaire et notamment introduire la résistance thermique avec précision.





# LP n° 20 : Conversion de puissance électromécanique

NIVEAU : CPGE

Cette leçon est au niveau du programme PSI, « esprit nouveau programme »

PRÉREQUIS :

- Induction
- Électromagnétisme dans les milieux

PLAN :

1. Le contacteur électromagnétique
2. Le moteur synchrone
3. Le moteur à courant continu

BIBLIOGRAPHIE :

- [22] *Physique Tout-en-un PSI/PSI\**, Dunod 2017 (4e édition)
- Cours de conversion électro-magnéto-mécanique de la Spé 2 du Lycée Naval. ou encore .
- Electronique 2ème année PSI-PSI\*, HPrépa, 2004

IDÉES À FAIRE PASSER :

**Introduction :** Cours de Naval, p. 1 - Le phénomène d'induction électromagnétique a mis en évidence la possibilité de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. L'étude d'une machine électromécanique nécessite de connaître l'expression de la force (translation) ou du couple (rotation) s'exerçant sur la partie mobile. Les machines réelles sont constituées de matériaux ferromagnétiques, le calcul direct des actions électromécaniques n'est alors pas envisageable. Sur un premier exemple en translation, on présente une méthode générale permettant de déterminer la force électromagnétique via une étude énergétique. Cette technique sera alors mise en œuvre pour l'étude des machines synchrone et à courant continu.

## 1 Le contacteur électromagnétique

### 1.1 Présentation

Relais, sert d'interrupteur dans les dispositifs de sécurité électrique (exemple du disjoncteur différentiel). Un noyau ferromagnétique fixe en forme de U est excité par une bobine de  $N$  spires parcourue par un courant d'intensité  $i$  (électro-aimant). Deux entrefers d'épaisseur  $x$  variable le séparent d'un bloc ferromagnétique mobile en translation selon  $O_x$ . On note  $S$  la section constante du circuit magnétique et  $l$  sa longueur moyenne en l'absence de l'entrefer (cf. slide). La bobine est constituée de  $N$  spires et parcourue par un courant  $i(t)$ .

[22], p. 707-710 et Cours de Naval, p. 1 - Lorsque l'intensité  $i$  est nulle dans la bobine, la partie mobile ne subit aucune force. En présence d'un courant, la partie fixe se comporte comme un électroaimant, elle attire la partie mobile avec une certaine force qu'on cherche à déterminer. Établissement du champ  $B$  et de l'inductance propre par théorème d'Ampère et conservation du flux de champ magnétique. Inductance = fonction décroissance de  $x$ .  $E_{magn} = 1/2L(x)i^2$ .

### 1.2 Bilan énergétique

[22], p. 710 et Cours de Naval, p. 1-2 - On considère le système constitué de l'ensemble noyau + bobine. On suppose qu'un opérateur extérieur déplace le barreau en exerçant la force  $F_{op}$ , la bobine étant traversée par un courant  $i$  et soumise à la tension  $u$  (slide). schéma électrique équivalent. L'action de l'opérateur modifie le flux (inductance propre fonction de la position), ceci entraîne l'apparition d'une force électromotrice. Équation électrique + 1er principe (la puissance fournie par le générateur fait varier les énergies potentielle, cinétique et EB et compense les pertes par effet joule) + théorème de l'énergie cinétique. Il y a établissement de la force  $F_{em}$ , proportionnelle à  $i^2$ , force de rappel. Ce type de dispositif peut servir de contacteur électromagnétique permettant de commander la fermeture ou l'ouverture d'un circuit électrique via le déplacement de la partie mobile qui, en l'absence de courant dans la bobine, est ramenée à sa position initiale par l'intermédiaire d'un ressort.

### 1.3 Intérêt et généralisation

[22], p. 708 et Cours de Naval, p. 2 - **Méthode systématique quelque soit le mode d'actionneur :** on détermine l'inductance vue par le circuit électrique au moyen du théorème d'Ampère et de la conservation du flux de champ

magnétique, on en déduit l'énergie magnétique stockée puis la force exercée sur la partie mobile :

$$dE_m = i d\Phi - F_{em} dx \iff \frac{dE_m}{dt} = -P_{meca} - P_e$$

illustre la conversion de puissance électromécanique. La variation d'énergie magnétique stockée est égale à la somme de la puissance perdue par induction et de la puissance mécanique fournie à la barre. On a une méthode pour trouver la force EB, si on est en rotation  $P_{meca} = \Gamma\omega$ , on en déduit la méthode de calcul du couple EB pour tout système.

---

**Transition :** on va utiliser ces résultats pour étudier les moteurs.

---

## 2 Le moteur synchrone

Voir [22], p. 729 pour une introduction sur son utilisation.

### 2.1 Action d'un champ magnétique tournant

[16], p. 311 - Définition d'un champ tournant. Il existe plusieurs méthodes pour créer un champ tournant (les citer) et expliquer la deuxième : utilisation de champs magnétiques sinusoïdaux en quadrature spatiale et temporelle. Voir schémas explicatifs sur slide. Mouvement de rotation de l'aiguille synchrone. [16], p. 313-314 - L'action d'un champ tournant sur un aimant résulte en un couple de moment  $\Gamma(\gamma) = M_0 B \sin(\gamma)$ , moteur si  $\theta$  est entre zéro et  $\pi$  et résistant entre  $-\pi$  et zéro. Le moment magnétique et le champ tournent à la même vitesse : **machine synchrone**.

Transition : le champ B ainsi créé n'est tournant et homogène qu'au centre du système. En réalité, un tel champ ne peut pas être homogène sur tout le rotor, on ne peut donc pas le modéliser par un moment magnétique (approximation dipolaire du moment magnétique plus valable). Il faut une autre approche : calculer chacun des champs dans les différents endroits.

### 2.2 Champ statique, champ rotorique

Cours de Naval, p. 4 et [16] p. 314 - On s'intéresse à une machine synchrone à pôles lisses et à excitation séparée (voir slide). Présentation de la structure de la machine (rotor, stator). Le but est de déterminer le champ magnétique dans l'entrefer pour en déduire l'énergie magnétique afin de calculer le couple électromagnétique (on suit la méthode établie au I.) :

- [22], p. 731 et Cours de Naval, p. 5 - Champ magnétique créé par une spire statorique unique (slide). Les lignes de champs sont radiales dans l'air de l'entrefer et  $H$  est nul dans le fer.  $yOz$  est un plan de symétrie des courants. On applique le théorème d'Ampère pour  $H$  sur le contour  $\Gamma$ . PWP. On en déduit le champ B et son profil radial dans l'entrefer (à faire au tableau). Le champ créé dans l'entrefer par une seule spire n'est pas sinusoïdal. En plaçant d'autres spires parcourues par le même courant dans des encoches décalées, on approche une forme sinusoïdale. PWP du profil du champ approché puis de la représentation que l'on va choisir pour alléger le dessin (on ne va pas dessiner les N spires).
- [22], p. 734 et Cours de Naval, p. 6 - Ajout d'une deuxième phase statorique déphasée de  $\pi/2$ , calcul du champ glissant : se déplace à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens trigonométrique.
- [22], p. 736 et Cours de Naval, p. 6-7 - Champ glissant rotorique. Il faut créer, au niveau du rotor, l'équivalent du moment dipolaire permanent. PWP le rotor tourne autour de l'axe  $Oz$ , son mouvement est défini par l'angle  $\theta_r$ , l'entrefer est repéré par l'angle  $\gamma$ . Champ rotorique = champ glissant qui tourne avec le rotor à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_r$ .

### 2.3 Couple électromagnétique

On a le champ  $B$  au sein de l'entrefer, on peut en déduire  $E_{EB}$  et  $\Gamma_{EB}$ .

[22], p. 736 et Cours de Naval, p. 7 - On intègre la densité d'énergie volumique, seulement dans l'entrefer car dans les ferro,  $\mu_r \rightarrow \infty$  donc terme négligeable. On décompose le calcul de l'intégrale en trois termes : rotor, stator, couplage. (remarque Cours de Naval, p. 7 en bas!) faire au tableau une intégrale et un slide avec les deux autres. Le couple électromagnétique exercé sur le rotor se déduit par dérivation de l'énergie électromagnétique.

[22], p. 739 et Cours de Naval, p. 7 - Couple moyen et condition de synchronisme : la vitesse angulaire de rotation du rotor doit être égale à la pulsation du courant des phases du stator. Machine synchrone!

## 2.4 Utilisation

[22], p. 739 et Cours de Naval, p. 8 - Fonctionnement moteur et stabilité : schéma du couple en fonction de l'angle au tableau : dispositif moteur quand  $\alpha$  est entre 0 et  $\pi$ . Point de fonctionnement : 2 positions, une stable et une instable. Notion de décrochage + difficulté de démarrage : prendre de l'énergie électrique. (rapide équations) Je ne pense pas qu'on ait le temps de faire le bilan de puissance (PWP) si on veut aussi parler du MCC. On peut parler de l'alternateur aussi.

---

**Transition** : l'alternateur permet d'enchaîner sur les machines réversibles

---

## 3 Le moteur à courant continu

### 3.1 Structure

[22], p. 775 et Cours de Naval, p. 10 - stator + rotor et leur champs. PWP Nécessité d'un collecteur : c'est ce qui fait l'usure du moteur!

Expérience : Présenter le MCC avec l'inversion de sens du courant : collecteur. PWP schéma des angles et du sens du courant.

### 3.2 Fonctionnement

Cours de Naval, p. 11 et [22], p. 781 - On assimile le moteur à courant continu à une machine synchrone pour laquelle l'angle entre le champ statorique et le champ rotorique est en permanence égal à  $\pi/2$ . Couple proportionnel à l'intensité  $i$  du courant qui circule dans le rotor  $\Gamma_{em} = \Phi_0 i$ .  $\Phi_0$  est la constante du couplage, caractéristique du moteur et proportionnelle au champ produit par l'inducteur. Force contre électromotrice + schéma électrique équivalent. PWP bilan énergétique du moteur réel.

### 3.3 Etude en fonctionnement moteur

Cours de Naval, p. 12 et [22], p. 784 - Équation électrique + équation mécanique. Démarrage et régime permanent : contrairement au moteur synchrone, le MCC peut démarrer sans dispositif annexe (couple non nul lorsque le moteur est à l'arrêt). Démarrage possible si le couple moteur dépasse le couple résistant. Point de fonctionnement.

### 3.4 Réversibilité : fonctionnement en générateur

Cours de Naval, p. 13 et [22], p. 784 - Principe + convention d'orientation + PWP bilan énergétique de la génératrice. Applications : génératrice tachymétrique, Freinage d'une machine.

---

**Conclusion** : on n'a pas parlé du rendement de ces machines (il faut évaluer les différents types de pertes et la puissance utile). Important de comprendre le fonctionnement de ces moteurs car sont très utilisés à différentes échelles : motorisation de modèles réduits jusqu'aux TGV.

**BONUS** :

---

- **Le but du contacteur** : Le relais est un contacteur électromagnétique, servant d'interrupteur dans certains dispositifs de sécurité électrique, le disjoncteur différentiel par exemple. Le principe d'un tel disjoncteur est représenté ci-contre. Un tore cylindrique ferromagnétique entoure la ligne bifilaire EDF qui entre dans une pièce. Une ligne assure l'arrivée du courant dans la pièce, l'autre assure son retour. Vu les dimensions considérées, l'ARQS est vérifiée et en fonctionnement normal  $i_{aller}(t) = i_{retour}(t)$  à chaque instant. Si une électrocution a lieu dans la pièce, une partie du courant passe par le corps de la personne et s'enfuit par le sol. Ce courant d'électrocution ne ressort pas par la ligne bifilaire EDF. Donc  $i_{aller} > i_{retour}$ . La ligne bifilaire crée alors un champ magnétique non nul dans son environnement, notamment à l'intérieur du tore. Si un bobinage est enroulé sur une section de ce tore ferromagnétique, une fem d'induction  $y$  est générée par le champ magnétique variable (50 Hz). C'est pourquoi le disjoncteur est qualifié de différentiel : il mesure la différence de courant entre l'entrée et la sortie. La deuxième partie du disjoncteur est constituée par le contacteur électromagnétique, qui est une sorte d'interrupteur. Ce dernier est un dispositif similaire à l'électroaimant de levage étudié précédemment, et c'est la fem discutée ci-dessus qui alimente le bobinage du contacteur. Lorsque la fem est non-nulle, la partie mobile du contacteur subit une force magnétique, ce qui provoque l'ouverture du circuit EDF sur lequel est branché le disjoncteur différentiel : l'électrocution est donc stoppée, et en général la personne n'a pas subi de dommages

physiques importants car l'électrocution a été de très courte durée, et de faible intensité. Les disjoncteurs différentiels visibles en salle de TP sont ceux imposés par les normes de sécurité (les mêmes que chez vous), et limitent la différence de courant « aller-retour » à 30 mA efficace. Si on a plusieurs circuits :

$$E_{magn} = \frac{1}{2} \sum i_k \Phi_k \quad \text{et} \quad \Phi_k = L_k i_k + \sum_j M_{jk} i_j$$

Le bilan de puissance global ne fait pas intervenir la puissance mécanique  $P_{meca}$  due à la fem et la puissance électrique  $P_{el}$  due à l'induction qui sont des puissances internes.

- Leçon très très longue : enlever le MCC, pas grave on sait qu'on n'a pas le temps.

# LP n° 21 : Induction électromagnétique

**NIVEAU :** PCSI \_\_\_\_\_

On prend comme prérequis les blocs 1. et 2. du programme et on traite les blocs 3., 4., et 5.

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Electrocinétique
- Champ magnétique
- ARQS
- Forces de Laplace (actions d'un champ magnétique).

**PLAN :** \_\_\_\_\_

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

1.

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [63] Physique Tout-en-un PCSI, Dunod (5ème édition)
- [68] Physique Tout-en-un PC/PSI, Dunod
- [48] Supermanuel de Physique, S. Komilikis et J. Majou.

**Introduction :** [63], p. 1081 - Présenter l'expérience de Faraday.

Expérience : Aimant à côté d'une spire reliée à une résistance faible, aux bornes de laquelle est branché un oscilloscope.

[63], p. 1082-1083 - Interprétation : la condition pour voir un phénomène d'induction dans un circuit est que le champ magnétique traversant le circuit varie dans le temps. Deux causes possibles que l'on étudiera dans cette leçon : soit le circuit est plongé dans un champ magnétique variable soit c'est le circuit lui-même qui se déplace dans un champ magnétique constant.

## 1 Lois de l'induction

### 1.1 Flux du champ magnétique

[63], p.1084 - Flux d'un champ magnétique uniforme à travers une spire plane : définition + exemples. Pour une bobine : somme des flux pour chaque spire. Unité du flux.

### 1.2 Loi de Faraday

[63], p.1085 - Dans les expériences de l'intro, c'est la variation de flux qui provoque un courant dans le circuit. En 1831, Faraday déduit la loi de ces observations expérimentales. Énoncer la loi + convention de signe générateur. Conditions de validité de la loi.

Transition : Comment interpréter le signe moins dans la loi de Faraday?

### 1.3 Loi de Lenz

[70], p. 290 - Explication en revenant sur l'expérience introductive. Énoncé de la loi Empirique. Interprétation en terme de conservation de l'énergie. Exemple d'une spire soumise à un champ magnétique variable.

**Transition :** Maintenant qu'on a les lois pour comprendre les phénomènes d'induction, on va étudier les deux causes possibles d'apparition de l'induction.

## 2 Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

### 2.1 Auto-induction

[63], p.1093-1096 Coefficient d'auto-induction : flux propre proportionnel au courant qui passe dans le circuit. Explication sur une spire. PWP lignes de champs d'une spire. Unité de L. Auto-inductance tjrs positive. Exemple de calcul d'une inductance propre (solénoïde).

Si l'intensité du courant traversant le circuit varie dans le temps, le flux propre varie et il apparaît donc une force électromotrice induite; FEM auto-induite. Schéma électrique équivalent. Lien avec la loi de Lenz. (Exp : [1] p.1096 mesure d'une inductance). Bilan d'énergie : loi des mailles multipliée par  $i$  :  $E_{magn} = 1/2 Li^2$ .

## 2.2 Cas de deux bobines en interaction

Expérience : Bobines de Helmholtz, envoyer un sinus dans une bobine, regarder aux bornes de l'autre : un signal apparaît.

[63], p. 1098 - Coefficient d'inductance mutuelle. PWP. Flux magnétiques envoyés réciproquement entre les deux circuits. Forces électromotrices induites dans des circuits couplés par mutuelle :  $e_i = -(L_i di_i)/dt - (M di_j)/dt$ .

[63], p. 1102 - Étude de deux circuits couplés + circuits électriques équivalents PWP. Loi des mailles avec M + étude en régime sinusoïdal établi (la bobine 1 est équivalente à un dipôle dont l'impédance dépend des caractéristiques de la bobine 2 à cause du couplage inductif).

Exemple dans la vie courante : le transformateur [63], p. 1105-8 : présenter le principe et obtenir le rapport de transformation à partir des circuits précédents (sans pertes joules  $R = 0$ ) puis son utilisation.

---

**Transition :** Voir l'autre moyen d'observer le phénomène d'induction, et sa réciprocité.

---

## 3 Circuit mobile dans un champ stationnaire

Dans cette partie, on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits mobiles dans un champ magnétique variable. Les dispositifs modèles présentés fonctionnent soit en générateur, quand ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit en moteur quand ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

### 3.1 Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

[1] p.1121-7 Rails de Laplace générateurs. PWP présentation du dispositif. Analyse qualitative, conventions d'algèbre, identification des inconnues, calcul de la fem induite, calcul de l'action de Laplace, résolution du système différentiel, examen du bilan d'énergie. (faire un PWP avec les étapes?). Relation des puissances. Action de freinage de la loi de Laplace. Applications.

### 3.2 conversion de puissance électrique en puissance mécanique

[1] p.1131-5 Rails de Laplace moteurs PWP. Analyse physique, fem induite, équation électrique, force de Laplace et équation mécanique, établissement de la vitesse, établissement de l'intensité, bilan de puissance et d'énergie : rendement du moteur. Ex dans la vie courante : haut-parleur ou moteur à courant continu.

---

**Conclusion :** On a pu décrire le phénomène d'induction et voir deux cas d'observation de celui-ci : induction de Neumann et induction de Lorentz. Dans le premier cas, on remonte à une caractéristique du circuit et dans le deuxième on montre la réciprocité des échanges. L'induction est un phénomène physique très utilisé dans la vie courante : plaque à induction, moteurs de TGV... Ici on ne s'est intéressé à des systèmes filiformes, si on étudie des systèmes formés de bloc métallique, la modélisation utilisée n'est plus valable mais les phénomènes physiques restent les mêmes. Il y a en fait apparition de courants électriques à l'intérieur du volume : courants de Foucault : s'opposent au mouvement.

**BONUS :** \_\_\_\_\_

- Lire le BFR3 [7] pour les questions
- Électromagnétisme 2ème année Gié, Tec&Doc pas mal non plus.

## LP n° 22 : Rétroaction et oscillations.

**NIVEAU :** CPGE

---

Cette leçon est fondée sur le programme de PSI et a priori il n'y a pas lieu de s'en écarter plus que de raison.

**PRÉREQUIS :**

---

- Electrocinétiq ue
- Amplificateurs opérationnels (maintenant appelés ALI)
- Filtrage électronique (fonction de transfert, diagramme de Bode, gain, bande passante)

**PLAN :**

---

1. Système asservi, rétroaction
2. Oscillateurs

**BIBLIOGRAPHIE :**

---

1. [69] Dunod Tout en un Physique PSI/Psi\* Ancien programme
2. [7] BFR 3 Electromag – édition avec les compléments d'électronique
3. Polycopié d'électronique de J. Neuveu
4. [22] Dunod Tout en un Physique PSI/PSI\* Nouveau programme
5. [46] Electronique expérimentale, Krob, ellipses

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

---

Un système en boucle ouverte aussi simple soit-il n'est pas du tout satisfaisant pour une utilisation au quotidien. Pour atteindre un point de fonctionnement donné et y rester, il faut intégrer une rétroaction, on dit alors qu'on travaille en boucle fermée. Deux cas se présentent alors : soit le système est stable, le point de fonctionnement est atteint et maintenu (c'est le cas usuellement recherché dans la vie de tous les jours) ; soit le système est instable, la réponse est alternativement supérieure et inférieure à la consigne : des oscillations apparaissent. Si c'est généralement un défaut, on peut aussi le concevoir comme un but à atteindre pour certains systèmes.

---

**Introduction :** l'idée de base de la rétroaction est de réinjecter tout ou une partie du signal de sortie vers l'entrée d'un opérateur. La notion de rétroaction est très générale et s'applique dans de nombreux domaines. Elle intervient par exemple en physique dans la régulation de la vitesse d'un moteur, dans celle de la température d'une pièce, dans la direction assistée d'une voiture, etc. En biologie, on la rencontre dans la régulation de la température du corps par la sueur par exemple. On verra dans cette leçon comment décrire un système bouclé, quels phénomènes s'y produisent et comment les contrôler.

## 1 Systèmes asservis, rétroaction

### 1.1 Nécessité des systèmes bouclés

[1] p. 890, Ex de la commande de la vitesse d'un moteur à courant continu : schéma fonctionnel. PWP Si l'on veut obtenir une vitesse de rotation  $\Omega$  donnée, il faut imposer une tension d'entrée  $e$  qui dépend des caractéristiques du moteur. S'il apparaît une perturbation extérieure au niveau de l'arbre de sortie du moteur (frottements) : la vitesse de rotation change et l'entrée n'est pas informée. La tension de commande n'est pas modifiée et la vitesse de rotation  $\Omega$  n'a plus la valeur souhaitée. (Ou exemple de la Perceuse [3] p.74)

Le moteur ne remplit plus le rôle souhaité. Un tel système est en boucle ouverte. Pour avoir la vitesse de rotation voulue, il faut informer l'entrée de l'état de la sortie : liaison entre la sortie et l'entrée -> boucle de rétroaction -> système asservi -> système bouclé. Schéma fonctionnel général d'un système bouclé. PWP ou au tableau Chaîne directe de fonction de transfert  $A$  contenant un actionneur (système de commande muni de correcteurs) Chaîne de retour de fonction de transfert  $\beta$  qui contient un capteur Un comparateur (souvent soustracteur) qui fournit le signal de commande de la chaîne directe en comparant le signal d'entrée au signal de retour.

## 1.2 Comportement d'un système bouclé

Poly de JN, p. 73 - Définition de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{FTBF} = s/e = A/(1 + A\beta)$  et de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{FTBO} = A\beta = r/e$  avec les schémas.

[7] p. 256 et Poly de JN, p. 69/70 - Cas où  $A$  est régi par une équation différentielle du 1er ordre. (Voir la définition de la fonction de transfert par rapport à l'équation différentielle du système dans le poly de JN). Il faut théoriquement résoudre l'équation trouvée pour chaque type de fonction d'entrée.

[22] p. 42 et Poly de JN, p. 74 - Ex de l'ALI non inverseur. Le montage amplificateur non inverseur est conçu afin d'amplifier la tension d'entrée. L'ALI est rétroactionné sur sa borne inverseuse. PWP schéma du système :

- $A$  est la fonction de transfert de l'ALI, pour un système du premier ordre :  $A = \mu_0/(1 + j\omega\tau)$ .
- $\beta$  est la fonction de transfert de la boucle de rétroaction  $\beta = 1/G = R_1/(R_1 + R_2)$

Poly de JN, p. 75 - Calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée. (Si on a du temps, rajouter le diagramme de bode et la fonction amplificatrice du système -> un système électronique ne réalise la fonction pour laquelle il a été conçu que dans une zone limitée de fréquence)

Poly de JN, p. 70 - Conservation du produit gain-bande, quel que soit le choix du facteur d'amplification  $\beta$ . Plus le gain du montage augmente, plus sa bande passante diminue : le système est plus lent. Cette propriété est générique aux systèmes bouclés du premier ordre, avec une boucle de rétroaction négative de gain  $G = 1/\beta$ . Effet de la rétroaction sur la bande passante et la fréquence de coupure. PWP

## 1.3 Stabilité

[7], p.257 - On reste dans les mêmes conditions (système 1er ordre). Le système est dit stable si le signal de sortie  $s(t)$  reste fini pour un signal d'entrée fini. Pour obtenir un critère de stabilité : réponse du système à un échelon de tension. PWP. Intégration de l'équation différentielle pour arriver au critère :  $1 + \beta\mu_0 > 0$ .

[7], p. 260 - Forme générale de la réponse, critère de stabilité. On peut peut-être faire directement la forme générale?

[69], p. 900 et Poly de JN, p. 87 - Comparer la stabilité de l'ALI non inverseur avec celle de l'ALI comparateur à hystérésis : montage instable, pas un système linéaire. La rétroaction positive est déstabilisatrice. Généralisation : les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée ont leur partie réelle négative.

---

**Transition :** Si la condition de stabilité n'est pas respectée dans le système bouclé, des oscillations peuvent apparaître : comment les rendre utiles? Comment les maintenir?

---

## 2 Oscillateurs

Les oscillateurs se rencontrent dans tous les domaines de la physique, notamment en optique ou en électronique. Ils sont utilisés pour cadencer le fonctionnement des systèmes.

### 2.1 Le dispositif d'oscillateur à pont de Wien

Poly de JN, p. 98 et [22], p. 83 - Représentation = ALI non inverseur (amplification en tension) et filtre passe-bande. PWP, dessiner le schéma bloc au tableau. Trouver les formules pour  $\beta$  et  $A$ , on considère ici l'ALI idéal, donc  $A = \mu_0 = 1/G$ . Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.

Expérience : Oscillateur à pont de Wien, présenter les composants.

### 2.2 Condition d'oscillation

[7], p. 265 - Condition générale d'auto-oscillation (ce n'est pas la même condition que la stabilité : ici on a un ALI idéal et un filtre d'ordre 2).  $1 + \mu\beta = 0$ . Le rapport  $s/e$  devient infini : un signal de sortie peut apparaître pour un signal d'entrée nul. En général, cette condition est satisfaite pour une pulsation  $\omega_0$  : oscillations spontanées du système à la pulsation  $\omega_0$ . C'est la condition de Barkhausen. Poly de JN, p. 98 : on obtient une condition sur les composants du système d'amplification. Un oscillateur quasi-sinusoïdal, constitué d'un passe bande bouclé avec un amplificateur, oscille à la pulsation caractéristique du passe bande, lorsque la condition d'oscillation est assurée.

Expérience : modifier  $R_1$  et  $R_2$  et observer l'effet sur les oscillations : retrouver la condition d'oscillation. Voir le TP Systèmes bouclés.



### 2.3 Caractérisation des oscillations

[22], p. 85 - Naissance des oscillations : le montage bouclé doit être instable. Amplitude des oscillations et pureté spectrale – saturation de l'AO. Enlever cette partie si on n'a pas de temps, faire les observations sur la manip.

**Conclusion :** Récap sur la leçon + on s'est intéressé ici à la stabilité des systèmes bouclés permettant de discuter des oscillateurs, mais il existe aussi d'autres propriétés, caractéristiques des systèmes asservis qu'il faut prendre en compte : la rapidité, la précision. Pour obtenir une bonne boucle de rétroaction, on utilise des éléments correcteurs. Il existe aussi d'autres types d'oscillateur : à relaxation (cf. JN, p. 101).

**BONUS :**

1. Deux façons de faire la leçon : Comme ici en PSI (s'appuyer bcp sur les ALI (voir le programme)) ou en L3 avec l'exemple de la rétroaction sur le MCC dans le formalisme de Laplace + utilité des éléments correcteurs.
2. Même si je n'en parle pas ici, il faut comprendre les critères d'oscillations dans le diagramme de Nyquist (voir le poly de Jeremy Neveu)
3. Rajouter des transitions!!



# LP n° 23 : Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Etude spectrale.

## NIVEAU :

CPGE - a priori MPSI/MP

## PRÉREQUIS :

- Lois de l'électrocinétique
- Écriture complexe des signaux sinusoïdaux
- Réponses des filtres usuels des premier et second ordres à une excitation sinusoïdale de fréquence  $f$

## PLAN :

1. Réponse d'un filtre à une excitation périodique quelconque
2. Exemple de filtrages analogiques
3. Contraintes et avantages du filtrage numérique

## BIBLIOGRAPHIE :

- [64] Dunod MP, nouveau programme
- [28] F. Cottet, pour quasiment toute la leçon...
- [75] Nouveau précis bréal, PSI/PT

## IDÉES À FAIRE PASSER :

Je pense que l'idée de cette leçon est de supposer connu les notions de traitement des signaux sinusoïdaux, notamment les réponses des filtres classiques du premier et du second ordre à ces entrées. On peut alors s'intéresser au traitement d'un signal quelconque (vraiment quelconque ou on garde quand même l'hypothèse périodique?), qui nécessite de se ramener sur une base de cosinus et sinus, donc la décomposition en série de Fourier et l'analyse spectrale. Après réflexion je pense aussi qu'il ne faut pas restreindre cette leçon au filtrage, ce serait ignoré une partie importante de la notion de traitement du signal.

**Introduction :** Définir le signal, la notion de traitement et l'aspect analogique ou numérique à partir des premières pages de [14].

## 1 Réponse d'un filtre à une excitation périodique quelconque

### 1.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier

Pour cette partie, voir [64], p. 111 et suivantes - Affirmer le caractère base de la suite de fonction  $(\cos(2\pi nfx + \varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  pour les fonctions périodiques de fréquence  $f$ . Insister sur le caractère infini de la suite (donc de la décomposition). Écrire une forme générale de fonction sur cette base avec les coefficients et définir la décomposition en série de Fourier, la composante continue, le fondamental et les harmoniques.

**Expérience :** Montrer numériquement l'approximation d'un créneau et d'un triangle par le développement en série de Fourier. Montrer que les hautes fréquences permettent d'approximer les variations rapides de la fonction. Remarquer expérimentalement le phénomène de Gibbs. Selon le temps on peut montrer que le bruit blanc est impossible à approximer! Le programme à utiliser est `Decomposition_spectrale`. Un autre programme, permet de mettre en parallèle l'approximation du créneau et du triangle.

### 1.2 Spectre d'un signal périodique

On s'intéresse généralement au spectre en amplitude : on trace la valeur de chaque coefficient  $A_n$  en fonction de la fréquence  $f_n$  de l'harmonique. Présenter d'abord le spectre d'un sinus pur, d'une puissance de sinus (à linéariser) et enfin côte à côte les spectres du créneau et du triangle. Faire le lien entre la décroissance du spectre et la qualité de l'approximation.

Remarque sur la modulation : on peut traiter ici le cas du spectre du signal  $E_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\Omega t)$  selon que  $\Omega$  et  $\omega_0$  sont très proches ou au contraire éloignés.

Remarque sur l'éventuelle rencontre avec des pulsations négatives : On peut ramener les coefficient du DSF  $A_n$  et  $\varphi_n$  à un unique coefficient  $c_n$  à condition d'accepter qu'il soit complexe. Il y a alors dédoublement du spectre et cela fait apparaître des pulsations négatives mais ce ne sont que des artefact du calcul! ELLES N'ONT AUCUNE RÉALITÉ PHYSIQUE!

### 1.3 Action d'un filtre sur un signal périodique

[64], p. 120 et suivantes - Prendre en prérequis les filtres niveau MPSI. Comme on a un système linéaire : on peut appliquer sur chaque terme de la somme la fonction de transfert. L'effet du filtre est de multiplier l'amplitude par  $G(\omega)$  et de déphaser le signal de  $\Phi(\omega)$ .

---

**Transition :** On a vu comment décrire un signal : on peut le décomposer en série de Fourier, permettant d'obtenir des informations sur celui-ci. Mais le but c'est de le réceptionner et de le transmettre, comment faire?

---

## 2 Chaîne de traitement du signal

### 2.1 Étape de transmission

On prend [28], chapitre 3 (p. 43) - La transmission est étudiée en comparant la sortie à l'entrée, par exemple avec le gain en puissance (la puissance est un des enjeux principaux!). Il faut regarder les propriétés de transmission par exemple en fonction de la fréquence (diagramme de Bode). Parler des systèmes linéaire (illustrer expérimentalement?) et stationnaire. Aboutir au filtrage.

### 2.2 Filtrage

Je pense pas que ce soit utile de revenir sur les filtre de base. On peut proposer une application ciblée du filtrage, par exemple sur le bruit?

Expérience : Généré analogiquement un signal bruité (par exemple du 50 Hz additioné au signal à transmettre, et s'en débarrasser par filtrage... passe bas ou passe haut, voire passe bande?

### 2.3 Modulation et démodulation

On prend [28], chapitre 5 (p. 79) - Nécessité ou non d'une modulation et avantage de la modulation (voir [28], p. 80). Différents modes de modulation. On choisit de parler de la modulation en amplitude (c'est raisonnable vu le temps à consacrer...) On traite le cas le plus simple de la porteuse conservée, évoquer les principes de démodulation et regarder l'influence sur le spectre.

---

**Transition :**

---

## 3 Contraintes et avantages du filtrage numérique

[64], p. 159 - On utilise de plus en plus, à la place de l'électronique analogique, l'électronique numérique. Au lieu de traiter des signaux électriques en fonction du temps, on manipule des signaux numérisés, listes de nombres provenant de l'échantillonnage des signaux analogiques.

### 3.1 Conversion vers le numérique, contrainte sur l'échantillonnage

Présenter le principe de la conversion analogique-numérique [28], p. 141 : on relève la valeur du signal analogique à une certaine fréquence  $f_e = 1/T_e$  dite fréquence d'échantillonnage et sur une durée  $\tau = NT_e$ . Comment cela modifie-t-il le spectre? Voir [28], p. 135 : En fait on est entrain de multiplier le signal temporel par un peigne de dirac donc on périodise le spectre dans l'espace des fréquence avec une période  $f_e$  (PÉRIODE DANS L'ESPACE DES FRÉQUENCES = FRÉQUENCE DANS L'ESPACE TEMPOREL!). On voit donc apparaître naturellement le théorème de Shannon, et le repliement de spectre s'il n'est pas respecté.

Expérience : On peut mettre en évidence le critère de Shannon en calculant le spectre à l'oscilloscope et augmentant progressivement la fréquence du sinus : on voit le repliement de spectre en arrivant à  $f_e/2$ . Penser à utiliser le module pour projeter l'oscilloscope sur l'écran.

**Remarque :** On a supposé que le signal étudié est à spectre borné. Ça peut être le cas naturellement (cas de la voix notamment) ou résulter d'un filtrage préalable.

### 3.2 Transformée de Fourier discrète

Faire un bref rappel sur les transformées de Fourier adaptées aux différents types de signaux (cf. [28], p. 165) - Dans notre cas c'est nécessairement la transformée de Fourier discrète qui convient puisque le signal est intrinsèquement discrétisé par l'échantillonnage. Pour la suite tout est sur le graphe de la page 167 : la fréquence la plus grande qu'on peut voir apparaître est forcément la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ , et la plus basse est limitée par la fenêtre, c'est  $\Delta f = f_e/N$

**Expérience :** Calculer la transformée de Fourier d'un sinus parfait mais de longueur finie en porte simple. Constaté l'effet du fenêtrage temporel.

Distinguer les différents raffinements de fenêtrage expérimentalement et faire un petit bilan au tableau.

### 3.3 Simplicité du traitement numérique

Reprendre le problème du bruit précédent et le traiter numériquement.

---

**Conclusion :** On peut ouvrir sur le filtrage spatial en optique (image = signal 2D).

**BONUS :**

---

1. Non linéaires & bruit?
2. Il est crucial de gérer correctement le temps pendant cette leçon, parce que la toute dernière sous partie consistant à réaliser un traitement numérique de signal ne peut pas être mise de côté.
3. L'ordinateur utilise l'algorithme de FFT pour faire le calcul. Il est discuté dans le Cottet, chapitre 8.
4. Mettre le théorème de Plancherel en prérequis?
5. Pour éviter le repliement on peut utiliser un filtre anti-repliement ([2] p.140)
6. Transformée de Fourier non exigible en prépa, on doit la redéfinir et définir le DSF et la FFT et FTD



# LP n° 24 : Ondes progressives, ondes stationnaires.

**NIVEAU :** CPGE

Les généralités sur les ondes sont au programme de toutes les 2eme année. Le développement sur la corde de Melde est plutôt au programme de PC.

**PRÉREQUIS :**

- Mécanique de première année
- Équations différentielles / aux dérivées partielles
- Connaissances communes sur les phénomènes ondulatoires (longueur d'onde, période, fréquence, pulsation, célérité...)

**PLAN :**

1. Propagation des ondes
2. Solutions progressives de l'équation de d'Alembert

3. Une autre base de solution, les ondes stationnaires

**BIBLIOGRAPHIE :**

- Cours d'Étienne Thibierge sur les ondes
- [39] C. Garing, *Ondes mécaniques et diffusion*.
- [37] C. Garing, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*.
- [71] Dunod, Physique PC/PC\* nouveau programme (1ere édition, 2014).
- [17] Hprépa, Ondes 2e année.

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

Les ondes apparaissent en physique dans des domaines variés, rendant compliquée leur définition rigoureuse. Pour autant, chacun en a déjà une idée assez précise, et nous allons ici développer les points communs entre les différents phénomènes ondulatoires.

**Introduction :** Cette leçon entame le chapitre sur les ondes : nous allons définir les grandeurs associées à leur propagation sur l'exemple classique et abordable de la propagation d'une déformation sur une corde. Cette situation nous permettra de voir apparaître deux régimes de propagation différents : les ondes progressives et les ondes stationnaires.

## 1 Propagation des ondes

### 1.1 Définitions et exemples de phénomènes ondulatoires

La définition d'une onde est nécessairement rendue vague par la diversité des phénomènes concernés. Elle est donnée sur [slide](#) et je suggère de mettre les points importants (en gras) au tableau : une onde correspond à une modification des propriétés physiques d'un milieu **matériel ou immatériel** engendrée par une action locale qui se répercute/se propage d'un point à un autre du milieu avec une **vitesse finie** déterminée par les caractéristiques du milieu. Au passage de l'onde, chaque point du milieu reproduit, avec un **décalage temporel et une éventuelle atténuation**, la perturbation originelle engendrée par une source fournissant de l'énergie au milieu. La propagation résulte généralement du **couplage entre deux champs** appelés grandeurs couplées.

Donner des exemples et distinguer les ondes matérielles (avec déplacement de matière) des ondes électromagnétiques (sans déplacement de matière) : ondes sur une corde, ondes à la surface de l'eau, ondes sonores, ondes électriques dans un câble, ondes lumineuses etc... Pour quelques unes on peut faire des schémas et préciser le champ qui est variable au cours du temps et de l'espace. Distinguer aussi les différentes dimensions de propagation et les caractères transverse ou longitudinal de chacune (à définir - cf. Thibierge, p. 11)

### 1.2 Équations de propagation

[39], p. 11 - On illustre sur la corde de Melde (c'est à peu près le seul truc qu'on peut faire en restant cohérent avec des prérequis minimalistes). Établir très rapidement le modèle en s'appuyant sur la [slide](#) associée et faire calmement le calcul pour aboutir à d'Alembert.

Donner d'autres exemples usuels : EM dans un métal, dans un plasma, dans un câble coaxial pour bien montrer que d'Alembert n'est pas la seule équation de propagation des ondes.

- Onde électromagnétique dans le vide (d'Alembert) :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

- Onde dans un métal ohmique (équation de l'effet de peau) :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

- Onde dans un plasma :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n e^2}{m} \vec{E}$$

- Onde de courant dans un câble coaxial sans résistance (d'Alembert) cf. [37], p. 39 :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

- Onde de courant dans un câble coaxial avec dissipation (équation des télégraphistes) cf. [37], p. 45 :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial i}{\partial t} + \mu i$$

### 1.3 Particularités de l'équation de d'Alembert

C'est l'équation de propagation la plus simple (pas de dissipation). C'est une équation vectorielle et tridimensionnelle en général. Elle est linéaire (c'est déjà ça...) et réversible (inchangée par  $t \rightarrow -t$ ). Pour lever ces difficultés 1) on la projette sur des axes pour la ramener à une dimension, mais les projections ne sont pas nécessairement découplées et 2) on commence par se restreindre aux ondes à une seule variable d'espace, soit parce qu'elles le sont vraiment (corde) soit parce qu'on étudie des ondes planes : à définir, et opposer aux ondes sphériques (cf. Thibierge, p. 12-13). C'est probablement aussi l'occasion de définir les surfaces d'onde (Thibierge, p. 11).

---

**Transition :** Quelles solutions de cette équation permettent de rendre compte de l'observation commune de la propagation d'une onde dans l'espace au cours du temps?

---

## 2 Solutions progressives de l'équation de d'Alembert

### 2.1 Solutions générales de l'équation de d'Alembert

Poser comme résultat fondamental (non démontré ici, voir [17], p. 34) : Toute solution de l'équation de d'Alembert scalaire unidimensionnelle (ici d'axe  $O_z$ ) s'écrit sous la forme

$$a(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$$

Dans le cas d'un axe quelconque orienté par  $\vec{u}$  cela donne

$$a(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

On ne peut pas démontrer ce résultat pendant la leçon, par contre ça peut être pas mal de montrer que ces fonctions sont bien solutions de l'équation en les réinjectant.

[71], p. 848 - Interpréter graphiquement (cf. [slide](#)) chacun des deux termes comme une perturbation progressive dans le sens des  $z$  croissants ou décroissants, on parle d'onde plane progressive. Insister sur le fait que la solution générale, somme des deux termes, n'est plus une OPP a priori. La recherche des ces fonctions est compliquée, un moyen de simplifier la résolution est de décomposer en séries de Fourier.



## 2.2 L'outil onde plane progressive harmonique

Idée : on décompose en séries de Fourier - toute solution est superposition d'onde plane (c'est permis pas la linéarité de l'équation!!!). Donc on va chercher des solutions sous la forme

$$a(\vec{r}, t) = a_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right) + \varphi\right)$$

A ce stade on pourrait insister (mais à mon avis y a pas le temps du tout) sur les différentes grandeurs associées à l'onde (même si elles sont en prérequis) : pulsation  $\omega$ , vecteur d'onde  $\vec{k}$  de direction  $\vec{u}$  (direction de propagation de l'onde) et de module  $k = \omega/c$  dans le vide,  $\varphi$  phase à l'origine, période  $T = 2\pi/\omega$ , fréquence, longueur d'onde. On peut aussi repasser sur les unités. Éventuellement on peut faire deux schémas en représentations spatiale et temporelle pour expliquer chacune d'entre elles.

La question qui se pose alors est de déterminer les caractéristiques propagatives de chaque OPPH. Pour ça il faut établir le lien entre  $k$  et  $\omega$ , appelé relation de dispersion. La déterminer pour d'Alembert; définir et déterminer la vitesse de phase (Thibierge, p. 17). Montrer que dans le cas de d'Alembert elle ne dépend pas de  $\omega$  (le milieu est dit non dispersif).

Expérience : Dans cette partie, on peut faire l'expérience de la cuve à onde pour remonter à l'équation de dispersion des ondes à la surface de l'eau

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3}$$

Cela permet à la fois de montrer qu'on a pas forcément besoin de lourds développements théoriques pour accéder à cette relation et d'autre part qu'il existe des milieux dispersifs.

## 2.3 Impédance et énergie

Regarder comment se comporte l'énergie contenue dans la vibration sous forme mécanique. On peut admettre les expressions des énergies cinétique et potentielle élémentaire et prouver (cf. BUP n°649 sur les ondes) que l'énergie se propage avec l'onde.

Pour l'impédance, voir [17], p. 61 (sortir les équations de couplages) puis p. 67 pour l'impédance caractéristique de la corde. Pour les généralités sur l'impédance, voir Thibierge, p. 14.

Remarque : Autant la discussion sur l'énergie est primordiale (on y revient pendant l'étude des ondes stationnaires) autant je trouve que la discussion sur l'impédance, même si elle plébiscitée par le jury, tombe un peu comme un cheveu sur la soupe... On peut la virer pour gagner du temps et y revenir en conclusion / questions.

---

**Transition :** On a mené l'étude générale de l'équation de d'Alembert mais les solutions mises ici en évidence n'ont en fait pas de réalité physique (voir LP26). Pour pallier ce problème il faudra les sommer pour former des paquet d'onde dont la propagation est plus complexe (Vitesse de groupe, déformation, ...). Un autre moyen de palier ce problème est d'étudier des ondes stationnaires.

---

## 3 Une autre famille de solutions, les ondes stationnaires

### 3.1 Modes de vibration d'un système fermé

[37], p. 15 - Imposer les conditions limites fixes des deux côtés à la corde Melde et partir des solutions générales précédentes pour trouver les modes propres de vibration. On voit apparaître une onde qui fait du surplace, dite stationnaire. - On peut aussi justifier cette partie simplement en cherchant des ondes découplées et la suivante

### 3.2 Définition et structure

Définition d'une onde stationnaire en produit de fonctions découplées de l'espace et du temps, structure en nœuds et ventres. Chercher les solutions stationnaires pour une autre configuration, celle de l'expérience : corde attachée à un bout et excitée sinusoïdalement à l'autre, voir [71], p. 860 ou Thibierge, p. 27.

Expérience : Montrer les fréquences de résonance de la corde de Melde, interpréter en ondes stationnaires. Mettre en évidence les nœuds et les ventres de vibration.

Faire le lien avec la partie précédente : on avait affirmé que les ondes progressives constituent une base des solutions. Les ondes stationnaires doivent donc pouvoir s'exprimer en somme d'ondes progressives. Le faire et interpréter l'onde stationnaire comme superposition d'une onde progressive et de son image réfléchie à une extrémité. D'ailleurs, c'est réciproque : les ondes progressives peuvent aussi s'écrire comme somme d'ondes stationnaires.

### 3.3 Aspect énergétique

Calculer séparément l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la corde en  $x$  (voir Thibierge, p. 25). Calculer leur valeur moyenne temporelle pour montrer comment se répartit l'énergie de long de la corde. Elle ne se propage pas au cours du temps mais reste coincée entre deux nœuds.

---

**Conclusion :** Conclure sur les deux bases de solutions que l'on a trouvées et garder à l'esprit que ce sont bien deux bases de solutions : une solution générale peut s'écrire indifféremment dans l'une ou l'autre. La question qui se pose alors est : si j'ai un problème, comment je choisis la base dans laquelle je veux exprimer les solutions. Ça dépend bien sûr de ce à quoi on s'intéresse, si on cherche des modes de résonance on cherche immédiatement des solutions stationnaires, sinon on cherche les solutions progressives et on applique les conditions limites / conditions de réflexion-réfraction aux interfaces et on voit éventuellement apparaître des motifs de nœuds et ventres. Ouvrir sur le paquet d'onde et la dispersion.

**BONUS :**

---

- Vu le rapport de jury, ce qui est attendu ici n'est pas une leçon incroyablement originale, mais que le sujet des ondes soit traité avec rigueur, notamment sur les hypothèses faites, sur la présentation des calculs et bien sûr sur toutes les définitions.
- Je suis conscient que cette leçon est très longue et appelle des choix. **En aucun cas faut-il sacrifier la partie sur les ondes stationnaires!** Ondes progressives et ondes stationnaires doivent être équitablement représentées.
- On a appuyé cette leçon sur un unique exemple, la corde de Melde. Peut-être qu'on peut essayer, selon le temps, de faire intervenir d'autres exemples de phénomènes ondulatoires. Sans perdre de vue qu'on est au début du chapitre sur les ondes donc l'étude de l'acoustique, des ondes dans les solides, des ondes électromagnétiques etc... n'a pas encore été menée. Encore moins les ondes de surface qui sont hors programme de prépa.
- Je ne l'avais pas sous les yeux au moment où j'ai écrit la leçon mais le Hprépa, Ondes 2ème année [17] semble être une source fiable d'information (notamment pour les calculs).

## LP n° 25 : Ondes acoustiques.

### NIVEAU : CPGE

Au programme de PC les ondes acoustiques apparaissent dans trois paragraphes : ondes acoustiques dans les fluides (impédance), ondes acoustiques dans les solides (approximation des milieux continus) et interface entre deux milieux. Ça donne une idée de ce qu'on peut traiter dans la leçon.

### PRÉREQUIS :

- Écoulement parfait d'un fluide
- Transformations en thermodynamique, gaz parfait
- Électromagnétisme dans le vide
- Diffusion thermique

### PLAN :

1. Équation de propagation d'une onde de pression
2. Solutions en ondes planes

3. Production, transmission et détection d'une onde sonore.

### BIBLIOGRAPHIE :

- [23] *Ondes acoustiques*, A. Chaigne - Pour les sources.
- [39] *Ondes mécaniques et diffusion*, C. Garing.
- [71] Tout-en-un PC/PC\* nouveau programme (1ere édition, 2014).
- [53] Tec & Doc PC/PC\*, H. Gié.

### IDÉES À FAIRE PASSER :

Les ondes acoustiques sont **des ondes** dont la propagation ne peut avoir lieu sans le support d'un **milieu matériel**. L'autre différence avec l'électromagnétisme est l'aspect longitudinal. Pour le reste tout est très analogue!

**Introduction :** Les ondes acoustiques ont la même importance que l'optique dans l'histoire de la physique : elles font partie de ces domaines que les savants ont étudiés pour expliquer les sens humains. En fait d'abord pour l'aspect musical (Antiquité, moyen-âge), puis avec le développement de la mécanique sous l'aspect ondulatoire (propagation au début du XVII, mesure de sa vitesse dans l'air par Arago et de Prony en 1822). C'est cet objectif que l'on va se fixer pour cette leçon : comprendre ce que sont physiquement les ondes acoustiques, et s'attacher à expliquer comment le son se propage et comment on peut le détecter. Différencier ondes acoustique et sonore (onde acoustique dans le domaine audible 20 Hz - 20 kHz).

## 1 Équation de propagation d'une onde de pression

C'est LA partie importante de la leçon ; la mise en équation eulérienne est officiellement au programme.

### 1.1 Hypothèse acoustique

Présenter sur [slide](#) la vidéo modélisant la propagation des ondes sonores - insister sur le fait que les particules de fluide ne restent pas sagement à leur place en réseau comme c'est le cas sur la vidéo, mais peu importe. Ce qui nous intéresse ici c'est de voir pour la première fois l'onde acoustique comme l'oscillation de particules autour de leur position d'équilibre de sorte qu'elle est assimilable au déplacement d'une perturbation des champs de pression, vitesse et masse volumique du fluide. Donner les ordres de grandeur des surpressions typiques au seuil d'audibilité et douleur, cf. [71], p. 909 : on va supposer la perturbation négligeable devant les caractéristiques du fluide au repos et linéariser les équations!

Écriture en terme de repos + perturbation, voir [71], p. 890 ou [53], p. 681 - Préciser l'hypothèse de perturbations à l'ordre 1 (souligner que la perturbation en vitesse ne peut pas être négligée devant l'état de repos puisque  $v_0 = 0$  mais on y reviendra). Pour la suite du raisonnement on ajoute trois hypothèses :

- On va négliger l'atténuation, ce qui est valable dès que la propagation a lieu sur une distance grande devant la longueur d'onde;
- On va considérer l'écoulement parfait;
- On va supposer le fluide barotrope, c'est-à-dire que ses propriétés ne dépendent pas de la profondeur, ou en d'autres termes que l'on néglige l'effet de la pesanteur. Cette hypothèse est une très bonne approximation dans l'air (masse volumique faible) et tout aussi valable dans les liquides tant qu'on reste dans une zone d'épaisseur raisonnable.

Remarque : Les notations usuelles inviteraient à noter  $\rho$  la masse volumique, mais on préférera l'appeler  $\mu$  dans cette leçon pour éviter tout risque de confusion entre pression et masse volumique.

Sous ces hypothèses on peut déterminer l'équation de propagation de l'onde.

## 1.2 Équation de d'Alembert

L'équation provient de la linéarisation de trois relations (voir [71], p. 893 ou [53], p. 682) : l'équation d'Euler (sans forces volumiques) qui caractérise l'écoulement du fluide, la conservation locale de la masse qui contraint l'évolution réciproque de la masse volumique et de la vitesse, et l'aspect thermodynamique (DL de la fonction implicite  $\mu = \mu(P)$  pour introduire la compressibilité) qui permet de ramener le couple  $(\mu, P)$  à une unique variable, l'une étant exprimée en fonction de l'autre.

De la même manière que l'équation de d'Alembert pour la propagation des ondes électromagnétique vient du couplage des équations de Maxwell pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  on obtient l'équation de propagation des ondes acoustiques en combinant les contraintes précédemment établies. Comme d'habitude l'équation de d'Alembert fait apparaître une célérité, la célérité des ondes acoustiques (c'est devant elle que doit être négligeable  $v_1(M, t)$ !). Pour l'instant elle est exprimée sous forme implicite, on va l'expliciter dans prochaine partie.

## 1.3 Célérité des ondes acoustiques

Déterminer  $c$  revient à déterminer  $\chi_0$  qui va bien sûr dépendre de la nature du fluide. Évolution adiabatique (comparaison des temps de propagation et de diffusion thermique, **attention à bien comprendre cette partie pour bien l'exprimer... C'est casse-gueule!**) et réversible (fluide parfait) de la particule fluide [71], p. 897 pour assimiler  $\chi_0$  au coefficient de compressibilité isentropique du fluide au repos. Expression sans démonstration (renvoyer au cours de thermodynamique, il faut appliquer les lois de Laplace en supposant l'air parfait d'où on déduit  $P/\mu^\gamma = cste$ ) de la célérité dans l'air. Présenter les valeurs de  $c$  dans différents milieux sur [slide](#) en insistant bien sur ce qui change entre chaque milieu. Voir remarque de [71], p. 898 pour valider a posteriori l'hypothèse acoustique (notamment l'hypothèse d'adiabaticité).

**ATTENTION!** Il y a une erreur dans l'édition du Dunod que j'ai utilisée il faut lire  $d\mu/dP$  au lieu de  $dP/d\mu$  après l'équation (26.12), page 898.

---

**Transition** : Ces ondes vérifient une équation de d'Alembert, est-ce qu'on peut en tirer les mêmes conclusions que pour l'onde électromagnétique? Structure? Énergie? Impédance? Ces informations ne sont pas directement contenues dans l'équation de propagation : elles dépendent de la forme supposée des solutions.

---

## 2 Grandeurs attachées aux ondes planes

### 2.1 Structures des ondes acoustiques

Prendre [53], p. 687 - Ecrire d'Alembert en complexe (ok par Fourier), montrer que la propagation n'est pas dispersive (c'est toujours le cas avec d'Alembert, mais c'est une bonne nouvelle quand même, c'est pratique pour communiquer!) et surtout que les ondes acoustiques sont des ondes longitudinales contrairement aux ondes EM.

Remarque : Les ondes EM longitudinales peuvent exister, par exemple dans les plasma à  $\omega = \omega_p$  mais ce sont en fait des ondes acoustiques qui font entrer le milieu en résonance!

Faire apparaître le système d'équations couplée [Euler + conservation de la masse] (cf. [71], p. 900 - équation (26.13)).

### 2.2 Notion d'impédance

On déduit du système couplé l'équation  $p = \rho_0 c v$  et on peut définir l'impédance  $Z = p/v$  qui quantifie le coupage entre les deux grandeurs comme en électrocinétique. Donner les valeurs de  $Z_{air}$  et  $Z_{eau}$  in [71], p. 902. Insister sur l'importance de l'impédance : elle ne dépend que du milieu et permet de connaître la perturbation en  $\mu$  en fonction de celle en  $\vec{v}$ . Surtout, elle va nous permettre de traduire le comportement des ondes aux interfaces entre différents milieux. Ce qui nous intéressera alors ne sera pas la perturbation en soit mais l'énergie transportée par l'onde acoustique.

### 2.3 Aspect énergétique

Voir [53], p. 689. Expliquer :

- Au programme toutes les densités volumiques d'énergie sont admises mais on démontrera celle de l'énergie cinétique et admettra effectivement celle de l'énergie potentielle
- Puissance de l'onde sur une surface matérielle : flux du vecteur  $\Pi$ , vecteur de Pyntig acoustique.
- Équation de conservation entre les deux.

La grandeur importante de cette partie doit être l'introduction de l'intensité acoustique (en décible) qui a l'intérêt de dilater l'échelle : on prend pour intensité du seuil audible  $I_s = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ , et on donne l'intensité de peine  $I_p = 1 \text{ W.m}^{-2} = 120 \text{ dB}$ .

Insister sur le résultat pour l'onde plane :  $I = \langle p v \rangle = p_0^2 / 2Z$ .

**Transition :** Si on revient à la question initiale (expliquer l'audition humaine) il va nous falloir résoudre autrement qu'en onde plane et comprendre si la cochlée, milieu rempli d'endolymphe (aqueux) peut recevoir l'onde acoustique se propageant dans l'air.

### 3 Production, transmission et détection d'une onde sonore.

#### 3.1 Émission d'une onde sonore par une sphère pulsante

[23], p. 112, [39], p. 74 et [71] p. 941 - Présenter une idée de source d'onde acoustique, celle de la sphère pulsante dont le rayon oscille périodiquement autour d'une valeur moyenne  $a$ . Sur cette partie on essaie de donner rapidement l'idée du modèle, pour aboutir qualitativement à la forme de l'onde acoustique émise. L'important est de commenter du point de vue énergétique la décroissance de l'amplitude en  $1/r$ , et de l'intensité en  $1/r^2$ . Pour se donner une idée d'ordre de grandeur, l'amplitude de l'oscillation de la membrane de l'oreille correspondant au seuil d'audition est de  $7 \text{ pm}$ , celle correspondant au seuil de peine est de  $7 \text{ }\mu\text{m}$ . On peut refaire l'AN avec le modèle de la sphère pulsante, par exemple à  $1 \text{ kHz}$ . On suit le dunod, on trouve l'intensité en fonction de  $A_0$  et de la distance à la source. Grâce aux conditions sur la vitesse, on trouve que  $A_0$  varie en  $a\omega^2 r_0^2$ , avec  $\omega$ , la pulsation de l'onde émise,  $r_0$ , le rayon de la sphère pulsante,  $a$  l'amplitude de vibration de la membrane de la sphère. On trouve l'intensité sonore en décibel en fonction de ces grandeurs :  $I = 10 \log \left( \frac{a^2 \omega^4 r_0^4}{2cr^2 I_0} \right)$ . Pour une distance  $r$  fixée, un niveau sonore fixé, on peut changer  $a$  et  $\omega$  et pour une haute fréquence,  $a$  va devoir être grand. Pour les basses fréquences,  $a$  va bcp varier, mais on peut alors changer le rayon de la sphère pulsante  $r_0$  pour obtenir une variation d'amplitude  $a$  plus faible : lien avec les deux tailles de haut-parleur présents sur les chaînes Hi-Fi! (on peut faire un graphe en  $1/\omega^2$  pour expliquer).

C'est un des rares paragraphes du programme où l'on discute d'une onde sphérique. Présenter une idée de source d'onde acoustique, celle de la sphère pulsante dont le rayon oscille périodiquement autour d'une valeur moyenne  $a$  (Voir [23], p. 112, [39], p. 74 et [71], p. 911). Sur cette partie on essaie de donner rapidement l'idée du modèle, pour aboutir qualitativement à la forme de l'onde acoustique émise. L'important est de commenter du point de vue énergétique la décroissance de l'amplitude en  $1/r$ , et de l'intensité en  $1/r^2$ . Pour se donner une idée d'ordre de grandeur, l'amplitude de l'oscillation de la membrane de l'oreille correspondant au seuil d'audition est de  $7 \text{ pm}$ , celle correspondant au seuil de peine est de  $7 \text{ }\mu\text{m}$ . On peut refaire l'AN avec le modèle de la sphère pulsante, par exemple à  $1 \text{ kHz}$ .

#### 3.2 Réflexion, transmission à l'interface entre deux milieux

[39], p. 101, c) - Interface entre deux milieux d'impédance  $Z_a$  et  $Z_e$ . Onde incidente d'intensité  $I_i = p_i^2 / 2Z_1$ , onde réfléchie d'intensité  $I_r = p_r^2 / 2Z_1$  et onde transmise d'intensité  $I_t = p_t^2 / 2Z_2$ . Conditions limites : continuité de la pression à convertir en coeff de réflexion et de transmission en divisant par  $p_i$ , et conservation de l'énergie (sur l'intensité). On combine tout correctement et on obtient  $R$  et surtout  $T = 4Z_a Z_e / (Z_a + Z_e)$ . [39], p. 101, d) - AN pour l'air et l'eau, exposer le problème dans l'oreille (son émis dans l'air et reçu dans l'eau), idéalement calcul de  $I_i^{dB} - I_t^{dB} = -30 \text{ dB}$ .

#### 3.3 Adaptation d'impédance dans l'oreille moyenne.

A exposer très brièvement, c'est surtout l'occasion de parler d'adaptation d'impédance pour favoriser la transmission. Ici, système mécanique pour adapter l'impédance : osselets = système de bras de levier / Surface plus ou moins importante. La force est conservée :

$$F_{\text{Tympan}} \times d_{\text{marteau}} = F_{\text{étrier}} \times d_{\text{enclume}}$$

Sachant que les forces sont exercées par les pressions :

$$F_{\text{Tympan}} = P_{\text{air}} \times S_{\text{Tympan}} \text{ et } F_{\text{étrier}} = P_{\text{eau}} \times S_{\text{étrier}}$$

On trouve avec les distances normalisée sur la **slide** un gain en pression de 27,5 dB donc on compense à peu près le changement de milieu. Ça marche quasiment, c'est cool, mais en fait les quelques décibels qui manquent impliquent un système de détection extrêmement raffiné ensuite.

---

**Conclusion :** Les ondes acoustiques sont bien des ondes : elles sont solutions de l'équation de d'Alembert, mais elles sont assez différentes des ondes électromagnétique que l'on connaissait auparavant : ce sont des ondes longitudinales qui nécessitent un milieu matériel pour se propager. Cela dit par analogie on a tiré de nombreux résultats qui nous ont permis de mieux comprendre comment le son est créé, transmis, et en partie détecté par l'homme.

**BONUS :**

---

- Lire le paragraphe de [39], p. 83 sur les causes d'amortissement du son. C'est notamment l'occasion de discuter l'approximation acoustique et ses limites.

# LP n° 26 : Propagation avec dispersion.

## NIVEAU : LICENCE

Si la dispersion apparaît bien au programme de prépa, celui-ci ne permet ni de discuter de la déformation du paquet d'onde, ni des ondes de surface dans les fluides. Ceci justifie le passage au niveau licence.

### PRÉREQUIS :

- Modélisation du plasma, équation de Klein-Gordon (il peut être utile de relire le début du chapitre 2 du cours de Thibierge à ce sujet)
- Modèle à constantes réparties
- Ondes de surface
- Théorie de Fourier

### PLAN :

1. Propagation d'un paquet d'onde en milieu dispersif
2. Illustrations dans divers domaines de la physique

### BIBLIOGRAPHIE :

- Cours d'Étienne Thibierge sur les ondes
- Voir éventuellement [54] Portelli, *La physique par la pratique*.
- [17] Hprépa, Ondes 2ème année, 2004
- [35] Physique PC/PC\*, Dunod (4ème édition)
- BUP n°649 sur la *Propagation des ondes*
- [37] Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs, C. Garing.
- [22] Physique PSI/PSI\*, Dunod (2014)

### IDÉES À FAIRE PASSER :

**Introduction :** Dans notre étude des ondes on a rencontré des milieux dits dispersifs, pour lesquels la vitesse de phase n'est pas la même pour toutes les OPPH. Par exemple, la propagation dans un câble coaxial mène à l'équation des télégraphistes, cf. E. Thibierge - ici il faut à minima donner l'équation, probablement même la retrouver rapidement - dont la relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - r g$$

En quoi cela est-il un problème? Quelles conséquences pour la propagation réelle dans ce type de milieu?

## 1 Propagation d'un paquet d'onde en milieu dispersif

### 1.1 Caractère non physique de l'OPPH. Notion de paquet d'onde

Voir Thibierge, p. 17 - Moyens d'avoir une onde physique : paquet d'onde, train d'onde (OPPH tronquée) ou OPPH modulée en amplitude. Définition du paquet d'onde.  $\hat{\xi}$  est une fonction centrée sur  $\omega_0$  et de largeur  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ . Le graphe de  $\hat{\xi}$  est le spectre du paquet d'onde. Donner l'exemple du paquet d'onde gaussien (Thibierge, p. 43), faire la construction graphique en sommant de plus en plus de sinusoïde au tableau - parallèle avec les interférences lumineuses.

### 1.2 Vitesse de phase, vitesse de groupe

Redéfinir proprement la vitesse de phase avec la partie réelle de  $k$ . Faire le calcul du paquet d'onde à l'ordre 1 pour faire apparaître la vitesse de groupe (cf. Thibierge, p. 20). Exploiter la position du centre du paquet d'onde pour asseoir l'intérêt de la vitesse de groupe et sa réalité physique par opposition à la vitesse de phase.

Expérience : Mesurer la vitesse de groupe pour la propagation dans le câble coaxial. Observer la déformation du pulse qui n'est pas apparue jusque là dans notre modèle.

### 1.3 Déformation du paquet d'onde

Pousser le DL à l'ordre 2 pour voir apparaître la déformation du paquet, cf. Thibierge, p. 40-4 ou plutôt [71], p. 1017 - Il faut adapter à chacun le développement de cette partie, notamment à quel point on pousse le calcul. On peut surtout montrer la déformation numériquement sur le [programme Python « Déformation\\_Paquet\\_Onde »](#)

### Transition :

## 2 Illustrations dans divers domaines de la physique

### 2.1 Dispersion normale, dispersion anormale

On s'appuie sur l'exemple des ondes à la surface de l'eau développé dans le cours de M. Rabaud, à partir de la page 73 et le BUP n°649 à partir de la page 299 - Commencer par donner la relation de dispersion générale des ondes à la surface de l'eau

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh)$$

et la représenter sur [slide](#). Expliquer comment trouver graphiquement la vitesse de phase (pente de la droite liant l'origine au point d'intérêt sur la courbe) et la vitesse de groupe (pente locale de la courbe). Mettre en exergue deux régimes (cf. cours de M. Rabaud) :

- Un régime de dispersion normale aux grandes longueurs d'onde, pour lequel la vitesse de phase croît avec  $\lambda$ . Il correspond au domaine des ondes de gravité.
- Un régime de dispersion anormale aux courtes longueurs d'onde, pour lequel la vitesse de phase décroît avec  $\lambda$ . Il correspond au domaine des ondes capillaires.

Discuter de la chute d'un caillou dans l'eau (voir BUP, p. 305 et cours de M. Rabaud, p. 75) - Donner le spectre impulsion, et observer les déformations dans le cas d'un gros et d'un petit caillou.

### 2.2 Dispersion et énergie

On traite ici la partie imaginaire du nombre d'onde  $k$ . On va prendre l'exemple du plasma. On connaît la relation de dispersion des ondes dans un plasma.

- Cas  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel, propagation sans atténuation. Calcul de la vitesse de phase supérieure à  $c$ , bizarre... Milieu dispersif, calcul de la vitesse de groupe, calcul de la vitesse de l'énergie, c'est la vitesse de groupe!
- Cas  $\omega < \omega_p$ ,  $k$  est imaginaire pur, on a atténuation donc une onde évanescence. Regarder ce qu'il se passe pour l'énergie!

Programme python (Klein gordon HF, Klein gordon BF) : champ  $E$  en fonction des basses fréquences ou hautes fréquences.

Mais le cas le plus général est dispersion + atténuation (milieux ohmiques)

### 2.3 Limiter l'effet de la dispersion en télécommunication

Voir Thibierge, p. 36. Evoquer la pupinisation, in [37], p. 50. On peut avoir une propagation atténuée mais non dispersive : ce régime est atteignable pour un câble coaxial bien choisi. Factorisation de la relation de dispersion + condition de Heaviside pour factoriser encore.  $K = k' + ik''$ , avec  $k' = \omega/c$ , donc on trouve une vitesse de phase indépendante de  $\omega$ . Le câble est non dispersif, mais très atténuatif. Longueur d'atténuation indépendante de  $\omega$  : c'est la même atténuation pour toute fréquence.

---

**Conclusion :** On a donc quatre grands cas de propagation :

- Sans dispersion et sans atténuation, c'est le cas idéal de l'équation de d'Alembert
- Avec dispersion et atténuation, c'est le cas général rencontré avec l'équation des télégraphistes
- Avec dispersion mais sans atténuation, c'est le cas du plasma excité à une fréquence supérieure à la fréquence plasma, et celui des ondes à la surface de l'eau
- Avec atténuation mais sans dispersion, c'est le cas du câble coaxial respectant la condition de Heaviside.

Ouvrir sur le soliton et l'image d'une foule courant sur une surface déformable - plus il y a de personnes au même endroit, plus la déformation est importante de sorte que ceux qui sont seuls derrière courent en descente et rattrapent le peloton, et ceux qui sont devant courent en montée et sont rattrapés. Le passage de l'onde déforme le milieu de manière à favoriser la propagation.

**BONUS :**

- Il faut garder à l'esprit que la dispersion peut avoir deux origines principales : soit le milieu est dispersif car sa réponse dépend de la fréquence d'excitation, soit elle découle des conditions aux limites transverse à la propagation, c'est le cas du guidage qui fait l'objet d'une autre leçon.
- Remarque pour la mesure de  $v_\phi$  : La mesure de la vitesse n'est pas directement possible du fait que l'onde sinusoïdale n'a pas de réalité physique. On la mesure généralement en faisant interférer des ondes de sorte que, dans le cas où la fréquence est mesurable, on a  $v_\phi = v \cdot \lambda$ . Dans le cas contraire, par exemple en optique, on mesure la vitesse de phase via l'indice de réfraction  $n = c/v_\phi$ .
- Si cette leçon s'avère trop courte on peut allonger la partie sur la propagation dans un plasma en redétaillant le modèle, la relation de dispersion etc... (sans forcément passer par l'équation de propagation).



## LP n° 27 : Propagation guidée des ondes.

NIVEAU : LICENCE

Étonnamment je n'ai pas trouvé mention du guidage dans le programme de PC. Cette leçon est donc logiquement placée au niveau Licence.

PRÉREQUIS :

- Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs
- Réflexion sur un conducteur parfait
- Ondes acoustiques
- Fibre optique à saut d'indice

PLAN :

1. Préambule sur la fibre à saut d'indice
2. Guidage d'une on électromagnétique entre deux plans parfaitement conducteurs
3. Prolongement vers des guides réels

BIBLIOGRAPHIE :

- Cours d'Etienne Thibierge sur les ondes pour la prépa Agreg de Lyon.
- [58] *Optique. Fondements et applications*. J.-P. Pérez. (6eme édition)
- [74] *Optique Physique*, R. Taillet.
- [37] C. Garing, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*.
- BUP n° 742 sur la *Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air*
- [17] Hprépa, Ondes 2ème année, J.M.brébec

IDÉES À FAIRE PASSER :

Le guidage d'onde est essentiel pour les télécommunications contemporaines mais il fait apparaître des contraintes nouvelles : confinement, dispersion, fréquence de coupure.

**Introduction :** Décroissance en  $1/r$  de l'amplitude des ondes sphériques par simple considération géométrique (ATTÉNUATION et non ABSORPTION) : comment communiquer sur de longue distance ?

### Préambule sur la fibre à saut d'indice

*Remarque important : cette partie a un intérêt principalement pédagogique mais il ne faut pas y passer trop de temps puisqu'on ne démontre pas grand chose.*

Réintroduire le modèle de la fibre à saut d'indice et « rappeler » les résultats classiques : angle de réflexion totale entre la gaine et le coeur pour avoir propagation sans atténuation dans la fibre (angle de coupure), temps de parcours différents selon les modes (dispersion intermodale), confinement de meilleur qualité qu'avec une réflexion métallique. Ce sont ces phénomènes que l'on va essayer de montrer dans le cours de cette leçon. Evaluer rapidement le  $\Delta t$  entre le mode qui arrive au bout le plus tôt (propagation rectiligne) et celui qui a le plus grand angle, cf. compo 2007, question I.4-e- $\delta$  et [74], p. 289.

## 1 Guidage d'une on électromagnétique entre deux plans parfaitement conducteurs

On s'inspire grandement du cours de Thibierge, à partir de la page 51.

### 1.1 Modèle et mise en équation

Modéliser les deux plans par des conducteurs parfaits limitant le guide. Donner l'équation de propagation (et insister sur le fait qu'elle n'est pas impactée par les plans métalliques) et traduire l'effet des plans par les conditions limites.

Ecrire les équations de Maxwell en prenant en compte les symétries et invariances du problème (à étudier proprement et efficacement) et dissocier les groupes transverses électrique et transverse magnétique. Ils forment une base des solutions.

## 1.2 Étude d'un mode transverse électrique

Exposer la forme du champ recherché, et introduire la longueur d'onde guidée. Injecter dans l'équation de d'Alembert et étudier la forme des solutions selon le signe de  $\omega^2/c^2 - \beta^2$ . Résoudre dans le cas propagatif et introduire l'indice  $p$  caractérisant le mode  $TE_p$ , et donner la relation de dispersion. Insister sur le fait qu'on voit apparaître, pour une fréquence donnée, un nombre fini de modes dans lesquels elle peut se propager ou, réciproquement, pour un mode donné une fréquence minimale de propagation. Evoquer la méthode de calcul du champ  $\vec{B}$  (donner éventuellement la forme sur slide) en insistant sur le fait que la relation de structure des ondes EM dans le vide n'est plus valable ici! Analogie avec les modes transverses magnétiques. Existence d'un mode TEM.

## 1.3 Propagation dans le guide

Propagation en fonction de la fréquence (voir Thibierge, bas de la page 56). Présenter la relation de dispersion des différents modes sur [slide](#). Condition entre la longueur d'onde et la taille du guide pour avoir propagation (à nuancer) et calcul des vitesses de phase et de groupe. Voir la remarque (3.55) sur la propagation de l'énergie.

---

**Transition :**

---

## 2 Prolongement vers des guides réels

### 2.1 Guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire

Voir cours de Thibierge, p. 57 et [37], p. 96. Je ne pense pas utile de mener les calculs mais on présente les résultats par analogie avec la partie précédente.

Pour trouver la relation de dispersion avec deux indices, on considère les champs E et B sous la forme  $G(x)F(y)$ . Notation  $TE_{pq}$ . On peut forcer les conditions (taille du guide) pour s'assurer d'avoir une propagation monomode dans le guide.

### 2.2 Ondes acoustiques dans un tuyau sonore

A ce sujet et notamment pour l'interprétation expérimentale, voir Bup n° 742 sur la propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air. Les grandeurs couplées des ondes acoustiques sont la pression et la vitesse, on trouve des conditions aux limites les caractérisant. Une onde acoustique est longitudinale donc si sa direction de propagation est parallèle à l'axe du tuyau : propagation sans déformation. En cylindrique, l'équation de propagation reste d'Alembert, mais la solution fait intervenir des solutions de Bessel, que l'on n'exprimera pas. On donne la relation de dispersion, [1] p. 62 et [Compo 2009]

Expérience : Mettre face à face un émetteur et récepteur piézoélectriques. D'abord sans tube, montrer que le signal est rapidement affaibli (on pourrait faire l'ajustement en inverse de la distance pour voir...). Montrer ensuite avec le tube que le signal est confiné et est donc nettement mieux propagé! On peut ensuite regarder en détail le signal. En sortie on observe différents pics associés à différents modes qui se sont propagés à des vitesses différentes : dispersion!

### 2.3 Fibre à gradient d'indice

Intérêt : Comparer les temps de dispersion ([74], p. 289) pour montrer qu'elle est beaucoup plus faible que dans la fibre à saut d'indice (explication : l'indice extérieur est plus élevé donc la lumière progresse plus rapidement et lorsqu'un rayon s'écarte de l'axe il parcourt plus de chemin mais à une vitesse plus importante!) faible atténuation ([58], p. 192) et multiplexage ([74], pp. 289-290). Inconvénients dans [74], p. 291.

**Conclusion :** On a vu comment guider une onde, quelles étaient les caractéristiques de la propagation : différents modes, et que le confinement provoquait une dispersion. Pour rappel avec l'intro : un mode = 1 angle en optique géométrique. On a ici considéré des conducteurs parfaits mais en réalité, il y a toujours un phénomène de transmission de l'onde.

# LP n° 28 : Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.

NIVEAU : LICENCE 3

## PRÉREQUIS :

- Ondes Électromagnétiques dans le vide
- Oscillations forcées
- Optique géométrique
- Étude macroscopique des milieux diélectriques (polarisation, équations de Maxwell), réponse à un champ sinusoïdal

## PLAN :

1. Équations associées à la propagation d'une onde dans un DLHI

2. Interprétation microscopique de l'indice

## BIBLIOGRAPHIE :

- [8] *Électromagnétisme 4*, Bertin-Faroux-Renault
- [66] Tout-en-un Physique PC/PC\*, ancien programme (2009).
- [61] Cours de Jean-Michel Raimond
- On peut aussi trouver des informations dans [38] C. Garing, *Ondes 3*.
- [53] *Physique PC/PC\**, H. Gié et coll.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

Dans un premier temps la méthode de résolution est la même dans les DLHI que dans les conducteurs : les équations de Maxwell couplées aux équations constitutives donnent l'équation de propagation. Ce qui change en revanche c'est la réponse du milieu au passage de l'onde au niveau microscopique et ici en l'occurrence la forme de  $\chi(\omega)$ .

**Introduction :** Ce cours s'inscrit dans la suite directe du cours sur l'électromagnétisme dans les milieux. On ne va travailler ici que dans des milieux diélectriques (sous-entendu non magnétiques), linéaires, homogènes et isotropes (abrégés en DLHI). On suppose donc connues les relations constitutives du milieu (liens entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\chi(\omega)$ ,  $\epsilon(\omega)$ , etc... A rappeler éventuellement sur [slide](#)). Il va de soit que des ondes électromagnétiques peuvent se propager dans ces milieux (dans le verre, par exemple) de sorte que le but de cette leçon est d'en prolonger l'étude par leur réponse au passage d'une telle onde. Dans un premier temps on va déterminer les équations associées à la propagation de l'onde, puis on verra comment, en fonction de la fréquence, le milieu réagit à cette excitation.

## 1 Équations associées à la propagation d'une onde dans un DLHI

### 1.1 Équation de propagation dans un DLHI

On part des équations de Maxwell dans le milieu, combinées aux équations constitutives pour trouver les équations de propagation (cf. [8] pp. 200-201) - On travaille avec  $\vec{B}$  ici, pas  $\vec{H}$ , car le milieu est supposé non magnétique.

Remarque : c'est une équation très semblable à l'équation de d'Alembert... sauf que  $\epsilon_0$  est remplacé par  $\epsilon(\omega)$  : on peut toujours chercher des solutions en OPPM, mais la superposition va être moins facile!

### 1.2 Pseudo-OPPM dans le milieu. Relation de structure.

C'est ce qu'on fait ([8], p.201) : on suppose la propagation d'une onde plane progressive monochromatique et on en donne la structure (trièdre direct, attention au déphasage) et la relation de dispersion. Porter l'attention sur le fait que  $\epsilon$  est potentiellement complexe, donc  $\vec{k}$  aussi! [66], p. 717.

### 1.3 Indice

[66], p. 720 - Indice complexe. Lien entre partie réelle, partie imaginaire et propagation, absorption. Signes. Lien avec la vitesse de phase et l'indice déjà rencontré en optique  $n = c/v$ . Adopter une partie de la discussion sur l'indice des milieux absorbants et non-absorbants de [8], pp. 202-205. Introduire notamment les notations  $\epsilon_r$ ,  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$ . Faire le lien entre l'indice et la polarisabilité ([8], p. 206).

**Transition :** La susceptibilité contient donc tout à la fois les phénomènes de réfraction ou de dispersion, si l'indice n'est pas indépendant de la fréquence, et les phénomènes d'absorption. D'un point de vue phénoménologique, le lien

entre la polarisation et le champ est décrit à l'échelle macroscopique par le coefficient de susceptibilité électrique caractéristique du milieu et de son état. Est-il possible de donner une interprétation de ce coefficient à partir de la structure microscopique du matériau?

---

## 2 Étude microscopique du diélectrique

Voir [8], pp 50 et suivantes. Introduire cette partie avec le premier paragraphe de [8], p. 206. Aussi, avant de se plonger dans l'étude dynamique, on peut prendre quelques minutes pour relire la description statique du phénomène dans [8], pp. 51-74.

### 2.1 Polarisation électronique, modèle de l'électron élastiquement lié

Voir [8], pp. 85-89, [53], pp. 796-798, [66], pp. 712-714 et (à mon avis le plus rigoureux) Cours de J.-M. Raimond, pp 256-260. Traiter le modèle de l'électron élastiquement lié correctement : voir les phénomènes macro qui permettent de l'intuiter dans le BFR puis exposer correctement les déplacements (noyau immobile et déplacement du nuage électronique en bloc). Préciser les forces en jeu, leur origine et expression. Écrire le PFD en terme de déplacement, puis de polarisation et enfin de polarisabilité. Limites pour  $\omega$  voisin ou éloigné de  $\omega_0$  et graphes sur [slide](#). Ordre de grandeur de  $\omega_0$  et  $\tau$  et largeur des pics - grand facteur de qualité (cf. [66], p. 713).

### 2.2 Polarisation atomique et d'orientation

Pour la polarisation atomique, voir [8], p. 89 (même phénoménologie mais à des fréquences plus faibles). Pour la polarisation d'orientation, voir [8], p. 90 et suivantes : modèle de Debye et graphes.

Bilan : graphe total. Interpréter le pic d'absorption électronique comme principe des micro-ondes, et constater qu'il n'y a pas d'absorption (ou peu) dans le domaine optique.

### 2.3 Dispersion dans le domaine optique, Loi de Cauchy

Voir [8], pp. 206-207.

---

**Conclusion :** On a démontré que la propagation d'une onde dans un milieu diélectrique est principalement dictée par son indice. Nous avons fait dans cette leçon l'hypothèse d'un DLHI et présenté différents comportements microscopiques de ces milieux. La levée successive de ces hypothèses apportera dans la suite des phénomènes intéressants : biréfringence si le milieu n'est pas isotrope, mirage si le milieu n'est pas homogène, divers effets (notamment l'effet Kerr) si le milieu n'est pas linéaire.

On peut aussi ouvrir sur des choses connues comme les couches anti-reflet et l'incidence de Brewster qui se démontrent avec ce genre de résultat. Voir [66], p.730 (exercices).

**BONUS :**

---

1. Si la leçon est trop courte, ou si on veut se rassurer en n'entrant pas trop dans les détails du microscopique, on peut traiter les interfaces de diélectrique comme c'est fait dans le Dunod.

# LP n° 29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.

## NIVEAU : CPGE

Le programme de PC impose de traiter les plasmas et les métaux mais laisse le choix quant à l'exemple qui sert à introduire la méthode. L'étude des DLHI n'est pas au programme mais on peut discuter par analogie l'importance de l'indice optique.

## PRÉREQUIS :

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Bases de mécanique

## PLAN :

1. Principe de l'étude illustré sur l'exemple du plasma dilué
2. Propagation dans un métal

## BIBLIOGRAPHIE :

- Cours de J. Neveu sur les moteurs, chapitre 1
- [22] Tout-en-un Physique PSI/PSI\*, nouveau programme (1ere édition, 2014).
- [50] *Électromagnétisme. 2e année.* D. Mauras.
- [37] *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, C. Garing.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

La résolution de problèmes d'électromagnétique dans les milieux relève de l'automatisme : il y a une démarche claire à suivre pour résoudre le problème qu'il s'agit de faire rigoureusement passer ici. Des phénomènes inédits apparaissent alors.

**Introduction :** Définir un milieu conducteur (à écrire au tableau) : un milieu est dit conducteur s'il contient des charges libres de se déplacer sur des distances macroscopiques à l'intérieur du matériau. Éventuellement introduire les deux milieux conducteurs que nous allons étudier dans cette leçon : les plasmas, milieux dilués dans lesquels l'onde se propage sans absorption ou ne se propage pas et les métaux, conducteurs denses, dans lesquels la propagation de l'onde dépend de sa fréquence.

De manière générale, les équations de Maxwell sont toujours vraies (même dans le milieu) mais ce qui va devenir plus subtil c'est le comportement de  $\rho(M, t)$  et  $\vec{j}(M, t)$  sous l'effet du champ électrique.

## 1 Principe de l'étude illustré sur l'exemple du plasma dilué

### 1.1 Modélisation et équations constitutives du plasma

[50], pp. 129-130 et [22], pp. 1073 et suivantes. Présenter rapidement ce qu'est un plasma et donner les exemples du Dunod.

#### Trouver l'équation sur $\vec{j}$ par une étude mécanique

On trouve la loi d'Ohm locale complexe dans [50], p. 130. Il faut avoir fait l'approximation non relativiste (à vérifier à la fin!) et supposer que le milieu est suffisamment dilué pour négliger les interactions entre particules [on peut comparer la densité de charge dans le cuivre  $\approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$  à la densité de charge dans la ionosphère  $\approx 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ]. Simplifier par rapport des masses.

#### Trouver l'équation sur $\rho$ par conservation de la charge

Voir toujours [50], p. 130. On retiendra que  $\rho = 0 \text{ C.m}^{-3}$  sauf si  $\omega = \omega_p$  mais c'est incompatible avec la propagation transverse.

#### Obtenir l'équation de propagation par combinaison des équations de Maxwell et des équations constitutives

On combine tout et pouf, ça fait une équation de propagation (On avait fait la même chose pour trouver celle du vide, mais là il y a un petit terme en plus!). Voir [22], pp. 1076-1077 et DONNER DES ORDRES DE GRANDEUR. L'équation de propagation est dite équation de Klein-Gordon (NB : toute équation de propagation faisant intervenir une

pulsation de coupure est appelée équation de Klein-Gordon). Remarquer que si  $n_0 \rightarrow 0$  on a  $\omega_p \rightarrow 0$  et on retrouve l'équation de d'Alembert.

Supposer la forme de la solution en onde OPPM et en déduire la relation de dispersion.

## 1.2 Analyse de l'onde : Ondes évanescentes

On distingue deux cas :

- Si  $\omega^2 > \omega_p^2$  ([22], p. 1077),  $k$  est réel, propagation sans atténuation. Calcul de la vitesse de phase supérieure à  $c$ , bizarre... Milieu dispersif, calcul de la vitesse de groupe.
- Si  $\omega^2 < \omega_p^2$  ([22], p. 1079),  $k$  est imaginaire pur. Faire un schéma du champ électrique en fonction de  $x$  à différents instants. Onde évanescente.

## 1.3 Aspect énergétique

Voir [37], pp. 151 et suivantes, et adapter selon le temps. L'idée principale est de montrer que dans le cas où l'onde se propage dans le plasma, l'énergie se propage bien à la vitesse de groupe de sorte qu'avoir  $v_g > c$  n'est pas un problème. On peut montrer à partir de [22], p. 1080, que l'onde évanescente, au contraire, ne propage pas du tout d'énergie dans le milieu, même dans l'épaisseur qu'elle pénètre : l'onde est entièrement réfléchi. cf. **programme « Klein\_Gordon\_BF »**. On peut alors évoquer plus ou moins en détail l'application aux communications, [50], p. 132.

---

**Transition :** Le plasma était le bon exemple introductif ici car c'est un milieu conducteur relativement simple : du fait du caractère peu dense on a pu négliger les interactions entre particules. On va maintenant s'intéresser aux métaux, milieux conducteurs par excellence puisque, du fait de leur densité de charge libre, on les utilise quotidiennement pour conduire le courant. De ce même fait, ils présentent l'inconvénient que les interactions entre les électrons libres et les nœuds du réseau ne sont plus négligeables. Une phénoménologie nouvelle apparaît.

---

# 2 Propagation dans un métal

## 2.1 Recherche des équations régissant le problème

### Trouver l'équation sur $j$ par une étude mécanique

L'étude mécanique porte ici le nom de modèle de Drude. Son développement a été historiquement rendu possible par la découverte de l'électron par Thomson en 1897. Modélisation faite par le physicien allemand Paul Drude en 1900, elle aboutit à la bonne phénoménologie mais **on sait aujourd'hui que les mécanismes sont plus complexes (voir LP47)**.

Pour l'obtention de la conductivité complexe voir le poly de JN, p. 5. On modélise les chocs comme un frottement visqueux, cf. [6], pp. 161-162. Obtenir la conductivité statique et en donner un ordre de grandeur, de même que pour  $\tau$  comme calculer dans [50], p. 140. On aboutit à une relation de la forme

$$\vec{j} = \frac{inq^2}{m\omega} \frac{1}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} \vec{E}$$

Dans le plasma, on avait une unique pulsation caractéristique,  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ . Le modèle du métal en fait apparaître deux : par analogie avec le plasma ( $\gamma = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$ ) on a  $\omega_{p,metal} = nq^2/m\epsilon_0 \approx 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$  et on voit apparaître naturellement la pulsation  $1/\tau \approx 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ .

Remarque : On peut voir d'autres approches de cette étude dans [71], p. 974 et [22], p. 532.

Remarque : A priori tous les champs sont exprimés en la position exacte de l'électron mais sous réserve que  $\lambda \gg$  amplitude du mouvement de l'électron on peut associer les champs à leur valeur en la position moyenne de l'électron.

### Trouver l'équation constitutive sur $\rho$ par conservation de la charge

Résoudre l'équation sur  $\rho$  et évaluer le temps de décroissance exponentielle d'un éventuel excès de charge, cf. cours de JN, p. 7. Faire apparaître la pulsation  $\omega_p$  et en donner un ordre de grandeur à comparer à  $1/\tau$  (cf. note de bas de page du cours de JN, p. 7). Discuter la phénoménologie selon les différents régimes fréquentiels considérés : soit  $\rho = 0$ , soit c'est le facteur numérique qui s'annule ( $\omega_p^2 - \omega^2 + i\omega/\tau = 0$ ). Discuter rapidement, dans tous les cas l'électronneutralité est préservée, sauf si  $\omega = \omega_p$ .

### Obtenir la relation de dispersion directement à partir des équations de Maxwell

Le faire (voir [71], p. 1009), pour aboutir à la relation de dispersion sans passer par l'équation de propagation (insister sur le fait que c'est une autre méthode que celle employée en I.).

## 2.2 Propagation dans le domaine optique

Voir [71], p. 1026 - C'est le domaine  $\omega \gg 1/\tau$ . On a alors  $\gamma_{metal} = \gamma_{plasma}$  et on traite par analogie :

- Si  $\omega \gg 1/\tau$  et  $\omega \gg \omega_p$  on est dans le domaine de transparence. Physiquement, les électrons du métal s'agitent à une fréquence très élevée de sorte qu'ils se déplacent peu et ne rencontrent pas les ions du métal.
- Si  $\omega \gg 1/\tau$  et  $\omega \ll \omega_p$  on est dans le domaine optique, on a des ondes évanescentes dans le métal et l'onde incidente est parfaitement réfléchie. C'est ce qu'on observe expérimentalement (éclat brillant des métaux)!

## 2.3 Propagation dans le domaine ohmique

Pour cette partie, voir par exemple [71], pp. 1022 - 1026. Si  $\omega \ll 1/\tau$  on est dans le domaine dit ohmique et on peut simplifier  $\gamma_{metal} = \left(\frac{i}{\omega\tau}\right)^{-1} \gamma_{plasma} = nq^2\tau/m = \gamma_0$  réel! Ecrire les équations de Maxwell et comparer les courants de conduction et de déplacement :

$$\frac{\mu_0\gamma_0}{\omega/c^2} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\omega} = 10^{18}/\omega \ll 1$$

car  $\omega \ll 1/\tau \approx 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ . On peut alors trouver l'équation de propagation.

Le métal est siège d'un processus dissipatif qui justifie la non réversibilité de l'équation de propagation (qui ressemble en fait plus à une équation de diffusion) et invite à chercher des solutions atténuées sous la forme de pseudo-OPPM  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})$ . On peut alors utiliser la notation complexe en notant  $k = k' - j/\delta$ . On garde les mêmes relations sur les dérivées etc mais insister sur le fait que  $k$  est maintenant complexe. Relation de dispersion.

Remarque : en passant en pseudo-OPPM directement dans les équations de Maxwell on aurait trouvé directement la relation de dispersion du milieu. Le faire?

La résolution est complète une fois qu'on est remonté à  $k$ . Sachant  $k^2 = -j\omega\mu_0\gamma$  et en remarquant  $-1 = e^{-j\pi/2} = (e^{-j\pi/4})^2$  cela se fait aisément.

**Conclusion :** Contrairement au vide, la propagation dans les milieux est généralement dispersive de sorte que la propagation des ondes réelles, superposition d'OPPH appelées paquet d'onde, sera rendue délicate. On peut aussi ouvrir sur les DLHI.

### BONUS :

- On a fait apparaître un cas pathologique dans l'étude du plasma, celui d'une onde non transverse de pulsation  $\omega = \omega_p$ ... Qui est cette onde? Il y a un exo dans le Dunod! (C'est en fait une onde acoustique qui se propage dans le plasma).





# LP n° 30 : Rayonnement dipolaire électrique.

NIVEAU : CPGE

Cette leçon est entièrement au programme de MP.

PRÉREQUIS :

- Électrostatique (dont champs créé par un dipôle)
- Équations de Maxwell
- Ondes électromagnétiques dans le vide et aspects énergétiques
- Modèle de l'électron élastiquement lié

PLAN :

1. Sources de rayonnement et modèle du dipôle électrique oscillant
2. Champs rayonnés par le dipôle électrique oscillant

3. Puissance rayonnée par le dipôle électrique oscillant

BIBLIOGRAPHIE :

- [7] *Électromagnétisme 3*, Bertin-Faroux-Renault.
- [56] *Électromagnétique. Fondements et applications*. J.-P. Pérez.
- [65] Tout-en-un Physique MP/MP\*, ancien programme.
- [53] Tec & Doc PC/PC\* (2000)
- [37] C. Garing, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*.

IDÉES À FAIRE PASSER :

Le calcul des champs rayonnés est compliqué : on l'étudie ici sous des hypothèses simplificatrices mais censées. Toute charge accélérée rayonne et en particulier le dipôle électrique oscillant permet de générer une onde avec une structure agréable, localement OPPM. Cela permet de comprendre le phénomène de diffusion.

**Introduction :** On a étudié la propagation du champs électromagnétique dans le vide, notamment celle des OPPM, sans jamais se poser la question de l'origine de ces ondes. C'est ce qu'on fait ici, et la source la plus simple est forcément non ponctuelle (loin de la charge on ne verrait pas de variation du champ) donc on va essayer de décrire le champ créé par deux charges ne se ramenant pas à une seule charge : un dipôle!

## 1 Sources de rayonnement et modèle du dipôle électrique oscillant

### 1.1 Sources de rayonnement - Échelles caractéristiques

Tout système contenant des charges mobiles (courant  $\vec{j}(M, t)$ ) est source d'un champ électromagnétique. En régime variable ce champ est de nature propagative et on dit que la source RAYONNE ce champ. En Régime permanent sinusoïdal l'onde rayonnée est monochromatique. La source est caractérisée par trois longueurs principales :  $a$ ,  $r$ , et  $\lambda$  définies sur [slide](#). Ordres de grandeur dans le cas de l'atome et d'une antenne quart-d'onde.

On va faire dans cette leçon les hypothèses  $a \ll \lambda$  et  $a \ll r$ . En pratique on a aussi  $r \gg \lambda$  : c'est la ZONE DE RAYONNEMENT.

Remarque : On est à l'opposé de l'ARQS qui correspond à  $r \ll \lambda$ .

### 1.2 Rôles des hypothèses

Idée pour le calcul : appliquer le théorème de superposition et voir le champ en M comme somme des champs émis par chaque point P. Alors les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vont dépendre de l'atténuation (en  $1/PM^n$ ) et du retard à a propagation (en  $t - PM/c$ ).

- Pour l'atténuation on a déjà vu une méthode de traitement en électrostatique : on fait le DL de la distance grâce à  $a \ll r$ . C'est l'APPROXIMATION DIPOLAIRE. [53], p. 730.
- Pour le retard on peut négliger la variation de  $j$  si le  $\delta t$  est négligeable devant la période ce qui équivaut bien à  $a \ll \lambda$  (faire un schéma - remarquer que  $t - PM/c = t - r/c + \delta(t)$  avec  $\delta(t) \approx a/c$  que l'on veut très inférieur à la période  $T$  de l'onde). cf. idem.

### 1.3 Modèle du dipôle électrique oscillant

Modèle de charge multiple variable : charge  $+q$  fixe, charge  $-q$  oscillant autour de  $O$  sur l'axe  $z$  ce qui donne un moment dipolaire  $\vec{p}(t) = q\vec{N}\vec{P} = -q\vec{r}_d(t)$  on note  $r_d(t) = -a\cos(\omega t)\vec{u}_z$  et alors  $\vec{p}(t) = aq\cos(\omega t)\vec{u}_z$ . Interprétation de l'hypothèse  $a \ll \lambda$  comme hypothèse non relativiste. Présentation de l'intérêt du modèle :

- Résultats généralisables à de nombreuses sources (notamment sur l'énergie)
- Bon modèle pour des sources réelles : électron élastiquement lié, antenne (superposition de dipôles).

---

**Transition** : A ce stade on est dans une situation pour laquelle on pourrait mener le calcul des champs mais ça n'est pas attendu au programme. On se contente d'en analyser les expressions et de les interpréter (et c'est déjà très riche!) - A titre d'information et en vue de répondre aux questions du jury, la démonstration se fait à partir des potentiels retardés. Elle est intégralement traitée dans [53], pp. 729-731.

---

## 2 Champs rayonnés par le dipôle électrique oscillant

### 2.1 Considérations sur la forme générale des champs

On peut s'appuyer, entre autres, sur [53], p. 731.

1. Étude des symétries et invariances (Principe de Curie).  $E_\varphi = 0$  et  $\vec{B} = B\vec{u}_\varphi$   
On admet la forme générale des champs présentés sur [slide](#).
2. Dépendance temporelle en  $t - r/c$  : caractère propagatif et cohérent avec l'hypothèse non-relativiste.
3. Structure spatiale : pas une onde plane (vecteur de propagation dépend de  $\theta$ ) ni sphérique (à  $r$  fixé l'amplitude n'est pas constante). On parle de RAYONNEMENT ANISOTROPE. Renvoyer au traitement énergétique traité un peu plus loin.

### 2.2 Structure de l'onde dans la zone de rayonnement

[7], p. 228 - Ordres de grandeur des différents termes ( $p/r^3$ ,  $\dot{p}/r^2c$  et  $\ddot{p}/rc^2$ ). Zones de rayonnement, intermédiaire, et ARQS (on retrouve le champ statique). Expressions des champs dans la zone de rayonnement au tableau.

4. Interpréter la structure locale d'onde plane : structure vectorielle et amplitude constante si  $r$  et  $\theta$  ne varient pas trop (plan tangent local).
5. Décroissance en  $1/r$  cohérent avec l'hypothèse dipolaire, et atténuation sans perte d'énergie (i.e. sans absorption cohérent avec le fait qu'on soit dans le vide, cf. III).
6. Les champs sont proportionnels à  $\ddot{p}$  donc on vérifie que pour rayonner un champ électromagnétique les charges doivent être accélérées!

---

**Transition** : On doit enfin s'intéresser à la manière dont une telle source de champ rayonne l'énergie, notamment pour quantifier l'anisotropie du champ dont on a parlé plus haut et voir comment la puissance dépend du mouvement de la charge.

---

## 3 Puissance rayonnée par le dipôle électrique oscillant

### 3.1 Anisotropie du rayonnement

[53], p. 7312 - On donne la formule et l'expression du vecteur de Poynting, parallèle à  $\vec{u}_r$  (direction du rayonnement), proportionnel à  $1/r^2$  (pas d'absorption), mais dépendant de  $\theta$ . On trace l'indicatrice de rayonnement sur [slide](#) pour quantifier l'anisotropie.

### 3.2 Puissance rayonnée - Formule de Larmor

[53], p. 732 - Quelle puissance traverse une sphère de rayon  $r$ ? On calcule le flux du vecteur  $\vec{\Pi}$  pour trouver  $\varphi = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2(t - r/c)$  indépendant de  $r$  (énergie conservée). On retrouve que la puissance moyenne est proportionnelle à la moyenne de l'accélération de la charge au carré (formule de Larmor). On a donc rayonnement si la charge est accélérée : antenne (mouvement de charges sinusoïdal), rayonnement thermique, rayonnement synchrotron, de freinage, etc...

Dans le cas du dipôle on a même  $P \sim \omega^4$  donc pour une excitation plane en fréquence on rayonne plus à  $\omega$  élevée.

### 3.3 Diffusion Rayleigh

Voir par exemple [53], p. 734 - En fonction du temps, rappeler le lien entre le déplacement du barycentre des électrons de valence et l'excitation électrique, la résonance à  $\omega_0$ . Dans l'atmosphère  $N_2$  et  $O_2$  vibrent dans l'UV donc bien en dessous de la fréquence de résonance : approximation faite on a  $r$  indépendant de  $\omega$  et sous l'excitation du soleil (plat dans le visible) on rayonne beaucoup plus le bleu que le rouge! On peut développer plus ou moins le modèle, et si possible parler un peu de polarisation.

---

**Conclusion :** Modèle riche en interprétations. Calcul faisable avec des outils pas trop évolués même si hors programmes car très calculatoires. Suffit à modéliser pas mal de chose, on a vu ici l'électron lié, on pourra prolonger sur les antennes

**BONUS :**

---

- Pour prouver la fameuse assertion « toute charge accélérée rayonne » on peut superposer le dipôle à une charge fixe qui annule la charge fixe du dipôle.
- Pourquoi on se penche principalement sur cette source de rayonnement et pas une autre?
- Voir la preuve en potentiels retardés dans le Gié, par exemple.
- Se chauffer sur les antennes parce que ça va tomber! Voir pour cela [53], p. 748 (exercice)



# LP n° 31 : Présentation de l'optique géométrique à partir du principe de Fermat

NIVEAU : LICENCE 3

## PRÉREQUIS :

- Lois de l'optique géométrique
- Formalisme lagrangien - Équations d'Euler-Lagrange
- Notions d'optique ondulatoire (chemin optique)

## PLAN :

1. Énoncé moderne du principe de Fermat
2. Lois de l'optique géométrique
3. Propagation dans un milieu non-homogène

## BIBLIOGRAPHIE :

1. [58] *Optique, Fondements et applications*. J.-P. Pérez (7e édition)
2. [24] Ondes lumineuses, de Boeck
3. [11] *Optique & Physique ondulatoire*, Bertin-Faroux-Renault
4. [71] *Physique PC/PC\**, Dunod (2014)
5. TD de C. Sayrin, *Optique géométrique*
6. [54] *La physique par la pratique*, B. Portelli (2e édition)

## IDÉES À FAIRE PASSER :

On peut résumer l'optique géométrique à un PRINCIPE VARIATIONNEL : le principe de Fermat. Il contient toute l'optique géométrique et permet de développer des outils performant pour lever certaines hypothèses de l'OG.

**Introduction :** L'objectif de cette leçon est de retrouver les lois de l'OG, et de voir ce que le principe contient en plus. On commence par l'énoncé historique du principe de Fermat (1657) :

*La lumière se propage d'un point à un autre le long d'une trajectoire telle que le temps de parcours soit minimal.*

## 1 Énoncé moderne du principe de Fermat

*Cette partie est cruciale pour poser les bases du principe de Fermat et les hypothèses nécessaires pour passer à la suite; elle doit donc être rigoureusement traitée. Cependant, elle ne constitue pas une partie très valorisante en soit et je pense qu'il faut la traiter en un temps réduit.*

### 1.1 Hypothèses sur le milieu

On suppose que le milieu dans lequel on considère que la lumière se propage est :

- Linéaire (cf. éventuellement le BFR d'électromagnétisme4 [8] sur ce sujet)
- Transparent (on néglige toute dissipation d'énergie)
- Pas nécessairement homogène, mais si  $n$  varie, il le fait sur une distance caractéristique grande devant la longueur d'onde (afin d'éviter la diffraction).
- Isotrope

### 1.2 Du temps de parcours au chemin optique

[24], pp. 5-7 - Entre les abscisses curvilignes  $s$  et  $s+ds$  le temps de parcours est  $t(s) = ds/v(s)$ . On peut intégrer pour avoir le temps de parcours global et comme on applique un principe variationnel on peut multiplier par une constante  $c$ . On retrouve la définition de l'indice optique et du chemin optique. Outil plus utile que le temps de parcours même si ça dit la même chose, cf. optique ondulatoire.

### 1.3 Remise en cause du principe de minimalité

[58], p. 19 - Le principe de Fermat qualifie le chemin optique suivi par la lumière de minimal, on va voir une situation où le chemin optique est maximal, cf. sur [slide](#) le schéma des trajets effectivement suivis par la lumière. Dans les 3 situations, le rayon existe mais n'a pas la même valeur de chemin optique. On introduit la notion de stationnarité du chemin optique.

On s'intéresse à la propagation du rayon AIB par réflexion selon trois dioptrés : l'ellipse orange et les cercle plus ou moins concave violet et rouge. Dans les trois cas, le rayons AIB correspondant à une incidence normale existe réellement. Pourtant il correspond à trois variations différentes :

- Dans le cas orange, quelque soit le point N le chemin optique ( $ANB$ ) est le même que ( $AIB$ ). Le chemin optique est constant.
- Dans le cas rouge, le chemin optique ( $APB$ ) est supérieur au chemin ( $ANB$ ) donc en particulier au chemin ( $AIB$ ) et le trajet du rayon suivi par la lumière correspond bien à un minimum de chemin optique.
- Dans le cas violet, le chemin optique ( $AMB$ ) est inférieur au chemin ( $ANB$ ) donc en particulier à ( $AIB$ ) et le chemin optique du trajet effectivement suivi par la lumière est maximal.

[58], p. 18 - Définition de la stationnarité : si la quantité  $dL$  est infiniment petite par rapport à la valeur supérieure du déplacement élémentaire.

### 1.4 Énoncé moderne du principe de Fermat

Sous les hypothèses énoncées précédemment, entre deux points A et B atteints par la lumière, le trajet effectivement suivi par la lumière est tel que le chemin optique est stationnaire. [58], p. 19 - C'est un principe variationnel : analogie avec le principe de moindre d'action de Maupertuis ( $S = L$  et  $p = n$ ).

**Transition :** On va maintenant rentrer dans le vif du sujet et nous lancer dans une présentation de l'optique géométrique. Bien sûr, on suppose que toutes les lois usuelles sont connues et on va s'attacher à les (re)démontrer en utilisant uniquement le principe de Fermat!

## 2 Lois de l'optique géométrique

### 2.1 Propagation rectiligne - retour inverse

On commence par deux lois parmi les plus basiques de l'optique (voir [58], p.20). La première relève de la propagation en milieu homogène : rendre stationnaire le chemin optique revient alors à rendre stationnaire la distance  $AB$  de sorte que le trajet parcouru par la lumière est une droite. On peut le démontrer rapidement selon le temps.

Sans l'hypothèse de milieu homogène on montre ([11], p. 100 et [58], p. 20) que  $\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_{BA}$  d'où le principe de retour inverse : le chemin suivi par la lumière entre A et B ne dépend pas du sens de parcours.

### 2.2 Interface entre deux milieux homogènes

[58], p. 20 - Aparté mathématique : si on déplace un petit peu les extrémités du vecteur AB on perturbe la norme selon :  $\mathcal{L}_{AB} = n_0 AB = n_0 \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$  or  $\vec{u}^2 = 1$  donc  $2\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$ . Ainsi  $d\mathcal{L}_{AB} = n_0(d\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AB} \cdot d\vec{u}) = n_0 \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$ . FAIRE UN SCHÉMA AU TABLEAU ÇA DÉMONTRE LE TRUC HYPER EFFICACEMENT!

Voir [11], p. 101 & [58], p. 20 - A partir de là on se place à une interface (cf. schéma sur [slide](#)) et on cherche le rayon lumineux qui lie A à B, ce qui revient, dans deux milieux homogènes, à chercher I, ou de manière équivalente à trouver les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . Pour cela on fait une modification infinitésimal de I et on veut que  $d\mathcal{L}_{AB} = 0$  au premier ordre. On trouve que  $n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2$  doit être normal à  $d\vec{I}$ . Ainsi on trouve le plan d'incidence, par passage au produit vectoriel (attention au signe!) on trouve la seconde loi de Snell-Descartes pour la réfraction. Et en appliquant le même raisonnement à la réflexion on obtient ce qu'il faut.

### 2.3 Formation des images : stigmatisme

TD de C. Sayrin, p. 8 - Définition d'un système stigmatique : si tous les rayons issus d'un objet A traversant le système convergent en B, image de A. Avec le principe de Fermat, on a que le chemin optique de A à B doit être constant. Schéma au tableau pour montrer l'effet de proche en proche. Exemple d'objets stigmatiques : miroirs plans, miroir elliptique pour les 2 foyers de l'ellipse, (points de Weierstrass du dioptré sphérique)

[1] p. 33-34 Notion de stigmatisme approché, les conditions d'Abbe et d'Herschel expriment la conservation de ce stigmatisme approché.

[3] p. 52 stigmatisme approché pour le dioptré plan (à voir).

**Transition :** On a démontré que le principe de Fermat permet de démontrer les lois de l'optique géométrique. Mais c'est un principe variationnel donc on a tout un formalisme à portée de main dont on ne s'est pas servi et que l'on doit pouvoir appliquer pour aller plus loin.

### 3 Propagation dans un milieu non-homogène

#### 3.1 Équation des rayons lumineux

[58], p. 202-203 - Trouver le Lagrangien associé au chemin optique, et on applique les équations d'Euler-Lagrange pour trouver l'équation des rayons :

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) \quad (31.1)$$

et sa généralisation en 3D.

#### 3.2 Propagation dans un milieu à gradient d'indice

[24], pp. 9 & 20 - On prend  $n^2(z) = 1 + az$  avec  $a \neq 0$  bien sûr. On applique l'équation des rayons lumineux pour trouver l'équation  $z(x)$  parabole dont l'orientation dépend du signe de  $a$ . Dans tous les cas on constate que le rayon se courbe vers les grands indices. Ça permet d'interpréter les mirages chaud ou froid (cf. [slide](#))! Ou d'autres exemples comme la fibre à gradient d'indice ou la cuve à gradient de concentration.

**Conclusion :** Le principe de Fermat contient bien toute l'optique géométrique (on aurait pu ajouter les relation de conjugaison aussi) mais c'est aussi un principe qui constitue un outil puissant pour lever les hypothèses de l'OG et travailler, par exemple, dans un milieu non homogène. Enfin c'est un principe qui permet de faire le lien entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire, par exemple avec le théorème de Malus.

**BONUS :** \_\_\_\_\_

1. On peut éventuellement ajouter (au détriment de quoi?) une partie dans le III. sur le théorème de Malus qui permet de montrer que le principe de Fermat est l'outil efficace pour faire le lien entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire.





# LP n° 32 : Microscopies Optiques.

NIVEAU : LICENCE

---

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Optique géométrique
- Diffraction (critère de Rayleigh, notions d'optique de Fourier)

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Le microscope à deux lentilles
2. Le problème de la résolution et la microscopie confocale LASER à fluorescence
3. La question du contraste et la microscopie par contraste de phase

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [44] *Optique, une approche expérimentale et pratique*, S.Houard.
- [77] *La microscopie optique moderne*, G.Wastiaux, Tec& Doc, Lavoisier, 1994
- TD de C. Sayrin *Optique géométrique & Diffraction II*
- Cours de M. Dahan (PWP en annexe)
- [73] Sextant
- Site microscopyU

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

Bon grossissement, bonne résolution et image fidèle (peu de défauts)

---

**Introduction :** Cours de M. Dahan : Qu'est-ce qu'un microscope? Un instrument qui

- Donne une image grossie d'un petit objet (grossissement)
- Sépare les détails de celui-ci sur l'image (résolution)
- Rend les détails visibles à l'œil ou avec une caméra

[44], p. 154 - Introduction historique ( [slide](#) ) :

- 1665, Hooke : microscope composé mais d'une qualité optique bof.
- 1830, Bancks : microscope simple encore mais grand pouvoir de résolution
- ... à compléter.

L'objet de cette leçon n'est pas de présenter une liste exhaustive des techniques de microscopies optiques mais plutôt de s'attarder sur le dispositif classique du microscope à deux lentilles pour en comprendre les enjeux et les limites, et d'étudier les réponses modernes aux différents problèmes posés, notamment les questions de résolution et de contraste.

## 1 Le microscope à deux lentilles

### 1.1 Description du dispositif

[44], p. 155 - Tracer au tableau le schéma du microscope classique. Il est constitué de deux systèmes optiques successifs : l'objectif et l'oculaire. On les représente schématiquement par des lentilles minces.

- L'objectif donne de l'objet  $AB$  une image intermédiaire  $A_1B_1$  agrandie et renversée. Pour avoir un bon grossissement et un encombrement réduit la lentille doit être de focale la plus courte possible et l'objet très proche.
- L'oculaire agit comme une loupe. On place l'image intermédiaire dans son plan focal permettant une observation sans accommodation (à l'infini) de l'œil.

**Expérience :** En même temps que l'on présente le dispositif au tableau ou le décrit sur un microscope sur la paillasse et préalablement réglé pour avoir une image sur l'écran. On peut ensuite changer l'objectif et montrer que cela change le grossissement.

Un tracé supplémentaire rapide permet de mettre en évidence le cercle oculaire (cf. [44], p. 155). C'est ici que l'on place l'œil pour une vision optimale.

## 1.2 Grossissement du microscope

TD C. Sayrin - Définition du grossissement commercial. Puisque le microscope forme d'un objet à distance finie une image à l'infini, on cherche à calculer le grossissement commercial  $G_c$  de ce dispositif optique. Schéma du microscope sur [slide](#) avec les bonnes notations.

$$G_{com,mic} = |\gamma_{ob}| * G_{c,oc}.$$

Expérience : mesurer le grossissement commercial du microscope qu'on a sur la paillasse ([73], p. 54)

C'est cette donnée que l'on veut maximiser puisque c'est justement elle qui quantifie l'intérêt du microscope dans l'agrandissement des images. On a donc intérêt à prendre des focales les plus petites possibles mais ça, ça pose des problèmes importants...

## 1.3 Aberrations liées à l'utilisation des lentilles simples

[77], p. 31 - Aberrations des lentilles : Il est impossible de construire des systèmes optiques sans défauts. Les principaux défauts d'images sont dus aux différentes aberrations provoquées par le passage des rayons lumineux au travers de la lentille et de manière générale de n'importe quel système optique non idéal. Notamment :

- Aberration sphérique - Voir [44], p. 129 : Si l'on envoie de la lumière monochromatique sur une lentille convexe de forme sphérique, tous les rayons provenant d'un point ne se concentrent pas en un point. Ils convergent en un point différent suivant que le rayon passe plus ou moins proche du centre de la lentille [slide](#). Il faut bien noter que ces aberrations ne sont pas intrinsèques au système : elles sont liées au fait qu'on ne travaille pas vraiment dans les conditions de Gauss!
- Aberrations chromatiques (longitudinale/connaître la transversale) - Voir [44], p. 126 : On utilise sur les microscopes modernes de la lumière blanche (polychromatique). Or chaque longueur d'onde est plus ou moins réfractée lors de son passage au travers de la lentille (la plus réfractée est la bleue, d'après la loi de Cauchy). [slide](#). Elles sont corrigées en faisant des doublets achromates comme le doublet de Fraunhofer, cf. [44], p. 128. Cela corrige à l'ordre un, les microscopes dits apochromats réalisent la superposition des plans focaux pour trois longueurs d'onde distinctes.

Pour l'application de ces corrections aux objectifs de microscope, voir [44], p. 158. En ce qui concerne l'oculaire on a le même genre de problème (mais moins marqués du fait que la focale reste raisonnable) que l'on corrige grâce à des verres de champ et d'œil pour obtenir un achromatisme apparent. Il n'est pas forcément utile d'en parler mais on peut lire [44], p. 161.

---

**Transition :** Il y a une question qu'on ne s'est pas posée du tout dans le microscope précédent, c'est celle du contraste. Pourtant, la plupart des objets que l'on veut observer sont transparents et a priori sans effet sur l'intensité lumineuse. Il faut alors travailler avec le seul élément optique modifié à la traversée de l'échantillon par l'onde lumineuse : la phase!

---

## 2 La question du contraste et la microscopie par contraste de phase

Pour cette partie, voir le cours de M. Dahan, à partir de la slide 26; le cours d'A. Jobart, à partir de la slide 47, cette page de [microscopyU](#) pour l'alignement du télescope ou de manière moins technique cette page contenant des généralités sur la technique. Sur cette page on trouve une animation pour comprendre champ clair / champ sombre.

Il faut prendre l'image du microscope et voir qui est l'image de qui, comment les rayons progressent sans échantillon, interpréter l'influence de l'échantillon et ensuite parler de la phase, de comment on la gère et de son influence sur l'intensité.

Si l'objet est transparent il ne modifie pas l'intensité du signal mais sa phase seulement et du coup ça se voit pas! [77], p. 191 - Intro historique, puis TD de Sayrin : on explique le principe de l'expérience d'Abbe et du filtrage sur [slide](#). On peut utiliser cette méthode en plaçant un objet de phase PWP (ex : lame de polarisation), pour modifier les contrastes. Calculs de Clément Sayrin avec la vibration lumineuse directe et diffractée : effet d'une  $\lambda/4$  : l'intensité dépend de la phase, on y a directement accès. L'image qu'on observe à l'écran a un contraste proportionnel à la phase. Les microscopes à contraste de phase sont utilisés dans les laboratoires de biologie car ils permettent d'étudier les objets vivants sans les colorer et donc sans les tuer. (Prix Nobel!!)

Pour la réalisation expérimentale, voir [77], p. 194 principe optique du microscope à contraste de phase.

---

**Transition :** Cette nouvelle technique permet de mettre dans le microscope des objets épais, mais pose dès lors la question de savoir si on est capable de voir nette toute l'épaisseur de l'objet, et de savoir à quelle profondeur est telle ou telle objet. De plus, on ne voit a priori pas de limite, à ce stade, à avoir de très grand grossissement.

---

### 3 Le problème de la résolution et la microscopie confocale

#### 3.1 Limites de résolution

##### Limite de résolution horizontale

Voir [44], p. 160 - Limite de résolution imposée par la diffraction (critère de Rayleigh en prérequis), faire la démonstration de la note de bas de page? A minima donner le résultat pour montrer qu'on doit augmenter l'ouverture numérique (Site MicroscopyU) pour avoir une meilleure résolution!

En pratique, il est difficile d'obtenir des valeurs d'ouverture numérique supérieures à 0,95 avec des objectifs secs (cf. MicroscopyU). Des ouvertures numériques plus élevées peuvent être obtenues en augmentant l'indice  $n$  de réfraction du support de formation d'image entre l'échantillon et la lentille frontale de l'objectif. Il existe désormais des objectifs de microscope permettant d'imager sur d'autres supports, tels que l'eau (indice de réfraction  $n = 1,33$ ), la glycérine (indice de réfraction  $n = 1,47$ ) et l'huile d'immersion (indice de réfraction  $n = 1,51$ ). **slide**

Noter d'ailleurs la remarque le fait que c'est bien sûr l'objectif qui limite la résolution du microscope : si il n'est pas bon l'oculaire ne rattrapera pas les défauts! On peut aussi insister sur la subjectivité du critère de Rayleigh : on fait aujourd'hui des détecteurs qui ont une bien meilleure résolution que cela!

##### Limite de résolution verticale

Voir [44], p. 157 et [77], p. 70. On reste qualitatif en exprimant juste le lien entre profondeur de champ et ouverture numérique.

#### 3.2 La microscopie confocale

[77], p. 254 - agit comme un couteau optique : examiner l'intérieur des structures épaisses + découper l'échantillon dans plusieurs directions : image 3D. Video du principe : <https://toutestquantique.fr/fluorescent-et-confocal/> Principe général : reproduction point par point d'un fin diaphragme dans le plan de l'objet. Pour obtenir une image totale, le point lumineux balaie la surface de l'objet au moyen de miroirs. Seules les informations du plan focal parviennent au détecteur : microscope confocal.

#### 3.3 Intérêt supplémentaire de la fluorescence

Ça marche super bien en fluorescence car la lumière diffusée est pratiquement éliminée. PWP Vidéo de la mitose d'une cellule : plus de destruction de l'échantillon, suivre l'évolution et en plus avec chaque couleur on sait qui est qui.

---

**Conclusion :** Récap + limites + nouvelles techniques : microscopies non optiques (type électronique ou a champ proche, [44], p. 162.) (PWP limites de résolution)

**BONUS :**

---

- L'objectif n'est pas une lentille simple mais composée de deux lentilles : [2] p. 111
- La puissance est aussi une caractéristique du microscope, on peut la relier au grandissement, cf. [44], p. 156.
- Optique non paraxiale : points de Weierstrass [44], p. 160.
- Détermination expérimentale de l'ouverture numérique d'un objectif [44], p. 164.
- Microscopie classique = à champ clair
- Il faut vraiment regarder les ressources en ligne sur le site de Montrouge, et ne pas hésiter à aller chercher des infos sur wikipédia!
- Je pense qu'on peut assez facilement faire sauter le calcul du grossissement ou de la puissance au profit du reste de la leçon (et supposer que ça a déjà été vu dans un cours d'optique géométrique).



# LP n° 33 : Interférences à deux ondes en optique.

NIVEAU : CPGE

PRÉREQUIS :

- Ondes électromagnétiques
- Modèle scalaire de la lumière, chemin optique, modèle des trains d'onde
- Optique géométrique

PLAN :

1. Superposition de deux ondes lumineuses
2. Réalisations expérimentales

3. Effet d'un défaut de cohérence sur la figure d'interférence

BIBLIOGRAPHIE :

- [11] *Optique physique et ondulatoire*, Bertin-Faroux-Renault
- [51] *Optique physique et électronique*, D. Mauras
- [71] *Physique PC/PC\**, Dunod (2014)
- [74] *Optique physique*, R. Taillet (2e édition)

IDÉES À FAIRE PASSER :

En optique, les interférences sont la preuve irréfutable du caractère ondulatoire de la lumière. Elles sont extrêmement difficiles à observer (il y a des conditions extrêmement sévères) et se dégradent rapidement lorsque les conditions ne sont plus favorables.

**Introduction :** Le phénomène d'interférence existe dans pleins de domaines de la physique (son, vagues, ...), lorsqu'on a des ondes, on l'observe facilement. La lumière est une onde, cependant en optique, il est difficile d'observer des interférences, il y a des conditions à vérifier. [51], p. 63 intro historique.

## 1 Superposition de deux ondes lumineuses

### 1.1 Conditions d'interférences, sources cohérentes

[71], p. 713 - Le terme d'interférence recouvre toutes les situations où est réalisée la superposition de deux ou plusieurs ondes électromagnétiques. On dit qu'il y a interférence lorsque l'intensité résultant de la superposition de plusieurs ondes EB diffère de la superposition des intensités. On envisage le cas d'une superposition de 2 ondes parfaitement monochromatiques, issues de deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ . **slide** schéma. Pour moi on se place directement dans le modèle scalaire et on écrit les vibrations lumineuses dans le cas général  $s_i(M, T) = a_i(M) \cos(2\pi/\lambda_i \mathcal{L}_{S_i M} - \omega_i t + \varphi_i^\circ)$ . Écrire l'éclairement au point M (linéarité des équations de Maxwell : on somme  $E_1$  et  $E_2$  en fait). Passer à l'intensité en prenant la moyenne du carré. On aboutit à

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\delta\varphi(M, t)) \rangle_{\tau_d}$$

**Remarque :** La moyenne est une moyenne temporelle. Elle se fait sur un temps caractéristique  $\tau$  qui dépend du détecteur utilisé!

Tout dépend du terme dans la moyenne :

- Si les sources sont non synchrones ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ) le cosinus varie à une fréquence trop rapide devant  $1/\tau_d$  et sa moyenne est nulle.
- Si les deux sources sont synchrones mais distinctes le terme  $\varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$  varie tous les  $\tau_c$  donc bien plus rapidement que le temps du détecteur et le résultat est le même.
- On a le même phénomène si  $\delta(M) > l_c$ .

Dans le cas où toutes ces conditions sont vérifiées on a la formule de Fresnel (cf. [71], p. 717)

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta\varphi(M)) \quad \text{et} \quad \delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) + \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$$

Selon le signe de  $\cos(\delta\varphi(M))$ , l'éclairement résultant est supérieur ou inférieur à la somme des éclairements des ondes; c'est le principe des interférences. Il y a donc deux cas : interférences constructives ou destructives.

**Remarque :** On peut retrouver rapidement cette formule en complexes à condition que les sources soient effectivement cohérentes.

## 1.2 Description de la figure d'interférence

Expliquer que la figure d'interférence dans l'espace est un faisceau d'hyperboloïdes de révolution ([51], p. 67) et montrer le schéma sur [slide](#). Expliquer qu'en mettant l'écran à un endroit ou à un autre on verra des anneaux ou des franges rectilignes.

Définir les grandeurs permettant de qualifier cette figure d'interférence : frange, interfrange, franges centrales et achromatique, contraste, ordre d'interférence; [71] p. 719-720. Dans ce cas simple (sans considération sur le moyen d'arriver à de telles sources), les franges sont dites non localisées car on peut les observer dans toute la zone de l'espace où les deux ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  se superposent.

---

**Transition :** On vient de réaliser l'étude théorique et on a vu qu'il y avait des conditions très restrictives à l'obtention des interférences en optique. Ces conditions strictes posent immédiatement la question de la réalisation expérimentale. On veut des sources cohérentes : la façon la plus simple de le faire est de dédoubler une source primaire (utiliser un miroir ou créer des sources secondaires).

---

## 2 Réalisation expérimentale

### 2.1 Obtention de franges rectilignes

[71], p. 733 intro historique sur l'expérience. Présenter l'interféromètre des trous d'Young comme un dispositif à division du front d'onde. Calculer la différence de marche entre les rayons dans cette situation et exprimer l'interfrange comme dans [51], p. 69. NB : dans le Murras il font le calcul en vectoriel. C'est pratique mais peut être qu'on voit mieux la physique en faisant vraiment des calculs de distance et des différence. Dans tous les cas il faut JUSTIFIER TOUS LES DL PAR DES ORDRES DE GRANDEUR SUR LA MANIP !

Expérience : On utilise des trous (fentes?) d'Young d'écartement connu avec précision éclairés par une fente source de largeur variable. La mesure de l'interfrange peut être faite, au choix, avec plusieurs bifentes pour vérifier l'influence de l'écartement, ou avec plusieurs filtres interférentiels pour vérifier la dépendance avec la longueur d'onde. cf. Polycopié de TP Montrouge *Interférences*.

On peut éventuellement avoir fait aussi le calcul de l'éclairement

### 2.2 Obtention des anneaux

Présenter l'interféromètre de Michelson comme un dispositif à division d'amplitude. Expliquer rapidement comment ce dispositif permet d'obtenir deux sources alignées. On ne fait pas de calcul (on étudiera cet interféromètre en détail plus tard, par exemple dans la leçon sur l'interférométrie à division d'amplitude) mais lier l'écartement entre les deux sources à la distance entre les miroirs que l'on peut faire varier en charriotant.

Expérience : On dispose d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air de sorte qu'on observe à l'écran les anneaux de la raie verte du Mercure.

**Transition :** si on écarte trop la source ou que l'on va trop loin, on perd en contraste, pourquoi? Notion de cohérence.

---

## 3 Effet d'un défaut de cohérence sur la figure d'interférence

### 3.1 Effet d'une perte de cohérence spatiale

[71], p. 744 - Visibilité des franges produites par deux sources ponctuelles. Revenir sur la formule du début pour montrer quel terme engendre la perte de cohérence. Diminution uniforme lorsque les sources s'éloignent. [slide](#) On somme les éclairissements des deux sources incohérentes, on trouve la visibilité.  $V = 0$  quand  $|\Delta p| = 1/2$ . Critère semi quantitatif de brouillage. Condition de visibilité des franges  $a < l_s$ .

Expérience : On peut écarter progressivement la fente source sur le dispositif des fentes d'Young pour voir le contraste s'annuler puis s'inverser. L'inversion est difficile à voir nettement, peut être qu'une caméra CCD pourra aider mais ça me semble difficile à mettre en place en leçon (jongler avec l'écran etc...). On peut la garder sous le coude et la mentionner pendant l'oral.

Problème de la perte de cohérence spatiale : ça limite violemment l'intensité qu'on peut envoyer sur l'écran. D'où l'intérêt des dispositifs à division d'amplitude qui permettent de s'affranchir de ce problème de cohérence.

### 3.2 Effet d'une perte de cohérence temporelle

[71], p. 752 - On a vu que des ondes de pulsations différentes ne peuvent pas interférer, que se passe-t-il si on prend un doublet de longueurs d'onde? On somme les éclaircissements : **slide**. Remonter à un critère sur la différence de marche et la longueur de cohérence de la source : expliquer la longueur de cohérence temporelle avec le modèle des trains d'ondes ([71] p. 698) (Le critère semi-quantitatif est aussi utilisé pour la cohérence temporelle, il sort du chapeau, mais le programme l'indique)

**Expérience : Charrioter les miroir pour écarter les sources et voir peu à peu la perte de contraste.**

Remarque : je vois trois méthodes pour traiter la cohérence temporelle à choisir en fonction du temps disponible :

- De manière graphique en superposant les figures d'interférence associées à chaque longueur d'onde pour montrer qu'au bout d'un moment ça fout le bazar
- De la même manière que le traitement de la cohérence spatiale, avec des  $\Delta p$ .
- En faisant le calcul, comme dans [51], p. 120.

Il faut enfin faire remarquer que certes on n'a plus de problème de cohérence spatiale, en revanche les franges sont localisées!

---

**Conclusion** : Les interférences à deux ondes sont utiles, elles nous ont permis de discuter des notions de cohérence temporelle et spatiale. Le dispositif étudié ici de division de front d'onde, permet de remonter à la longueur de cohérence spatiale de la source. On aurait pu discuter d'un autre dispositif : division d'amplitude avec le Michelson par exemple, qui permet de s'affranchir de la cohérence spatiale, au prix d'une localisation des interférences.

**BONUS :**

- 
- On aurait envie de faire l'interféromètre de Michelson dans les dispositifs mais le jury insiste sur l'importance de la cohérence dans cette leçon.
  - Réfléchir au moyennage du détecteur [74], p. 54.
  - Temps de réponse des détecteurs usuels : thermopile  $> 0,1$  s, photodiode  $1\mu\text{s}$ , œil  $1/20$  s.
  - Voir absolument le lien rigoureux entre champs électrique, intensité et éclaircissement dans [51], p. 36.





# LP n° 34 : Interférométrie à division d'amplitude

NIVEAU : CPGE (2E ANNÉE)

---

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Optique géométrique
- Interférences à 2 ondes
- Division du front d'onde
- Notion de cohérence

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Principe de la division d'amplitude
2. L'interféromètre de Michelson

3. Interférences à N ondes, la cavité Fabry-Pérot

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [58] J.-P. Pérez, *Optique. Fondements et applications* (7e édition)
- [51] D. Mauras, *Optique Physique et électronique*.
- [71] *Physique PC/PC\**, Dunod (2014)
- TD *Interférences* de C. Sayrin

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

---

**Introduction :** Les dispositifs de division du front d'onde présentent l'inconvénient d'être sensible à la perte de cohérence spatiale et contraignent les utilisateurs à limiter la taille de la source, donc irrémédiablement l'intensité lumineuse envoyée dans le dispositif.

Expérience : Dans le dispositif des fentes d'Young, élargir la source et observer la perte de contraste due à la perte de cohérence spatiale.

## 1 Principe de la division d'amplitude

### 1.1 Avantages et inconvénients de la division d'amplitude

Source ponctuelle implique interférences bien contrastée, partout dans l'espace, mais pour une source étendue, la division par front d'onde n'est pas optimale : la division d'amplitude est nécessaire : [51], p. 160 et [58], p. 292 - un train d'onde donne deux trains d'onde images. La surface des 2 fronts d'onde n'est pas modifiée mais l'intensité est divisée par deux (division énergétique).

Comme les 2 rayons qui interfèrent sont issus d'un même rayon incident, l'élargissement de la source n'altère pas les interférences. Franges localisée à l'intersection des couples rayons. Mentionner le théorème de localisation et voir la fiche de Thibierge à ce sujet : il existe une surface de contraste maximal, où les interférences sont dites « localisées » . Retenir que le chemin optique entre la source et le point M d'observation ne dépend pas du point O de départ sur la source!

### 1.2 Illustration sur une lame à faces parallèles

Voir TD de C. Sayrin et [58], p. 319 - Faire un schéma lame + source ponctuelle. Dessiner les sources secondaires et montrer les hyperboloïdes sur slide. On observe des anneaux dans cette configuration! Montrer qualitativement ce qu'il se passe si on étend progressivement la source. Brouillage des anneaux.

[58], p. 321 - Calcul (efficace!) de la différence de marche  $\delta = 2e \cos(i)$  qui ne dépend que de l'angle d'incidence (anneaux d'égale inclinaison ou anneaux d'Haidinger). La différence de marche ne dépendant que de l'angle si on envoie tout à l'infini c'est gagné!

---

**Transition :** Ce système de lame à face parallèle est un système permettant d'observer des interférences mais qui est totalement fixe : on ne peut jouer ni sur l'angle entre les lames, ni sur l'écartement entre elles, ni ajouter des objets sur le parcours de la lumière. On doit donc passer à un dispositif concret de division d'amplitude, permettant de mettre en application ces phénomènes et de réaliser des mesures extrêmement précises.

---

## 2 L'interféromètre de Michelson

Stipuler tout de suite que le réglage de l'interféromètre de Michelson sera étudié longuement en TP. Au cours de cette partie on peut d'ailleurs insister sur les éléments qu'il sera alors crucial d'avoir à l'esprit.

### 2.1 Présentation du dispositif

[71], p. 778 - **slide** schéma + présenter sur le vrai. Présentée la séparatrice qui permet la division d'amplitude et insister sur la nécessité d'une compensatrice. D'après [51], p. 86, présenter successivement les cheminements de la lumière le long des deux bras de l'interféromètre pour arriver à introduire les deux situations classiques de coin d'air et lame d'air. On peut remarquer (cf. slide) que dans le cas général ce qu'on voit sur l'écran est un couple quelconque des hyperboloïdes de révolution.

### 2.2 Configuration lame d'air

[71], p. 780 - (D'abord en source ponctuelle!) Explication du nom. Réduire le système à deux sources secondaires selon le schéma de [51], p. 91. C'est facile de calculer la différence de marche, on est dans le même cas que pour la lame à faces parallèles donc on obtient à nouveau des anneaux d'égal inclinaison. Décrire ce qu'il se passe dans le cas où on étend la source ([51], p. 158 et 161), nécessité de mettre une lentille en sortie pour projeter à l'infini. Localisation des franges.

Expérience : On peut écarter progressivement la fente source sur le dispositif des fentes d'Young pour voir le contraste s'annuler puis s'inverser. L'inversion est difficile à voir nettement, peut être qu'une caméra CCD pourra aider mais ça me semble difficile à mettre en place en leçon (jongler avec l'écran etc...). On peut la garder sous le coude et la mentionner pendant l'oral.

Décrire et mettre en œuvre les conditions d'éclairage et d'observation. Établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférence en fonction de l'épaisseur de la lame, l'angle d'incidence et la longueur d'onde. Mesurer l'écart  $\Delta\lambda$  d'un doublet et la longueur de cohérence d'une radiation. Interpréter les observations en lumière blanche.

lame d'air avec une lampe de sodium, conditions d'éclairage (choix du condenseur) et d'observation (à l'infini), contact optique, teinte plate, variation du nombre d'anneaux, avant, après. Alternance sombre/lumineux : interférence destr./constr. [51], p. 164 rayon des anneaux brillants. Effet de  $e$  sur les anneaux : plus on s'approche du contact optique plus le rayon des anneaux est grand.

Application : Exp : [51] p. 178 Mesure de l'écart des raies d'un doublet : sodium. Deux raies : deux systèmes d'anneaux, anti coïncidence : brouillage si brillant1 = sombre2.  $\Delta e = (\lambda_m^2)/2\Delta\lambda$  Transition : deuxième configuration ?

### 2.3 Configuration coin d'air

[71], p. 787 définition + **slide** + Schéma simplifié au tableau + localisation des franges. Avec le schéma des hyperboloïdes on comprend qu'on observe des franges rectilignes. Incidence normale :  $\delta = 2e(x) = 2\alpha x$ . Franges d'égal épaisseur localisées au voisinage du coin d'air. [1] p. 334 Trouver l'interfrange

Étude de la cohérence temporelle de la source : Exp : lampe QI + condenseur 15 cm proche du C.O, on doit voir quelques franges puis blanc d'ordre supérieur : apparition des cannelures.

Décrire et mettre en œuvre les conditions d'éclairage et d'observation. Admettre et utiliser l'expression de la différence de marche en fonction de l'épaisseur pour exprimer l'ordre d'interférences. Analyser un objet (miroir déformé, lame de phase introduite sur un des trajets, etc...). Interpréter les observations en lumière blanche.

Remarque : au programme, « l'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale »

**Conclusion :** En ouverture de cette leçon il faut insister sur les interférences à N ondes et l'interféromètre de Fabry-Pérot. Voire, si on a un peu de temps (ce qui serait étonnant) en évoquer le traitement. Voir le TD de C. Sayrin *Interférences*.

#### BONUS :

- La division du front d'onde correspond à une division géométrique, la division d'amplitude à une division énergétique.

# LP n° 35 : Diffraction de Fraunhofer

NIVEAU : LICENCE

---

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Optique géométrique
- Interférences
- Transformées de Fourier

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Le phénomène de diffraction
2. Illustrations sur quelques figures usuelles
3. Application au filtrage spatial

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [11] Optique et physique ondulatoire, Bertin-Faroux-Renault (1986)
- [51] Optique physique et électronique, D. Mauras [24] Ondes lumineuses, Champeau & Carpentier, de Boeck
- Polycopié d'optique de J. Leygnier
- TD de C. Sayrin, *Diffraction I & II*.

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

A priori cette leçon n'est pas l'occasion de présenter la diffraction depuis rien. De ce fait, je pense que la première doit être rapidement menée pour consacrer un temps conséquent aux propriétés et applications de la diffraction dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer.

---

**Introduction :** [11], p. 209 - Comme le faisceau est parallèle en sortie du laser, on obtient une tache de largeur  $a$  sur l'écran (ok optique géo). Quand on ferme la fente,  $a$  diminue : la tache sur l'écran s'élargit et on voit apparaître une tache centrale et des taches secondaires : DIFFRACTION. On est plus dans la limite de l'optique géométrique : on doit considérer l'aspect ondulatoire de la lumière. Avec quels principes expliquer ce phénomène?

Expérience : mise en défaut expérimentale de l'optique géométrique pour des diaphragmes de petite taille (laser + fente réglable + écran)

## 1 Le phénomène de diffraction

### 1.1 Approche par le principe d'Huygens-Fresnel

[11], p. 213 - Chaque point atteint par la lumière est une source secondaire. Ex : vagues qui arrivent sur une baie : l'état vibratoire en  $M$  est affecté par la présence du trou et ne dépend que des sources passant par ce trou. Idem, p. 215 - Énoncé du principe d'H-F pour ramener l'étude de la diffraction à un phénomène d'interférences. Expression mathématique? TD CS et [11] - Faire le schéma avec les 3 repères  $(x_0, y_0)$ ;  $(X, Y)$ ;  $(x, y)$ . Définir le facteur de transmission du diaphragme diffractant. Écrire l'état vibratoire au point  $M$ , sachant que les sources secondaires émettent une onde sphérique. Exprimer chacun des termes et arriver à la formule de diffraction de Fresnel.

Transition : On a trouvé l'expression mathématique du principe de H-F, quel est le lien avec la diffraction de Fraunhofer?

### 1.2 Diffraction dans l'approximation de Fraunhofer

TD CS p.2 (et [11] éventuellement) - Diffraction de Fraunhofer = diffraction de l'infini à l'infini = diffraction à l'infini d'une onde plane  $1/D = 0$  et  $1/d = 0$ , le terme quadratique est négligeable. On arrive à la formule de Fraunhofer et on reconnaît la transformée de Fourier du facteur de transmission.

Comment faire en pratique? [11], p. 224 - Montage au tableau, arriver au montage à une seule lentille avec le diaphragme accolé. La figure de diffraction est dans le plan de formation de l'image géométrique de la source de sorte que la diffraction est un phénomène qui accompagne la formation des images lorsqu'on diaphragme les faisceaux. —

**Transition :** On a maintenant tous les outils pour comprendre la diffraction, on va s'intéresser aux figures de quelques objets.

---

## 2 Illustration sur quelques figures usuelles

### 2.1 Diffraction par une fente rectangulaire

**slide** position du problème : diaphragme et fonction de transmittance. Voir TD de C. Sayrin et [58], p. 270 - On fait NAÏVEMENT le calcul au tableau en calculant l'intégrale de manière pédestre et sans utiliser la TF tout de suite. On aboutit à l'amplitude de la vibration lumineuse en tout point puis à l'intensité de l'onde lumineuse dans le plan de l'écran, au point M. Dessiner au tableau le sinus cardinal carré. Et chercher les annulations de la fonction pour obtenir la taille de la tache centrale notamment.

Expérience : En fait l'expérience de la diffraction par une fente. En préparation on peut avoir ajusté le profil sur CCD, montrer les résultats et éventuellement remonter à  $a$ . En tout cas on montre que la taille de la tache centrale est inversement proportionnelle à celle de la fente, et on peut même regarder la dépendance en  $\lambda$ .

Animation Gastebois si ça marche sur les ordi... (pas gagné) puis refaire le lien entre la figure de diffraction et la TF et l'énoncer comme une propriété générale... Que l'on va illustrer tout de suite!

### 2.2 Diffraction par un diaphragme circulaire

**slide** position du problème : diaphragme et sa fonction de transmittance. [24], p.172 - On calcule l'amplitude puis l'intensité de l'onde lumineuse dans le plan de l'écran, au point M mais cette fois en se servant de la transformée de Fourier. Introduire une longueur adimensionnée : variable de la fonction de Bessel, à dessiner au tableau. On cherche les annulations de la fonction : on a la taille de la tache centrale (84% de la luminosité totale) dite tache d'Airy, taille inversement proportionnelle à la taille du diaphragme. Animation Gastebois (toujours on supposant que ça fonctionne)...

Expérience : On peut remplacer la fente par un diaphragme circulaire de taille variable mais c'est plus compliqué...

### 2.3 Propriétés de la diffraction de Fraunhofer

Translation du diaphragme dans son plan ([58], p. 273) et/ou théorème de Babinet ([58], exercice 21-5, p. 279 et corrigé p. 651)? -> permettra de faire de la diffraction par des structures périodique mais pas l'objet de cette leçon.

---

**Transition** : Comment exploiter la diffraction pour modifier les images?

---

## 3 Applications de la diffraction au filtrage spatial

J'ai un souvenir que cette expérience (théorie et pratique) est bien décrite dans le livre de Thibierge [36].

### 3.1 Principe

[24], p. 401 - On a vu qu'une petite taille caractéristique de l'objet diffractant donnait une grande tache de diffraction. En fait il y a un lien : les fréquences spatiales (À DÉFINIR!!!). On observe la figure de diffraction dans le plan de Fourier. Un objet de hautes fréquences spatiales donne une figure de diffraction de basse fréquence spatiale dans le plan de Fourier. La répartition de l'éclairement dans le plan de Fraunhofer donne une illustration de la répartition des fréquences spatiales de l'objet. Modifier la figure de diffraction modifie les fréquences spatiales de l'objet et inversement.

### 3.2 Montage expérimental

Cf. TD de C. Sayrin *Diffraction II*.

Expérience : Monter l'expérience d'Abbe en laser ou en lumière blanche avec comme objet diffractant une grille.

Faire le schéma explicatif au tableau avec les TF directe et réciproque. Couper les fréquences avec une fente verticale, horizontale puis diagonale. Le réglage pour cette expérience doit être fait avec précision, et on préfère utiliser le montage à deux lentilles pour avoir de la place entre pour travailler. Propriétés à énoncer avec le **slide** :

- Intensité diffractée indépendante de la position du diaphragme dans son plan mais dépend de sa forme

- Toutes les fentes horizontales contribuent à la tache de diffraction verticale et inversement
- Détail étroit : figure large de diffraction.

---

**Conclusion :** on a défini la diffraction comme des interférences avec le principe d'HF, permettant d'obtenir un moyen facile d'expliquer les figures de diffraction de différents objets. Ce phénomène est important d'un point de vue théorique et pratique : la diffraction joue un rôle dans la formation des images et peut-être utilisée comme pour l'expérience d'Abbe. Pour aller plus loin dans l'utilisation, on peut penser à la strioscopie qui consiste à placer un objet de phase à la place du diaphragme. Cette méthode permet d'isoler dans une image des petits détails ou des variations d'indice comme lors de la compression de l'air ou d'autres fluides.

**BONUS :**

---

- Si on trouve que c'est trop de calcul alors faire l'approximation de Fraunhofer avant de commencer le calcul d'Huygens-Fresnel et arriver directement sur la formule de Fraunhofer.
- Bien relire tout le corrigé des TD de Clément Sayrin... Y compris pour les questions, notamment sur la diffraction de Fresnel.
- Si on a un diaphragme circulaire assez petit c'est mieux de faire l'expérience avec pour illustrer le II.2) car avec la fente on ne voit pas le croix de Mills, seulement une diffraction horizontale!
- On a diffraction aussi avec les lentilles car ce sont des diaphragmes circulaires : on voit la tâche d'Airy de la lentille en fait. Cela pose des problèmes en astronomie pour la distinction des tâches, et en microscopie : ouverture numérique limitant.



# LP n° 36 : Diffraction par des structures périodiques.

NIVEAU : LICENCE 3

## PRÉREQUIS :

- Diffraction de Fraunhofer (TF, diffraction par une fente, théorème de Babinet)
- Physique du solide (réseau de Bravais, réseau réciproque)

## PLAN :

1. Intensité diffractée par une structure périodique
2. Étude de la source
3. Étude de la structure diffractante

## BIBLIOGRAPHIE :

- [11] *Optique et physique ondulatoire*, Bertin-Faroux-Renault
- [58] *Optique. Fondements et applications*, J.-P. Pérez (7ème édition)
- [2] *Physique du solide*, Ashcroft
- [51] *Optique physique et électronique*, D. Mauras
- [44] Houard

## IDÉES À FAIRE PASSER :

**Introduction :** Dans cette leçon, on va combiner deux phénomènes de l'optique ondulatoire : la diffraction, bien sûr, que l'on se bornera à traiter dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, et les interférences à N ondes. On prendra aussi soin d'étendre cette étude à d'autres domaines du spectre électromagnétique. On commence d'ailleurs par rappeler le montage de Fraunhofer et les notations sur slide.

## 1 Intensité diffractée par une structure composée

Cette partie est importante à mon sens pour comprendre pourquoi tout se passe aussi bien dans la diffraction par des structures périodiques, et aussi pourquoi on a besoin de cette périodicité. Cela dit, elle fait une bonne introduction mais ne doit pas devenir le corps de la leçon.

### 1.1 Translation de la pupille dans son plan

[51], p. 260 - On regarde (voir slide) l'effet d'une translation de la pupille dans son plan sur la figure de diffraction. Il faut adopter des notations compréhensibles mais pratique pour faire le calcul, notamment souligner les grandeurs complexes :

$$\begin{aligned} s_B(M, t) &= \tilde{t}_B(X', Y') \left[ \frac{x}{\lambda D}, \frac{y}{\lambda D} \right] = \tilde{t}_A(X' - \vec{T} \cdot \vec{e}_x, Y' - \vec{T} \cdot \vec{e}_y) \left[ \frac{x}{\lambda D}, \frac{y}{\lambda D} \right] \\ &= \tilde{t}_A(X, Y) \left[ \frac{x}{\lambda D}, \frac{y}{\lambda D} \right] \exp \left( \frac{2i\pi}{\lambda D} (\vec{T} \cdot \vec{e}_x x + \vec{T} \cdot \vec{e}_y y) \right) = s_A(M, t) \exp(i \vec{T} \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k})) \end{aligned}$$

Donc la translation modifie simplement la figure la vibration en M d'un facteur de phase de sorte que l'intensité, elle, n'est pas modifiée :  $I_B(M, t) = I_A(M, t)$

### 1.2 Pupilles composées

Voir [51], p. 267 - On dispose N pupilles obtenues par translation à partir d'une pupille centrale sans recouvrement. La pupille  $p$  est obtenue par translation de vecteur  $\vec{T}_p$ . On exprime alors la vibration sur un point M de l'écran due à la pupille  $p$ , les sources secondaires étant cohérentes toutes ces vibrations se somment et on obtient

$$I(M) = I_0(M) \left| \sum_{p=0}^{N-1} e^{i\varphi_p} \right|^2$$

où  $\varphi_p = \vec{T}_p \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k})$ . On factorise correctement et si N grand on voit qu'un répartition aléatoire des pupilles entraîne l'annulation du terme d'interférence et  $I(M) = NI_0(M)$ .

### 1.3 Cas de N pupilles répartie régulièrement

Voir [51], p. 268 - On prolonge le calcul en se servant de la relation de récurrence sur les phases et on factorise par l'angle moitié pour voir apparaître les sinus. On écrit alors

$$I(M) = I_0(M) \frac{\sin(N\varphi/2)^2}{\sin(\varphi/2)^2}$$

Le terme  $I_0$  apparaît comme le facteur de forme (il ne dépend que de la forme de la pupille originelle) et le rapport des sinus apparaît comme le facteur de structure qui dépend de la répartition des pupilles dans l'espace.

Simplifier l'expression de  $\varphi$  aux petits angles et avec la source sur l'axe :  $\varphi = 2\pi ax/\lambda f'$ .

---

**Transition :** On voit donc apparaître deux aspects majeurs : d'une part la figure de diffraction dépend de  $\lambda$ , comme attendu, de sorte qu'on va pouvoir rendre cette structure efficace pour disperser les longueurs d'onde et acquérir des informations sur la source (c'est l'objet de la prochaine partie). D'autre part, l'intensité dépend de la structure de l'objet diffractant de sorte qu'on va aussi pouvoir, connaissant la source, obtenir des informations sur la géométrie de l'objet (c'est l'objet de la troisième partie).

---

## 2 Étude spectrale de la source

### 2.1 Le réseau

Voir [51], p. 271 - Réseau de fente d'épaisseur  $d$  et distantes de  $a$ . On connaît la figure de diffraction pour une fente donc on peut exprimer l'intensité totale. Supposer que la source est sur l'axe donc  $X_0 = 0$ . Jouer avec la simulation python associée.

Trouver la position du pic principal ( $\varphi = 2p\pi$ ) et la largeur de ce pic ( $\delta\varphi = 2\pi/N(p+1)$ ). Faire au tableau un graphe de l'influence des paramètres en dessinant côte-à-côte le réseau et les trois dimensions  $a$ ,  $d$  et  $N$  et la figure de diffraction à main levée en faisant apparaître  $1/a$ ,  $1/d$  et  $1/Na$ .

La dépendance de la position des pics avec  $\lambda$  permet de faire de la spectrométrie.

### 2.2 Propriétés des réseau

On étudie deux raies  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ .

- Dispersion angulaire : on cherche l'angle  $\theta$  pour chacune des raies et on exprime  $d\theta/d\lambda = p/a \cos(\theta)$  donc on a intérêt à regarder à un ordre important (surtout pas  $p = 0$  car ça devient linéaire!) et a le plus petit possible.
- Pouvoir de résolution : Entre les pics principaux associés à chaque raie on a  $\Delta_1 \sin(\theta_p) = pd\lambda/a$  et entre les pics et le premier minimum on a la largeur de pic  $\Delta_2 \sin(\theta_p) 2\pi a/\lambda = 2\pi/N$  et on peut le premier plus grand que le second donc la limite de résolution est  $\lambda/d\lambda = pN$

AN : pour  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $N = 1000 \text{ trait/mm} \times 250 \text{ mm}$  et  $p \leq 2$  (pour avoir de l'intensité). Quel  $a$  pour résoudre le doublet jaune du sodium?

---

**Transition :** Enfin, comment peut-on utiliser cette technique pour acquérir des notions sur la structure de l'objet?

---

## 3 Étude de la structure diffractante

Cette partie est bien décrite dans le début du Ashcroft.

### 3.1 Diffraction pas une structure périodique 3D

Réseau de Bravais :  $\vec{T}_{pqr} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ . Ça diffracte par Babinet. De plus vu la taille de la pupille (atome, de l'ordre de l'angström) il faut des rayons X! Alors l'intensité est max si  $\vec{k}$  et  $\vec{k}_0$  sont tels que quelque soit  $p, q, r$  on a  $\vec{T}_{pqr} \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k}) = 2\pi n$  c'est à dire que  $\vec{K} = \vec{k}_0 - \vec{k}$  appartient au réseau réciproque. C'est ultra restrictif!



### 3.2 Réalisation expérimentale

Trois solutions : varier  $\lambda$  pour avoir un faisceau polychromatique et voir quelle « couleur » ressort où, tourner le solide pour faire varier  $\vec{k}_0$  ou encore mettre une poudre.

---

**Conclusion :**

**BONUS :** \_\_\_\_\_

-



# LP n° 37 : Absorption et émission de la lumière.

**NIVEAU :** CPGE

On cantonne cette leçon à l'adhérence du programme de PC.

**PRÉREQUIS :**

- Optique géométrique et ondulatoire
- Notion de photon
- Rayonnement du corps noir
- Mécanique quantique de première année
- Distribution de Maxwell Boltzmann

**PLAN :**

1. Absorption et émission spontanée

2. De l'importance de l'émission stimulée
3. Application au laser

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [20] Physique atomique, Cagnac (tome 1)
- [35] Tout-en-un PC/PC\*, Dunod (2014)
- [74] R. Taillet, Optique physique.
- BUP n°679 sur *Du pompage optique à la spectroscopie laser*

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

**Introduction :** Historique, avec la quantification et les travaux d'Einstein et Planck, voir [71], p. 1061. L'interaction est quantifiée et on va s'intéresser à décrire les processus d'interaction et aux manières de jouer sur les uns ou les autres.

## 1 Absorption et émission spontanées

### 1.1 Description du milieu matériel

[71], p. 1064 - Échange d'énergie entre le rayonnement (pour le moment monochromatique, fréquence  $\nu$ ) et un atome, une molécule, un ion... On s'intéresse ici aux résonances optiques, c'est-à-dire aux transitions entre deux niveaux d'énergie, cf. [20], p. 81.

### 1.2 Probabilité d'absorption et d'émission

La seule prévision possible est de nature statistique ([20], p. 81). Décrire d'abord l'absorption, sans section efficace et pour un rayonnement monochromatique depuis [20], p. 88 en définissant  $B_{12}$ . Expliquer ensuite pourquoi il peut y avoir émission spontanée (c'est pas trivial du point de vue de la méca Q l'état excité est un état stationnaire et on a pas de raison d'en sortir!), voir [20], p. 93 pour la description et définir à son tour  $A_{21}$ , donner la loi exponentielle décroissante et l'ordre de grandeur ( $A_{21} \approx 800 \text{ s}^{-1}$ ). Voir aussi [71], p. 1067. Donner au passage les dimension des taux d'émission et d'absorption.

Passer alors à une description polychromatique en suivant [20], p. 89.

### 1.3 Largeur de raie

Discuter la largeur de raie liée à Heisenberg (cf. [35], p. 1068) et celle liée à l'élargissement pas effet Doppler (cf. [20], p. 24). On peut évoquer les méthode de mesure de ces profil par interférométrie à division d'amplitude. Voir aussi [71], p. 1068.

**Transition :**

## 2 De l'importance de l'émission induite

### 2.1 Émission stimulée et bilan de population

[20], p. 100 et [71], p. 1066 - Hypothèse d'Einstein, expression de  $B_{21}$  et surtout **propriétés du photon émis**. Bilan de population et lien entre les trois coefficient  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  et  $B_{12}$ .

## 2.2 Équilibre avec le rayonnement

Si les atomes sont en équilibre avec le rayonnement il faut que la densité spectrale d'énergie coïncide avec celle de Planck (cf. [71], p. 1071). On trouve les relations entre les trois coefficients qui valide l'hypothèse d'émission induite.

---

**Transition :**

---

## 3 Application au laser

Sur cette partie, si on pas le temps le jour de bien la préparer, on peut suivre sur le Dunod et garder ce qu'on a sous le pied pour les questions.

### 3.1 Principe du Laser

[42], Comparaison à une lampe spectrale : le laser est monochromatique, directif, cohérent. [42] et [74], Expliquer le principe d'un laser, en dégageant le rôle de la cavité. Nécessité de l'inversion de population et du pompage. Voir aussi (peut-être plus clair pour commencer) [71], pp. 1073 et 1088.

Remarque : On peut faire le bilan de façon plus qualitative. Lors de la traversée du milieu, la variation du nombre de photons du faisceau s'écrit (bilan sur l'ensemble du milieu pendant  $dt$ ) :

$$dN_{photons} = -dN_2^{stim} - dN_2^{abs} = B_{12}u(\nu_{12})(N_2 - N_1)dt$$

On voit alors que l'inversion de population est indispensable pour que le nombre de photons du faisceau augmente. L'émission spontanée n'est pas prise en compte dans ce bilan car le caractère aléatoire de la direction d'émission fait que la majorité des photons d'émission spontanée n'appartiennent pas au faisceau (directionnel) auquel on s'intéresse.

### 3.2 Laser à trois niveaux

[42], p. 19 ou plutôt [20], p. 116 - Mener le calcul pour montrer la possibilité d'une inversion de population. Mentionner les cas deux niveaux et quatre niveaux.

### 3.3 Largeur spectrale

[74], La cavité Fabry-Pérot affine le spectre en sélectionnant seulement certaines fréquences. Voir à partir de la page 298.

---

**Conclusion :**

**BONUS :**

---

- Il y a toute une partie sur le Laser dans le Taillet qui peut permettre de répondre à pas mal de question.
- Remarque sur quelques points important pour le traitement du Laser :
  - Un laser est directif, monochromatique et cohérent spatialement. En revanche, il n'est pas a priori plus puissant qu'une source classique mais plus intense (la puissance est concentrée sur une plus petite surface).
  - Un laser est la combinaison d'un milieu amplificateur, permettant d'amplifier le faisceau par émission stimulée, et d'une cavité optique qui permet de sélectionner parmi tous les photons potentiellement amplifiables ceux qui le seront effectivement.
  - Un laser démarre toujours par un photon d'émission spontanée. Pour que celui-ci puisse être amplifié de façon significative, il faut : qu'il puisse engendrer d'autres photons par émission stimulée avant d'être absorbé (ce qui revient à dire que sa fréquence doit correspondre à une transition dont les populations sont inversées) et qu'il fasse beaucoup d'aller-retours dans la cavité, i.e. que son vecteur d'onde corresponde à un vecteur d'onde de mode propre de la cavité (condition sur la direction et sur la fréquence du photon). Ainsi le milieu amplificateur et la cavité sont tous les deux indispensables au fonctionnement du laser, c'est un point très important à ne pas oublier. On a trop souvent tendance à réduire le laser à l'émission stimulée. L'énergie nécessaire à l'inversion de population est elle apportée par un dispositif de pompage.
  - Dans la pratique, la raie atomique a une largeur non nulle (1,5 GHz pour un laser He-Ne de montage), pour beaucoup due à des effets thermiques. Elle est a priori plus grande que la largeur de la résonance de la cavité (40 MHz pour le même laser). La cavité va donc permettre d'augmenter la cohérence temporelle du faisceau. Néanmoins, la présence de plusieurs modes résonants de la cavité dans la largeur de la raie d'émission limite souvent cet affinement du profil spectral.

- Enfin la cohérence spatiale du faisceau s'explique par le fait que la direction de propagation des photons n'est en général pas exactement l'axe de la cavité. Après un tour, c'est un point différent du miroir qui est atteint, mais avec une relation de phase bien déterminée, simplement due à la propagation dans la cavité.
- La variété d'ordres de grandeurs de  $A_{21}$  s'explique par les règles de sélection de la physique atomique. La relaxation d'un atome par émission d'un photon n'obéit pas qu'à une conservation de l'énergie, mais aussi à une conservation de la parité et des moments cinétiques orbital et de spin. Les transitions vérifiant ces lois de conservation sont dites permises et se font très rapidement, alors que celles qui ne les vérifient pas sont dites interdites et se font à des taux beaucoup plus faibles.
- La longueur de la cavité laser joue sur la séparation entre ses différents modes. Plus la cavité est grande, plus ses modes sont rapprochés, et donc plus la raie laser contiendra de modes. Il existe des solutions technologiques pour diminuer le nombre de modes du laser autrement qu'en jouant sur la taille de la cavité. Notons en particulier l'ajout d'un réseau de diffraction à l'intérieur de la cavité d'une diode laser qui permet de sélectionner certains modes seulement.
- Un peu de culture technologique sur les lasers pourrait s'avérer utile, ne pas hésiter aller faire un tour sur Wikipédia pour avoir quelques idées.



# LP n° 38 : Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.

## NIVEAU : LICENCE

Cette leçon présente la difficulté qu'on ne peut pas vraiment faire de démonstration rigoureuse (puisque cela nécessiterait l'électrodynamique quantique) des résultats qu'on avance. Ainsi, plus encore que dans les autres leçons, on doit savoir à tout moment d'où on part et où on souhaite aller. Les choix et les partis pris doivent donc être explicités avec un soin particulier, notamment lors des raisonnements utilisant l'électromagnétisme classique.

## PRÉREQUIS :

- Rayonnement thermique du corps noir
- Notions élémentaires de relativité restreinte
- Électromagnétisme classique

## PLAN :

1. Caractère corpusculaire du rayonnement
2. Caractéristiques du photon
3. Expériences modernes du corpuscule

## BIBLIOGRAPHIE :

- BUP n°679, pp. 327 et suivantes sur l'introduction de la constante d'action  $h$  par Planck.
- [3] Aslangul, volume I
- [20] Cagnac, volume I (édition récente)
- [45] C. Kittel, *Physique de l'état solide*
- Polycopié de cours de J. Hare

## IDÉES À FAIRE PASSER :

Il faut déjà correctement traiter l'aspect historique : quels sont les résultats qui posent problème à la fin du XIXe, comment les physiciens de l'époque y répondent, en quoi cela nécessite-t-il d'introduire un quanta d'énergie? Ensuite on s'intéresse au photon en tant que particule en présentant ses caractéristiques. Enfin on présente une expérience plus moderne apportant preuve expérimentale de son existence.

**Introduction :** L'aspect corpusculaire du rayonnement et la notion de photon sont aujourd'hui bien connus du grand public, de sorte que si on demande à un non-initié : « qu'est-ce que la lumière? » Il répondra probablement « photon ». Pourtant, cette vision n'a pas toujours été aussi tranchée et a donné moult fil à retordre aux physiciens du XXe siècle. L'objet de cette leçon sera...

## 1 Caractère corpusculaire du rayonnement

### 1.1 Le rayonnement du corps noir

Les lois empiriques de Wien (aux courtes longueurs d'onde) et de Rayleigh-Jeans (aux grandes longueurs d'onde) sont corrigées par Planck en 1900. A ce sujet, on peut lire le BUP n°679, pp. 327 et suivantes. On se moque tout à fait de la partie sur le rayonnement en tant que tel, et des calculs. Ce qu'il est intéressant de signaler c'est l'interprétation en quanta de l'hypothèse de calcul, et le fait que Planck travaillait en fait sur l'interaction rayonnement-matière. On peut aussi lire avantageusement les pages 3 à 5 du cagnac 1 [20].

### 1.2 Introduction à l'effet photoélectrique

Voir [20], pp. 5-7. Voir aussi (surtout?) [3], pp. 117-120. Dans cette partie on ne fait que l'expérience. L'interprétation est dans la partie d'après.

**Expérience :** Faire l'expérience de l'effet photoélectrique avec une quartz-iode, les filtres interférentiels sur roue, la cellule photoélectrique et un électromètre (très grande impédance d'entrée = courant quasi nul!). Relevé  $V_0$  en fonction de la fréquence  $\nu$ . Montrer que la tension croît en fonction de la fréquence, et qu'elle ne dépend pas de la puissance du flux lumineux (avec des polariseurs?).

### 1.3 Interprétation de l'effet en terme de quanta

Présenter la position des électrons dans le métal (sans entrer dans les détails de la mer de Fermi etc...) - Voir [3], p. 120 pour le résumer, et le Kittel [45] pour les détails en préparation aux questions. Introduction du travail de sortie,

le potentiel de sortie. Bilan d'énergie avant/après absorption du photon par l'électron et formule fondamentale de l'effet photo-électrique dans [3], p. 122.

On explique alors l'existence du seuil, de la contre-tension - on détermine la pente de  $V$  en fonction de  $\nu$  qui donne un moyen de mesurer la constante de Planck.

---

**Transition :** En conclusion de cette partie, on postule qu'une onde électromagnétique se décrit comme un paquet de particules appelées photons, chaque photon transportant une énergie  $E = h\nu$ .

---

## 2 Caractéristique du photon

*Remarque : cette partie est délicate à présenter, car on ne peut y faire aucune démonstration rigoureuse. Au mieux, on y établit des conditions pour que la notion de photon ne soit pas contradictoire avec l'électromagnétisme et la relativité. Il faut donc être extrêmement clair sur ce qu'on suppose et ce qu'on déduit. Voir pour cette partie le sujet de composition (et corrigé) de 2001. Aussi le Cagnac et le Aslangul aux pages indiquées.*

### 2.1 Énergie et masse

On vient de montrer que  $E = h\nu$ , on admet la généralité de ce résultat. Voir [3], p. 127-128 pour l'annulation de la masse. Un autre argument consiste à éviter la divergence de l'énergie. Aucun des deux n'est vraiment une preuve du résultat.

### 2.2 Quantité de mouvement

Rappeler le résultat classique de la pression de radiation. Interprétation en terme de corpuscule. Quantité de mouvement du photon. Voir une référence d'électromagnétisme.

Interprétation de l'effet Compton. Voir [20], p. 56.

### 2.3 Moment cinétique et spin

A partir de l'action exercée par le photon sur une lame quart-d'onde. Présenter l'expérience de Beth in [20], p. 310-313 et aboutir au moment cinétique  $L_z = E/\omega = \hbar$  donc au spin 1.

---

**Transition :** On a conscience de pas avoir de démonstration jusque là. On va donc finir en présentant une expérience moderne apportant la preuve de l'existence du photon et de son insécabilité.

---

## 3 L'expérience de Gangier et al.

Voir article. Il faut décrire le dispositif expérimental en détail (pas forcément utile de parler des portes logiques etc...) puis donner bien distinctement les résultats attendus dans le cas classique de comportement ondulatoire (ajuster les prérequis en conséquence) et dans le cas quantique de comportement corpusculaire. Montrer la courbe obtenue expérimentalement et trancher. D'ailleurs, on a pas du tout besoin de rentrer en détail dans le calcul quantique puisque la classique prévoit un résultat supérieur à 1 qui n'est de toute évidence pas obtenu (c'est pas juste une différence le puissance sur une loi d'échelle quoi...).

On peut ensuite (selon le temps) s'attaquer à l'interféromètre de Mach-Zender (dont le principe peut être supposé connu et rapidement rappelé) pour voir les interférences du point de vue corpusculaire et réconcilier les deux visions du rayonnement.

---

**Conclusion :** On a rien démontré si ce n'est l'existence d'un corpuscule insécable!

**BONUS :**

---

1. Lire la correction de Thibierge (joint), ça peut être instructif.
2. Le poly de J. Hare, que je n'avais pas pensé à utiliser à l'époque, peut s'avérer utile aussi.



# LP n° 39 : Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.

**NIVEAU :** \_\_\_\_\_

CPGE

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Aspect corpusculaire du rayonnement
- Diffraction par une fente, par une structure périodique
- Physique des ondes : paquet d'onde, dispersion
- Notions de physique du solide

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Onde associée à une particule
2. Formalisme de l'onde de probabilité

3. Dynamique de la fonction d'onde

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [27] Cohen, tome 1
- [71] Tout-en-un PC/PC\*, nouveau programme
- [20] Cagnac, Tome 1
- [48] Supermanuel de Physique, S. Komilikis et J. Majou
- Cours de J. Hare si besoin

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

La suite logique de la leçon précédente ayant porté sur le photon et l'aspect corpusculaire de la lumière est de se demander si, réciproquement, la matière ne manifesterait pas un caractère ondulatoire. C'est effectivement le cas mais son observation demande des conditions très restrictives.

**Introduction :** L'aspect ondulatoire de la matière est la réciproque logique à l'aspect corpusculaire de la lumière. Logique pour nous, mais pas forcément au début du siècle dernier. Situer le contexte : découverte de la première particule élémentaire, l'électron, par Thomson en 1897 (Nobel 1906)... Quelle est cette onde? Comment la mettre en évidence? Quel formalisme pour la décrire?

## 1 Onde associée à une particule

### 1.1 Une question de longueur...

[48], p. 136 - Autour de 1900 on cherche à expliquer la loi de Wien : il s'agit d'établir la longueur d'onde maximale d'émission par un corps à température  $T$ . On injecte les constantes connues du rayonnement ( $T$ ,  $c$ , et  $k_B$ ) pour faire une longueur mais pas moyen (homogénéité...). Cette problématique invite les physiciens à ajouter une nouvelle constante  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Js, constante de Planck, pour résoudre la loi :

$$\varphi_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/k_B \lambda T) - 1}$$

-> mieux : exprimer  $\lambda_{max}$ .

Idée de de Broglie : si on associe une onde à la matière, elle a une longueur d'onde nécessairement de l'ordre de

$$\lambda_{DB} = h/mv$$

**slide :** Tableau de valeurs de  $\lambda_{DB}$  pour différents objets, issues de [48], p. 138.

### 1.2 Mise en évidence expérimentale

Voir manip de diffraction des électrons ENSP3068 et N.304 - Quelles contraintes pour l'observation? Créer des « fentes » assez fines + accélérer les particules + être capable de les détecter. Introduire l'expérience de Davisson et Germer (voir [48], p. 139). Faire l'expérience de diffraction des électrons :

Expérience : Diffraction des électrons par une poudre de graphène. Remonter à  $\lambda_{DB}$  et comparer à  $h/mv = 1,7 \times 10^{-11}$  m.

Manipulations plus récentes mettant en évidence le caractère ondulatoire de la matière (interférences notamment).

---

**Transition :** Une question qui se pose alors légitimement est celle de la trajectoire empruntée par les particules et de la description / interprétation de la dynamique du mouvement. Quel formalisme doit on nouvellement adopté?

---

## 2 Formalisme de l'onde de probabilité

### 2.1 Notion de fonction d'onde

Voir [27], p. 19 et [48], p. 143 et photocopié de J. Hare - Historique de la fonction d'onde (Born, 1926).

- Contient toutes les informations sur le comportement de la particule
- Amplitude de l'onde de matière définie par de Broglie
- Fonction continue, infiniment dérivable et de carré sommable
- Fonction complexe, amplitude de probabilité de détection de la particule au point M à l'instant t :  $\delta P = |\Psi(M, t)|^2 \delta \tau$ . Normalisation.
- Résultat physique non affecté par un facteur de phase global.

### 2.2 Interprétation probabiliste

[71], p. 1174 pour l'interprétation et [48], p. 144 pour le rôle de la mesure.

---

**Transition :** De la même manière qu'on a le pfd pour les grandeurs accélération etc, est-ce qu'on a une équation dynamique pour la fonction d'onde?

---

## 3 Dynamique de la fonction d'onde

### 3.1 Équation de Schrödinger

[71], p. 1175 et [27], p. 21 - Énoncé de l'équation (Schrödinger, 1925) et commentaire : présence attendue de  $\hbar$ , premier ordre en temps : si  $\psi$  est connue à  $t_0$  elle est connue pour tout  $t$ , définition de  $V$  à une constante près se traduit en un terme de phase dans la solution, équation linéaire donc principe de superposition ok. Donner une interprétation des différents termes.

### 3.2 Solution en onde plane

[27], p. 22 - Equation pour une particule libre, équation de diffusion complexe, solution en onde plane et relation de dispersion : probabilité uniforme donc position inconnue mais quantité de mouvement parfaitement déterminé... Pas de carré sommable donc en fait pas une forme satisfaisante pour décrire la physique : il faut sommer les ondes planes!

Remarque sur l'onde plane : quantité de mouvement parfaitement connue, mais la position de la particule est absolument indéterminée : elle a la même probabilité d'être en tout point de l'espace. Comment en électromagnétisme l'onde plane n'a pas de sens physique, c'est un outil pour la résolution.

### 3.3 Description et dynamique d'une particule libre

[71], p. 1202 - Parallèle avec l'électromag : l'onde physique est en fait un paquet d'onde. On peut le voir en terme d'interférences. Si on somme des ondes planes on localise la particule. Le prix à payer c'est qu'on doit sommer des ondes planes de nombres d'onde différents donc on perd de l'information sur la quantité de mouvement. Dynamique du paquet d'onde en injectant la relation de dispersion dans l'intégrale. Au premier ordre on a dispersion et vitesse de groupe, au second on aurait déformation (ne pas le faire ici). Faire par contre le graphe pour voir ce qui se passe sur la fonction d'onde lorsqu'on somme de plus en plus d'onde plane à des fréquences légèrement différentes (au tableau) - On a alors une sorte d'indétermination qui apparaît : si on veut localiser la particule il faut sommer plus d'ondes planes donc on perd de l'information sur la quantité de mouvement et vice-versa.

### 3.4 Principe d'indétermination quantique

Voir [71], p. 1179 - Les observables associées à un système donné ne sont connues qu'en terme de probabilité via leur interaction avec la mesure. On s'intéresse à quantifier  $\langle A \rangle$ , valeur moyenne de  $A$ , et  $\Delta A$ , écart-type. Comme on l'a vu avec le paquet d'onde on ne peut connaître précisément la position et le moment : améliorer la connaissance de la position implique de sommer plus d'ondes planes, donc d'élargir la distribution de la quantité de mouvement. Cela se traduit par une inégalité de Heisenberg :  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

Interprétation de la diffraction en terme d'inégalité de Heisenberg (voir cours de S. Komilikis). Critère de validité de la mécanique classique en terme de trajectoire. (l'un et l'autre, ou au choix selon le temps).

---

**Conclusion :** On a mis en exergue le caractère ondulatoire de la matière, réciproque inhabituelles au caractère corpusculaire de la lumière. On a surtout développé le formalisme pour décrire cette aspect des particules et vu ce que cela allait engendrer sur la dynamique. Pour autant la mécanique classique ne doit pas être complètement invalidée : le caractère ondulatoire n'étant appréciable que pour de très petits et lents objets.



# LP n° 40 : Confinement d'une particule et quantification de l'énergie.

NIVEAU : CPGE \_\_\_\_\_

On traite cette leçon au niveau PC.

PRÉREQUIS : \_\_\_\_\_

- Corps noir
- Inégalités de Heisenberg
- Fonction d'onde
- Équation de Shrodinger

PLAN : \_\_\_\_\_

1. La quantification de l'énergie à l'origine de la mécanique quantique

2. Approche quantique du confinement

3. Étude des puits

BIBLIOGRAPHIE : \_\_\_\_\_

- [27] Cohen, tome 1
- [71] Tout-en-un PC/PC\*, nouveau programme (2014)
- [3] *Mécanique quantique, Tome 1*, C. Aslangul
- Cours de J. Hare si besoin, et de S. Komilikis

IDÉES À FAIRE PASSER : \_\_\_\_\_

**Introduction :** On connaît le spectre du corps noir dont la modélisation a été réalisée de manière satisfaisante par Planck. Si on étudie le spectre d'un corps noir quelconque on s'attend donc à obtenir : PWP. Cependant si on observe le spectre du soleil PWP on constate qu'il y a des bandes noires : elles correspondent aux raies d'absorption de l'atome d'hydrogène. Ces raies permettent de prouver l'existence de la quantification des niveaux d'énergies. En effet les éléments contenus dans l'atmosphère du soleil n'absorbent que des fréquences bien précises. Qu'est ce qui peut impliquer cette quantification de l'énergie? On va s'intéresser au confinement des particules c'est-à-dire à la limite de leur extension spatiale dans un puits de potentiel.

## 1 La quantification de l'énergie à l'origine de la mécanique quantique

### 1.1 Interrogations expérimentales

Une des premières interrogations repose sur l'interprétation des raies d'émission / d'absorption observées dans les spectres de certaines lampes (cf. expérience) mais aussi dans le spectre du soleil (dus à l'absorption du rayonnement par les éléments environnant le soleil, et les éléments de l'atmosphère).

**Expérience :** Observer le spectre d'une lampe à vapeur de sodium à travers un PVD et/ou déterminer le Rydberg à partir du spectre de la Balmer au spectro USB ou au goniomètre.

Voir le poly de J. Hare, p. 14 sur l'expérience de Franck et Hertz de 1914. Comment expliquer ces phénomènes? Rapidement on comprend que ces raies résultent de l'interaction entre le rayonnement (photon) et les électrons de l'atome mais on ne comprend pas leur discrétisation.

### 1.2 Explication semi-classique par Bohr

Pour la description du modèle, voir l'appendice 5 (p. 351) du Mécanique 1, J.-P. Faroux [34]. Voir le poly de J. Hare, p. 21 pour la puissance du modèle. Et voir enfin la critique de ce modèle dans [27], p. 802; il faut notamment insister sur le non-sens quantique de la notion de trajectoire (invoker les inégalités de Heisenberg).

**Transition :** Le modèle de Bohr, s'il constitue une approche simpliste du problème de l'atome d'hydrogène, permet de comprendre que la quantification de l'énergie viendrait, a priori, des conditions imposées à l'électron donc en particulier à son confinement à une région restreinte de l'espace.

## 2 Approche quantique du confinement

### 2.1 Exemples de particules confinées

[71], p. 1232 - En physique les objets étudiés sont souvent piégés dans un volume délimité. Exemple des molécules d'une phase gazeuse contenue dans un récipient clos, les électrons de conduction dans un échantillon de conducteur. Aujourd'hui on peut même confiner des électrons dans des boîtes quantiques nanométriques. On peut aussi mentionner des confinement plus « doux » type interaction attractive entre, justement, les électrons et le noyau. Dessiner la forme générale du potentiel de Lennard-Jones.

### 2.2 Énergie de confinement

Cours de SK, p. 14-15 & [71], p. 1188 - Par les inégalités de Heisenberg, la particule confinée n'est pas au repos et est donc associée à une énergie non nulle. Elle a une extension spatiale  $\Delta x$ , reliée à l'inégalité d'Heisenberg. Donner l'inégalité et faire le calcul pour aboutir à l'existence d'une énergie minimale d'autant plus élevée que la taille du confinement est petite. OdG des énergies de confinement. Pour l'instant on a trouvé une énergie minimale, on comprend donc qu'il existe une quantification mais nous ne voyons pas apparaître clairement les différents niveaux d'énergies : en effet l'énergie est liée à la fonction d'onde de la particule et il faut en décrire plus précisément le comportement.

Remarque : L'utilisation à ce stade des inégalité de Heisenberg et l'introduction de la fonction d'onde dans cette transition justifient le titre de la partie d'approche « quantique ».

### 2.3 Modélisation du potentiel de confinement

[71], p.1232 - Situation modèle : puits de potentiel infiniment profond + 2 conditions du puits infini sur la largeur et l'énergie. Donner le potentiel  $V(x)$ . Découper le système en trois régions. On comprend que la particule ne pourra être que dans la zone II, dans les autres zones on a  $|\Psi|^2 = 0$ . L'équation qui régit l'évolution de la particule dans ce puits est l'équation de Schrödinger [71], p. 1125. On a choisi une situation où l'énergie potentielle (le puits dans lequel est confiné la particule) est indépendante du temps, donc on va s'intéresser aux solutions indépendantes du temps. Définir les états stationnaires et aboutir à l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

---

**Transition :** Voir la quantification en résolvant l'équation de Schrödinger.

---

## 3 Étude des puits

### 3.1 Conditions aux limites imposées à la fonction d'onde

Voir Cohen, p. 69 et polycopié de J. Hare.

### 3.2 Particule dans un puits de potentiel infini

[71], p.1233 - En partant de l'équation de Schrödinger indépendante du temps on fait la résolution et obtient les solutions pour les cas  $E > 0$  et  $E < 0$ . Reste à appliquer les conditions limites que l'on vient de détailler et bien insister sur le fait que ce sont elles qui sont à l'origine de la quantification (insister sur la répercussion de ces conditions aux limites!). Appliquer enfin la condition de normalisation et mettre correctement en exergue la quantification de l'énergie.

A ce stade on peut faire une analogie avec la corde vibrante : [71], p. 1234 - La recherche des fonctions d'onde vérifiant Schrödinger stationnaire est parfaitement analogue (au moins sur l'aspect calculatoire) à la recherche des modes propres de vibration d'une corde : modes propres en sinus et fonction d'onde en sinus ; quantification des vecteurs d'onde ; présence de nœud ; fonction d'onde = superposition de 2 ondes en sens opposés. PWP

[71], p.1236 - Différences : la relation de dispersion est différente (En introduisant la pulsation et le nombre d'onde, on en déduit la relation suivante :  $\omega = (\hbar k^2)/2m$ . Cette équation est la relation de dispersion d'une onde de de Broglie associée à une particule libre (non relativiste). On voit ainsi que la propagation de cette onde dans le vide se fait de manière dispersive, puisque la vitesse de phase dépend de la pulsation), pour la corde  $\omega = ck$ , le système est non dispersif. Autre différence : Quantification de l'énergie.

La conclusion de cette partie doit impérativement être clairement énoncée : c'est le confinement qui est à l'origine de la quantification de l'énergie (par l'intermédiaire des conditions limites).

### 3.3 Influence de la taille du puits

[71], p. 1240 - Il est possible d'envisager un autre modèle : l'énergie de la particule quantique n'est pas négligeable devant la profondeur du puits  $V_0$ . [3], p. 545 - En résolvant l'équation de Schrödinger en stationnaire à l'aide de conditions aux limites différentes, en considérant maintenant la continuité de la dérivée au bord du puits, on obtient la quantification des niveaux dans le puits selon la formule  $E_n = -V_0 + (\hbar^2 K_n^2)/2m$ . L'état de plus basse énergie est le fondamental, les autres sont les niveaux excités. En réalisant une simulation numérique on constate que le spectre des niveaux d'énergies est appauvri. Et il l'est d'autant plus que le puits est petit. Programme python « puits quantique ».

[71], p.1245-1246 - Nous admettons ici que les fonctions d'ondes dans le cas du puits fini existent à l'extérieur du puits sous forme d'onde évanescente. (Cette constatation sera étudiée dans la prochaine leçon sur l'effet tunnel.) La fonction d'onde a un confinement moins important que dans le cas du puits fini :  $\Delta x_\infty < \Delta x_{fini} \rightarrow E_{\infty, min} > E_{fini, min}$ .

**Conclusion :** C'est donc la localisation dans le puits qui entraîne une valeur non nulle du plus bas niveau d'énergie : phénomène ici purement quantique. La discrétisation provient ici du confinement via les conditions aux limites imposées sur  $\Psi$ . A l'extérieur du puits fini : ondes évanescentes impliquent l'effet Tunnel.

#### BONUS :

- On trouve une démonstration de la continuité de la dérivée dans l'annale de composition 2005 Question B.2.1a et dans le Basdevant [21] édition école polytechnique 2002 p. 68.
- Puits de potentiel pas indépendant du temps?
- Équation de Dirac
- Quantification de l'énergie observable expérimentalement par effet photo électrique ou par spectre de l'hydrogène (Spectro USB et lampe balmer)
- Quantification n'est pas un phénomène quantique (quantification du vecteur d'onde pour la corde de Melde) mais quantification de l'énergie purement quantique.
- Si la leçon est trop courte : parler de la couleur des molécules : plus la conjugaison est importante plus les électrons sont dans un grand puits, les niveaux d'énergie se rapprochent et la longueur d'onde entre deux niveaux augmente de sorte qu'on atteint des couleurs visibles [Problèmes de mécanique quantique, Basdevant]





# LP n° 41 : Effet tunnel.

**NIVEAU :** CPGE

On place cette leçon au niveau PC.

**PRÉREQUIS :**

- Physique ondulatoire
- Notion de mécanique quantique (Schrödinger indépendante du temps, courant de probabilité, puits de potentiel de profondeur fini afin de déjà avoir la notion d'onde évanescente)
- Notions de lycée sur la radioactivité

**PLAN :**

1. Barrière de potentiel et effet tunnel
2. Le microscope à effet tunnel
3. Un exemple naturel : la radioactivité  $\alpha$

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [71] *Physique Tout-en-un PC/PC\**, Dunod (4ème édition)
- BUP n°699
- [78] Le cours de physique de Berkeley, volume 4 (1974)
- BUP n°734
- Vidéo de bonhomme d'IBM
- Vidéo synchrotron soleil
- Deux vidéo youtube 1 et 2

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

**Introduction :** Avec le puits de potentiel et la barrière de potentiel, on a vu que la fonction d'onde pouvait déborder sur des zones où le potentiel est plus grand que son énergie. Ce phénomène a-t-il des conséquences exploitables ?

## 1 Barrière de potentiel et effet tunnel

### 1.1 Position du problème

[71], p. 1250 - Faisceau de particules provenant de l'infini et arrivant sur la barrière de potentiel. Cas où  $E < V_0$ . Définition de la limite de cette barrière + schéma des 3 zones. Description du cas classique. En méca Q, existence d'une probabilité non nulle de se retrouver dans la barrière de potentiel, zone classiquement interdite. Donner les solutions pour les 3 régions sous forme exponentielle (presque comme dans [71], p.1245). Simplifier certains termes grâce à l'étude des 3 régions et donner la forme finale des solutions dans les trois régions séparément.

### 1.2 Conditions de raccordement

[71], p. 1252 - Le potentiel  $V(x)$  a une discontinuité d'amplitude finie qui permet d'imposer la continuité de la fonction d'onde en  $-a/2$  et  $a/2$  : écrire les équations associées, imposer la continuité de la dérivée : faire le calcul et donner les équations. (Comme on ne va pas vraiment utiliser ces calculs on peut en écrire une et écrire simplement  $\Phi(a/2) = \Phi(-a/2)$  et pareil pour la dérivée). On a 4 équations et 5 inconnues : à ce stade on pourrait exprimer 4 des inconnues en fonction de la 5ème.

### 1.3 Probabilité de réflexion et de transmission

[71], p. 1252 - Écrire les fonctions d'ondes incidente, réfléchie et transmise. (Attention petite erreur remplacer B3 par A3). Rappeler la définition du vecteur densité de courant (in [71], p.1210) et le calculer pour les 3 fonctions d'onde. On définit les coefficients en réflexion et en transmission. Les conditions de raccordement nous ont permis d'exprimer 4 des inconnues, cela peut nous permettre de trouver l'expression de R et de T. (on le fait pas mais pour les obtenir il faut faire la somme puis le rapport des 2 équations de continuités pour obtenir les coefficients). Il existe une probabilité de transmission qui ne s'annule jamais. C'est l'effet tunnel!

[71], p.1254 Faire l'approximation de la barrière épaisse, donner des ODG de T en fonction de la particule. [71], p.1255

**Transition :** On va traiter une application canonique - le microscope à effet tunnel.

## 2 Le microscope à effet tunnel

PWP principe. BUP n°699, p. 1269 - Petit historique du microscope à effet tunnel. Principe de fonctionnement : électrons de conduction « voient » une marche de potentiel; probabilité de présence non nulle dans la marche mais décroît rapidement comme une onde évanescence sur une distance caractéristique  $\delta$  qui est de  $6 \times 10^{-10}$  m. Faire schéma au tableau. Vidéo Youtube ou synchrotron soleil.

Approche d'un 2ème conducteur, on applique une différence de potentiel, donc une barrière de potentiel et apparition de courant tunnel. Donner l'expression de ce courant.

[71], p. 1258 - Donner les 4 contraintes technologiques du microscope.

[71], p. 1308, Q3 - Un déplacement de la pointe de  $10^{-11}$  m correspond à une variation d'intensité relative de 3% : faire le calcul. Toujours dans le BUP n°699, p. 1275 - Analyser la résolution latérale, transversale (qui est limitée par les vibrations) et la hauteur de la barrière de potentiel. (remarque dans la 3ème page, on peut en déduire une valeur de Vo...). Le sens de passage des électrons est déterminé par la tension appliquée [71], p. 1308 Q3. L'effet tunnel peut être utilisé selon deux fonctionnements : topographie, spectroscopie. [71], p. 1258, possible de lire le BUP n°699, p. 1271-1276 à ce sujet mais on n'apprend pas beaucoup plus que dans le Dunod).

---

**Transition** : Autre processus non pas technologique mais naturel qui se fait par effet tunnel.

---

## 3 Un exemple naturel : la radioactivité $\alpha$

### 3.1 Faits expérimentaux

[71], p.1260 Faire un rappel sur la désintégration alpha + donner un exemple de la désintégration du radium. On peut réaliser une constatation expérimentale de la radioactivité alpha : PWP il semble que la demi-vie de la particule alpha est d'autant plus courte que l'énergie cinétique de la particule est grande et de même on constate expérimentalement qu'il existe des noyaux comme le radium (émetteur de particule alpha) qui ont une durée de vie anormalement longue en comparaison d'autre noyaux comme le polonium.

Transition : nous allons expliquer ces temps de vie grâce au phénomène de l'effet tunnel.

### 3.2 Modélisation par un puits

[71], p. 1262 - Afin de décrire ces phénomènes on adopte un modèle. On suppose que la particule alpha existe à l'intérieur du noyau. Elle est soumise à une  $E_p$  résultant de l'interaction forte de courte portée, et de la répulsion électrostatique entre la particule alpha et le nouveau noyau à  $Z-2$  protons. A l'extérieur de la surface du noyau le potentiel est celui de Coulomb :  $V(r) = (2e^2(Z-2))/(4\pi\epsilon_0 r)$ . [71], p.1264 & lire BUP n°734, p. 738. Faire le schéma du puits.

[78], p. 294 - Le potentiel  $V(r)$  pour un rayon de noyau de 7,3 fm donne un potentiel  $\approx 33,9$  Mev (on a utilisé la forme coulombienne du potentiel, en remplaçant  $R$  par 7,3 fm). Cependant la particule a une énergie cinétique bien inférieure : de l'ordre de 5 Mev. On ne devrait donc pas observer cette particule alpha qui devrait rester piégée dans le puits. Elle s'explique par l'existence de l'effet tunnel : la particule doit traverser la barrière par effet tunnel sur une distance allant de  $R$  à  $R_c$  (région limite classique). Faire le calcul de  $R_c$  avec pour valeur de l'énergie celle dans le tableau [71], p. 1261 On trouve 54 fm.

### 3.3 Probabilité d'émission de la particule

(Equation [78], p.289) On reprend l'expression du coefficient de transmission de la barrière. [78], p. 291 On approxime la barrière variant continument par plusieurs barrières rectangulaires. Le coefficient de transmission global est le produit des coefficients de transmission. Obtenir l'expression de  $\log(T)$  avec une intégrale entre  $R$  et  $R_c$  [78] p.295.

[78], p.292 On peut déjà faire 2 constatations : le coefficient de transmission décroît quand la masse augmente ou quand l'énergie totale croît. Donner le résultat de cette intégrale sous forme  $\log(T) = A/\sqrt{E} + B$ .

[71], p. 1263 - La particule alpha fait des allers-retours dans le noyau et ne cesse de rebondir contre la barrière de potentiel. A chaque collision elle a une probabilité  $T$  d'être transmise,  $\tau_0$  la durée de traversée du noyau,  $\tau$  le temps moyen que la particule passe dans le puits. On trouve  $\tau = \tau_0/T$ . C'est la grande sensibilité de la probabilité de transmission par effet tunnel à la masse et à l'énergie de la particule alpha qui est responsable des variations de la demi-vie des noyaux radioactifs.

[71], p. 1264 - Le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent entre  $t$  et  $t + dt$  est  $dN = N(t)/\tau dt$ . Résoudre l'équation différentielle et obtenir  $N(t)$ . Calculer  $N(t_{1/2})$  et en déduire  $\tau_{1/2} = \tau \ln(2)$ .

**Conclusion :** Effet tunnel bien utile pour comprendre des phénomènes naturels mais aussi pour la plupart des applications technologiques actuelles. ouvrir sur d'autres technologies : microscopies.

**BONUS :**

---

- Lien entre inégalité d'Heisenberg temps-énergie et effet tunnel [71], p. 1206 : à cause des fluctuations d'énergie il est possible pendant un temps donné d'avoir une énergie suffisante pour que la particule ne passe non pas dans la barrière mais au-dessus de la barrière de potentiel : compatible avec le calcul (lorsque la barrière augmente la probabilité de transmission diminue).
- Démonstration de la continuité de la dérivée dans l'annale de composition A2005, question B.2.1a et Basdevant [21], p. 68.
- Autres techniques de microscopie : AFM ou microscopies optiques (cf. leçon associée)
- Attention cette définition du vecteur densité n'est vraie que pour une onde plane, la vraie définition est :

$$J = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$$



# LP n° 42 : Fusion, fission.

NIVEAU : LICENCE 3

---

## PRÉREQUIS :

- Interactions fondamentales
- Structure de la matière, structure électronique des atomes
- Radioactivités alpha et bêta.
- Bases de relativité,  $E = mc^2$
- Électrostatique, interaction coulombienne, section efficace
- Effet tunnel

## PLAN :

1. Énergie disponible dans le noyau atomique

2. Mécanisme d'allègement des noyaux lourds, la fission
3. Mécanisme de stabilisation des noyaux légers, la fusion

## BIBLIOGRAPHIE :

- [47] Le Sech & Ngô, *Physique nucléaire*.
- [76] L. Valentin, *Le monde subatomique*.
- [4] Basdevant & Rich, *Énergie nucléaire*.
- Le tableau périodique interactif Ptable peut se révéler utile !

## IDÉES À FAIRE PASSER :

La cohésion des nucléons est favorable en énergie du fait de l'interaction forte. Ainsi, la fusion des noyaux légers ou la fission des noyaux lourds libère une quantité d'énergie sous forme d'énergie cinétique. Cette énergie, si elle est bien sûr faible devant les énergies de notre échelle pour une unique réaction, devient largement exploitable dès lors que la masse de réactif devient macroscopique. C'est à la récupération de cette énergie que l'on s'intéresse ici.

**Introduction :** L'énergie nucléaire est à la fois la plus ancienne forme d'énergie dans l'univers, à l'origine notamment de la formation des étoiles, et la plus mal maîtrisée actuellement par l'homme. L'objet de cette leçon est de comprendre quelle forme prend l'énergie disponible dans le noyau, et quels sont les mécanismes permettant de la récupérer. Nous aborderons notamment la question des technologies d'exploitation de l'énergie nucléaire actuelles et futures.

## 1 Énergie disponible dans le noyau atomique

### 1.1 Cohésion du noyau

[47], p. 1 - Redonner le symbole du noyaux et présenter les quatre interactions en jeu dans sa cohésion. Négliger l'interaction gravitationnelle et présenter d'abord l'interaction coulombienne répulsive, or on observe des noyaux stables (cf. [slide](#)) donc il y a nécessairement une interaction stabilisante, en l'occurrence l'interaction forte... mais s'il n'y avait qu'elle on aurait une droite (cf. [slide](#)). La cohésion du noyau relève donc d'une compétition entre les interactions coulombienne et forte! Selon la force qui l'emporte sur l'autre on va avoir des noyaux stables ou instables.

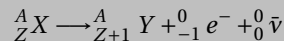
### 1.2 Stabilité des noyaux

Définir un noyau stable (on considère qu'un noyau est stable si son temps de demie-vie est supérieur à l'âge de l'univers qui est de l'ordre de  $10^{17}$  s). Les noyaux de part et d'autre de la ligne des noyaux stables se désintègrent, comme c'est connu, par radioactivité (cf. [slide](#)). La radioactivité est le plus court chemin pour rejoindre la droite des noyaux stables.

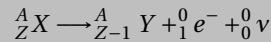
La stabilité des noyau est quantifiée par l'énergie de liaison (à définir d'après [47], pp. 22-23) et la courbe d'Aston (présentée sur [slide](#)) montre que la stabilité des noyaux n'est pas uniforme : parmi les noyaux stables certains le sont plus que d'autres. Même si dans tous les cas leur temps de demie-vie sont largement macroscopiques on peut avoir intérêt à déstabiliser certains d'entre eux qui vont alors migrer vers des noyaux plus stables et libérer le surplus d'énergie de liaison. On a donc intérêt à estimer précisément ces énergie de liaison mais la résolution exacte de la configuration du noyau est un problème à A corps évidemment insolvable analytiquement. On va chercher à l'estimer à partir d'un modèle effectif, le modèle de la goutte liquide.

A ne pas dire : Les noyaux instables sont dits radioactifs (il en existe environ 10000) et se désintègrent spontanément en noyaux stables par radioactivité :

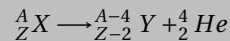
- Si un noyau possède trop de neutron pour être stable il se désintègre par radioactivité  $\beta^-$  : un neutron est transformé en proton avec émission d'un électron et d'un antineutrino via



- Si un noyau possède trop peu de neutrons pour être stable il se désintègre par radioactivité  $\beta^+$  : un proton est transformé en neutron avec émission d'un positron et d'un neutrino via



- Pour les noyaux les plus lourds on a affaire à de la radioactivité  $\alpha$  par émission d'une particule alpha, noyau d'hélium, selon



### 1.3 Le modèle de la goutte liquide

[47], pp. 29-31 - A lire en détail et expliquer posément et clairement. Voir aussi [slide](#) pour comprendre l'interprétation des termes. Noter que pour les noyaux petits (en gros  $A < 16$ ) le modèle ne marche pas car ils n'ont pas vraiment de volume, et pas assez de nucléons pour pouvoir faire des statistiques... Pour varier les plaisirs on peut aussi lire [4], p. 68 (notamment pour l'introduction historique).

**Transition :** Ainsi, les noyaux les plus stables sont situés autour du Fer. Les noyaux plus lourds vont avoir tendance à se diviser en noyaux plus petits et plus stables, c'est la fission. Les noyaux plus légers vont avoir, eux, tendance à s'agréger pour s'alourdir, c'est la fusion. On va étudier les deux processus dans la suite, à commencer par celui qui aujourd'hui le mieux maîtrisé à savoir la fission.

## 2 Mécanismes d'allègement des noyaux lourds, la fission

### 2.1 Réaction, énergie et produits de fission

[4], p. 185 (chapitre 6) - Définir la fission nucléaire, préciser à nouveau qu'elle concerne les noyaux lourds. Discuter du paragraphe sur l'énergie (dans un premier temps on suppose que les deux noyaux produits ont  $Z/2$  et  $A/2$ ) et estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de fission.

*Remarque : la partie suivante, sur les produits de fission, peut servir de fusible si on est un peu juste sur le temps.*

[4], p. 186 - Écrire la fission d'un élément, par exemple l'uranium 236. On peut avoir un certain nombre de noyaux finaux produits statistiquement et on voit qu'en fait la fission n'est pas symétrique. C'est dû au fait que certains noyaux sont « superstables » et ça se voit assez bien avec la forme des noyaux : certains correspondent à des sphères parfaites et sont ainsi stabilisés (cf. [slide](#)). La raison profonde et le modèle en couche du noyau (cf. [4], p. 78) et les nombres mis en exergue précédemment, dits nombres magiques, correspondent à des couches fermées en proton et/ou en neutron.

### 2.2 Mécanisme de la fission

[47], pp. 72-74 & [4], pp. 189-192 - On cherche à passer d'un noyau sphérique à deux noyaux sphériques. Cette transformation se fait nécessairement selon le profil présenté sur [slide](#) de sorte que l'énergie de volume est la même, l'énergie coulombienne diminue du fait que les charges de même signe s'éloignent, mais l'énergie de surface augmente. La fission nécessite donc de passer par un maximum d'énergie potentielle et peut être spontanée (par effet tunnel, on a alors  $\tau \geq 10^{16}$  s) ou induite par apport extérieur d'énergie (photon, neutron, ...); voir [4], p. 189. C'est le principe des réacteurs nucléaires.

### 2.3 Réacteurs nucléaires

Objectif : réaction en chaîne - les neutrons libérés sont capturés, provoquent la fission et en libèrent de nouveaux, etc. [47], p. 225 - Pour avoir réaction en chaîne, il faut que le nombre de fissions induites soit supérieur au nombre de neutrons perdus (masse critique : tous les noyaux ne sont pas capables de faire des réactions en chaîne). Idéalement il faut aborder les quatre points suivants :

- Combustible : c'est forcément un noyau fertile (qui donne un noyau fissile par absorption de neutron), en général de l'uranium 235.

- Modérateur; [76], p. 195 - La section efficace de fission neutron-noyau diminue avec l'énergie cinétique des neutrons : il faut ralentir les neutrons produits. Parler des REP. [4], p. 183 - Discuter la réaction en chaîne. Il faut que les neutrons puissent-être absorbés par les atomes d'uranium pour provoquer la fission, et pour se faire ils doivent avoir une section efficace la plus grande possible. Il faut donc les ralentir (modérateur etc...).
- Contrôle : [47], p. 229.
- Fluide caloporteur : pour extraire la chaleur du cœur, [47], p. 226

Problèmes : [76], p. 187 et [4] pour les problèmes liés aux déchets.

---

**Transition :** Une solution au problème des déchets pourrait-être la fusion nucléaire car les produits ne sont pas radioactifs. On va voir qu'en revanche cela pose de gros problèmes techniques.

---

### 3 Mécanisme de stabilisation des noyaux légers, la fusion

#### 4 Propriétés de la fusion

[4], p. 233-235 - Définir la fusion, donner des exemples simples de réaction de fusion et insister sur le rôle de l'hélium dont l'énergie de liaison est particulièrement importante et qui donne ainsi lieu à des réactions particulièrement exothermiques. Difficulté à résoudre de la barrière coulombienne, énergie à obtenir de manière cinétique pour franchir la barrière, nécessité d'une haute température et d'une haute compression ([4], p. 238).

##### 4.1 La fusion comme processus originel de la matière

Parler un peu de la fusion dans les étoiles permise par confinement inertiel - fusion successive des différents atomes de plus en plus lourd jusqu'au fer et l'effondrement de l'étoile en supernova.

##### 4.2 Idéalité de la fusion réalisée sur terre

Impossible de faire du confinement inertiel sur terre (on ne peut accéder à des masses suffisantes), idée du confinement magnétique. Nommer quelques projets modernes, notamment le controversé ITER.

---

**Conclusion :** Le noyau est donc une source considérable d'énergie du fait de l'interaction forte qui maintient sa cohésion pourtant déstabilisée par les interactions coulombiennes. Si nous sommes aujourd'hui capables de contrôler la fission nucléaire et d'exploiter l'énergie qu'elle libère dans les centrales dites nucléaires, chacun à bien conscience du danger qu'elles présentent et de l'intérêt de développer une source d'énergie plus sûre, pourquoi pas la fusion nucléaire... Ou les énergies renouvelables!

**BONUS :**

---

1. Vu le titre de la leçon, je pense qu'il faut être le plus efficace possible sur la première partie, en allant à l'essentiel, pour ensuite prendre le temps de discuter les propriétés de la fission et de la fusion.
2. Il me semble compliqué d'aborder cette leçon sans avoir relu en diagonale le rôle des quatre interactions et la classification des particules élémentaires, voir [47], p. 1.
3. L'existence de l'interaction forte est démontrée par l'expérience de Rutherford, cf. [76].
4. Il est intéressant de comparer les énergies récupérées par différentes réactions (celle libérée par la fusion est plus faible par unité de réaction mais bien plus élevée par unité de masse de combustible) :  $10^{10}$  J par fission d'un gramme d'uranium 235,  $3.10^{11}$  J par fusion d'un gramme de mélange Deuterium Tritium... à comparer à la combustion de l'éthanol et ses 25 kJ/g!
5. Tout ce qui concerne la radioactivité est intéressant mais tout à fait secondaire dans cette leçon, excepté pour la radioactivité  $\alpha$  qui est une forme de fission!





# LP n° 43 : Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux.

NIVEAU : LICENCE 3

**PRÉREQUIS :**

- Résolution du double puits en fonction d'onde. Énergies propres.

•

**PLAN :**

1. De l'importance des systèmes à deux niveaux en physique
2. Évolution temporelle d'un système élémentaire

3. Évolution sous l'effet d'un couplage

**BIBLIOGRAPHIE :**

- [21] J.-L. Basdevant, méca Q.
- [27] Cohen-Tannoudji, Tome I.
- Cours de mécanique quantique de Quentin GLO-RIEUX, chap. 5
- Éventuellement le BUP n°574 sur les systèmes à deux états.

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

Il faut bien faire ressortir de cette leçon la généralité de l'étude menée. La partie I ne doit pas prendre trop de temps puisque c'est l'évolution temporelle qui nous intéresse, mais présenter convenablement la molécule d'ammoniac est crucial pour la suite. Enfin c'est la généralité de la méthode utilisée qui doit ressortir : écrire le hamiltonien du système, avec ou sans couplage; le diagonaliser, résoudre dans la base des états propres et appliquer l'opérateur évolution.

**Introduction :** De nombreux systèmes peuvent se ramener à l'étude d'un système à deux niveaux proches en énergie. L'intérêt de cette étude est qu'elle permet de dégager sur un modèle très simple du point de vue mathématique des idées physiques générales et importantes.

## 1 De l'importance des systèmes à deux niveaux en physique

### 1.1 Systèmes à deux niveaux d'énergie

Être très bref. On considère un spin  $1/2$ , a priori les deux états  $+$  et  $-$  ont la même énergie mais sous l'effet du champ magnétique il y a levée de dégénérescence et les deux états ont des énergies différentes dues à l'interaction avec le champ  $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . On a donc rigoureusement deux niveaux, séparés d'une énergie  $\Delta E = 2\mu B$ .

### 1.2 Systèmes à deux niveaux d'énergie accessibles

On peut prendre un tout petit peu plus de temps. S'appuyer sur l'exemple des transitions électroniques entre les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. A température ambiante l'énergie thermique vaut environ 25 meV, c'est bien trop peu pour faire transiter un électron du fondamental au premier état excité, mais largement assez pour exciter la structure hyperfine du fondamental (voir absolument [21], chap XIII).

Généraliser au fait qu'on a plein de niveaux d'énergie *a priori*, mais en fait dans les conditions de l'étude il n'y a que DEUX NIVEAUX D'ÉNERGIE ACCESSIBLES.

### 1.3 Systèmes pouvant se ramener à l'étude de deux niveaux d'énergie

La molécule d'ammoniac. Voir [21], pp. 100 et suivantes. Dessiner le double puits fini, donner l'énergie qu'aurait la molécule d'ammoniac bloquée dans un des puits s'ils étaient infini. Couplage des deux puits par effet tunnel et levée de dégénérescence en états propres symétrique et antisymétrique d'énergies  $E_S$  et  $E_A$  distantes de  $\Delta E = 2A$ , où  $A \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \frac{4e^{-K\Delta}}{Ka}$ . Faire le diagramme énergétique [21], p. 103 au tableau. Donner l'ordre de grandeur de  $2A \approx 10^{-4}$  eV.

**Transition :** On justifie donc qu'il faille étudier l'évolution temporelle de ces systèmes, et de plus on s'est ramené à chaque fois à un formalisme similaire que l'on va garder pour la suite et qui montre que la résolution est la même in fine, quel que soit le problème de départ.

## 2 Évolution temporelle d'un système modèle

### 2.1 Évolution temporelle des états propres

Ecrire le hamiltonien dans la base des états propres. Résoudre Schrödinger dépendant du temps pour ces états; en fait ce sont des états stationnaires dont la phase oscille mais pas la probabilité. Représenter ces états sur un graphe : ils n'apportent aucune connaissance, les états qui comptent ce sont droite et gauche. Voir pour ce paragraphe [21], p. 128-129.

### 2.2 Cas d'un état initial quelconque

Exprimer un état quelconque dans la base  $(\Psi_A, \Psi_S)$ . Appliquer la linéarité et retrouver son évolution temporelle. Appliquer au cas des états droite et gauche dans la base  $(\Psi_A, \Psi_S)$ .

### 2.3 Évolution de la probabilité

Passer à la probabilité dans le cas précédent. Trouver que celle-ci oscille, et déterminer la période des oscillations. Justifier que la molécule d'ammoniac n'ait pas de moment dipolaire observable. Définir les oscillations de Rabi.

---

**Transition :** Pour l'instant on a supposé que les deux niveaux d'énergie

---

## 3 Évolution temporelle sous l'effet d'un couplage

### 3.1 Formalisme du couplage entre états

Exemple de l'ammoniac placé dans un champ électrique. Energie potentielle du moment dipolaire instantané, et expression du moment en fonction de l'observable position. Nouvelle forme du hamiltonien. Traduire les coefficients diagonaux en « termes de transition », les rapporter au couplage entre les états propres.

### 3.2 Couplage indépendant du temps

Trouver les nouveaux états propres, les énergies associées en champ fort et en champ faible. Représentation graphique, et interprétation en termes d'états gauche et droite.

---

**Transition :** On a donc la méthode pour résoudre on diagonalise le hamiltonien et on résout dans la base des états propres puis on peut exprimer n'importe quel état physique dans cette base. Mais si le hamiltonien dépend du temps on ne va pouvoir faire ça car la base des états propres va se mettre à dépendre du temps elle aussi.

---

## 4 Évolution temporelle forcée

### 4.1 Traduction formelle d'un champ dépendant du temps,

Écrire la nouvelle forme du champ électrique, le hamiltonien associé. Insister sur le fait que l'équation à résoudre est donc dépendante du temps; écrire le système linéaire associé.

### 4.2 Résolution, résonance

Faire apparaître les pulsations caractéristiques, et se ramener à un système à coefficients constants. Résoudre à partir d'un instant initial bien choisi. Aboutir à la probabilité de transition et interpréter graphiquement.

### 4.3 Principe du MASER à ammoniac

Selon le temps, détailler plus ou moins le principe du maser à ammoniac. A l'aide de la différence entre les niveaux d'énergie, montrer qu'on amplifie des micro-ondes dont on peut changer la fréquence en fonction du champ appliqué (cf. graphe des états d'énergie). Applications ?

---

**Conclusion :** Dans cette leçon, hormis la première partie qui nous a servi à introduire un certain nombre de systèmes à deux niveaux, nous n'avons travaillé que sur la molécule d'ammoniac. Pourtant, on aura pu constater

qu'une fois le formalisme posé on a très vite oublié la molécule pour traiter un « problème à deux niveaux » dans toute sa généralité. C'est la puissance de cette étude : elle est valide sans considération sur le système étudié!

**BONUS :**

---

- C'est long... Mais on pourra sans problème raccourcir cette leçon si besoin le jour en traitant plus ou moins en détail certaines parties.



# LP n° 44 : Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.

NIVEAU : LICENCE 3

---

## PRÉREQUIS :

- Thermodynamique, modèle du gaz parfait
- Physique statistique (théorème d'équipartition, dénombrement des modes, densité de mode)
- Bases de mécanique quantique (quantification de l'énergie)

## PLAN :

1. Propriétés statistiques de la capacité thermique
2. Systèmes sans interaction entre particules : capacité thermique du gaz parfait

3. Modélisation d'un système de particules en interaction : capacité thermique des solides.

## BIBLIOGRAPHIE :

- [5] *Thermodynamique*. Bertin-Faroux-Renault.
- [62] Le cours de Physique de Berkeley. *Physique statistique* (tome 5).
- [30] B. Diu, *Physique statistique*.
- [31] B. Diu, *Thermodynamique*.
- [45] C. Kittel, *Physique de l'état solide*.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

La capacité thermique quantifie la réponse d'un système à une excitation énergétique due à une variation de température, soit d'énergie comprise entre 0 eV ( $T = 0$  K) et 250 meV ( $T = 10.T_{amb} = 3000$  K). On s'intéresse donc à des excitations très inférieures à l'excitation intra-atomique (typiquement 13,6 eV).

---

**Introduction :** Historiquement, la capacité thermique était comprise comme l'énergie à apporter à un corps pour augmenter sa température d'un degré soit en terme plus mathématique  $C_V = \partial U / \partial T$ . Partant de cette définition sommaire (que nous allons d'abord nous employer à préciser et exploiter) nous allons dans cette leçon généraliser cette notion à la réponse d'un système physique à une excitation énergétique thermique, c'est-à-dire comprise entre 0 et 250 meV, soit largement inférieur aux énergies de cohésion de la matière (typiquement 13,6 eV).

## 1 Propriétés statistiques de la capacité thermique

### 1.1 Définitions et intérêt

Voir [5], p. 109 et [62], p. 206 - Définitions de  $C_V$  et  $C_P$  à partir des dérivées partielles de  $U$  et  $H$ . Interprétation en terme d'énergie à apporter pour augmenter la température d'un corps d'un degré, extensivité, grandeurs molaire et massique. Signaler tout de suite qu'on ne s'intéresse pas ici à  $C_P$  car 1) dans les gaz on a la relation de Mayer (on y reviendra en II., voir [5], p. 121) donc  $C_V$  suffit et 2) dans les phases condensées on a égalité des deux.

### 1.2 Description macroscopique

Exposer rapidement la méthode générale de mesure (calorimétrie, cf. [5], p. 110 et l'expérience de Joule, in [31], p. 89). Présenter sur [slide](#) des courbes expérimentales pour les gaz et les solides.

Démontrer par le raisonnement entropique de [62], pp. 209 - 211 que la capacité thermique d'un corps tend vers 0 lorsque sa température tend aussi vers 0 K. Le calcul est peut-être plus clair dans [31], p. 144.

Il faut aussi évoquer le signe des capacités, voir [31], pp. 196 - 199.

---

**Transition :** On a établi l'utilité et l'importance pratique et théorique de la capacité thermique. Reste à voir comment elle s'exprime pour différents systèmes. Commençons par le cas simple d'un système sans interaction : le gaz parfait.

---

## 2 Systèmes sans interaction : capacité thermique du gaz parfait

### 2.1 Gaz parfait monoatomique

[5] - On commence par traiter le gaz parfait de manière cinétique. On calcule son énergie interne (p. 90) et on en déduit la capacité thermique par dérivation (p. 121). Présenter sur [slide](#) le cas de l'Argon pour lequel ça marche super bien et le cas de l'hydrogène pour lequel c'est plus compliqué...

### 2.2 Théorème d'équipartition

Voir [62], pp. 246-248 pour la preuve et l'énoncé (ne pas faire la preuve) puis [5], p. 122 et [62], p. 248 pour retrouver la capacité thermique du gaz parfait monoatomique par application du théorème.

### 2.3 Gaz parfait polyatomique

Voir [5], p. 123 (et [62], p. 248 accessoirement) pour traiter le cas diatomique (degrés de rotation puis de vibration). L'explication du gel des degrés de liberté est clair dans [5], p. 124. La remarque sur la continuité de  $C_V$  au bas de la page 124 est instructive.

Remarque : prolongement du résultat au gaz de Van der Waals. Voir [30], p.421 (capacité calorifique d'un gaz réel) + note de bas de page pour l'interprétation intéressante expliquant pourquoi on retrouve le résultat du gaz parfait.

---

**Transition :** On a décrit la capacité thermique du gaz à basses températures par une constante par palier fonction des dégèles de certains degrés de liberté. Mais en vrai lorsqu'on fait tendre la température vers 0 il y a un changement d'état et si on veut décrire la capacité thermique à basses températures il faut s'intéresser à la physique de l'état solide!

---

## 3 Système de particules en interaction : capacité thermique des solides.

Référence globale pour cette partie : [30], complément III.E. On peut commencer par remettre la courbe expérimentale et constater que  $C_V \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow 0$  et que  $C_V$  sature aux hautes températures à peu près  $C_{V,m} = 24 \text{ kJ.mol}^{-1}$ . Préciser que dans un premier temps on se restreint aux isolants (sinon il faut prendre en compte les électrons de conduction).

### 3.1 Capacité calorifique des solides à température ambiante, loi de Dulong et Petit

Voir [62], p. 250 et suivante - pas grand chose à ajouter. On peut adopter la discussion sur l'approximation classique. Noter que considérer les atomes indépendants les uns des autres revient à faire l'approximation du champ moyen! :)

### 3.2 Le modèle d'Einstein

Le modèle précédent n'explique pas le comportement de la capacité calorifique aux basses températures. Pour cela, il faut prendre en considération les quantifications de l'énergie. C'est ce qu'a fait Einstein en 1907. Voir [30], complément III.E (p. 380). On reprend donc le modèle précédent mais on quantifie l'énergie :  $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ . Calcul de la fonction de partition, puis de l'énergie et de la capacité thermique. Limites aux hautes et basses températures. Discussion de la p. 382.

Remarque : Grande puissance du modèle : il explique par la quantique (on est en 1907!) que  $C_V$  décroît avec la température. Problème, il prévoit un comportement en exponentielle décroissante lorsque  $T \rightarrow 0$  alors que les expériences montre plutôt un comportement en  $T^3$  ...

### 3.3 Modèle de Debye

L'idée de Debye est de considérer que l'énergie est stockée non pas vraiment par les atomes du réseau eux-même mais sous la forme de mode de vibration appelés phonons. Pour estimer la capacité calorifique d'un solide il faut donc estimer l'énergie stockée dans ces modes à une température  $T$ . (Je pense qu'il faut (rapidement) décrire les modes de vibration du réseau (phonon) et donner l'approximation linéaire de la relation de dispersion (en gardant la preuve pour les questions) Voir [45], p. 112). On fait alors le raisonnement suivant :

1. **Quels sont les modes accessibles?** Par théorème de Bloch la périodicité du réseau se retrouve sur la fonction d'onde et en particulier on peut ramener l'étude à la zone de Brillouin et imposer les conditions aux limites périodiques, entre autres à  $k$ . En 1D ([45], p. 106), ceci impose  $k = \pm 2N\pi/L$  pour  $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ . Ceci se généralise, à trois dimensions, sur chaque composante du vecteur d'onde :  $k_x, k_y$  et  $k_z$ . Ainsi, dans l'espace des  $k$

chaque mode occupe un volume  $(2\pi/L)^3$  autour d'une position quantifiée  $(k_x, k_y, k_z)$ . De plus, l'espace entier des  $k$  n'est pas accessible puisque pour un réseau comportant  $N$  mailles élémentaires il y a au plus  $N$  modes accessibles (coucou la leçon résonance : il y a autant de mode que d'oscillateurs couplés!). On définit donc le nombre d'onde de Debye  $K_D$  tel que

$$\frac{(4\pi K_D/3)^3}{(2\pi/L)^3} = N$$

A ce nombre d'onde particulier on associe une température  $\theta$ , dite température de Debye, telle que

$$\hbar\omega_D(K_D) = k_B\theta$$

- Quelle est l'énergie d'un mode de vibration?** L'énergie d'un phonon de nombre d'onde  $k$  et pulsation  $\omega$  est celle de l'oscillateur harmonique associé  $\hbar\omega(k)$ . Debye suppose alors une relation de dispersion simple pour les phonons par approximation linéaire  $\omega = vk$ . Cette approximation est en fait justifiée d'une part par la forme réelle de la relation de dispersion (cf. [45], p. 95 sur la branche acoustique) et d'autre part par le fait qu'on s'intéresse au comportement de la capacité thermique à  $T \rightarrow 0$  soit en particulier  $T \ll \theta$ , température de Debye.
- Combien de modes sont excités à la température  $T$ ?** A température  $T$ , seuls les modes tels que  $\hbar\omega \leq k_B T$  sont excités. Par linéarité de la relation de dispersion, cela revient, dans l'espace des  $k$ , à exciter l'intégralité des modes dans une sphère de rayon  $k_T$ , nombre d'onde thermique défini par  $\hbar\omega_T = \hbar vk_T = k_B T$ . Cela correspond, par rapport à la quantité maximale de modes excitables, à une proportion

$$\frac{\left(\frac{4\pi k_T^3}{3}\right)}{\left(\frac{4\pi k_D^3}{3}\right)} = \frac{k_T^3}{k_D^3} = \left(\frac{T}{\theta}\right)^3$$

des  $3N$  modes excitables.

- Quelle est alors l'énergie du solide à la température  $T$ ?** A priori l'énergie du mode  $k$  est  $\hbar\omega = \hbar vk$  mais si  $T \rightarrow 0$  (i.e.  $T \ll \theta$ ) on aura  $k \approx k_T$  de sorte que  $\hbar\omega \approx \hbar vk_T = k_B T$ . Chaque mode excité ayant une énergie  $k_B T$  l'énergie du solide est

$$U \approx 3Nk_B T \left(\frac{T}{\theta}\right)^3$$

- Que vaut par conséquence sa capacité thermique?** La capacité thermique est obtenue en dérivant l'énergie par rapport à la température. Il vient donc

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx 12Nk_B \left(\frac{T}{\theta}\right)^3$$

De sorte qu'on retrouve la loi en  $T^3$  attendue!

Remarque :

- On retrouve d'ailleurs le résultat d'Einstein en faisant le même raisonnement mais en injectant une relation de dispersion simplifiée  $\omega = cste$  ce qui revient à décrire les modes d'excitation optique.
- La description de la relation de dispersion des phonons dans un solide monocristallin est décrite dans [45], p. 90.

### 3.4 Selon le temps - Contribution des électrons libres

Voir [45], p. 133.

**Conclusion :** Il faudra probablement ouvrir sur la contribution des électrons libres à la capacité thermique!

**BONUS :**

- On est passé du gaz au solide... sans faire étape pour le liquide. Il y a une raison à ça, voir [5], p.114.
- Il faut noter que l'entropie ne tend vers 0 à température nulle que pour les cristaux parfaits!





# LP n° 45 : Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.

NIVEAU : LICENCE 3

---

PRÉREQUIS :

- Milieux magnétiques
- Électromagnétisme dans la matière
- Moments cinétique & magnétique : aspects classique et quantique

PLAN :

1. Interprétation du paramagnétisme
2. Le ferromagnétisme : origine microscopique

3. Résolution dans l'approximation du champ moyen

BIBLIOGRAPHIE :

- [8] *Électromagnétisme 4*, Bertin-Faroux-Renault
- [30] B. Diu, *Physique Statistique*, très (trop?) complet. Les phénomènes d'intérêt occupent deux gros compléments. Il faut savoir faire le tri.
- [32] E. Tremolet, *Magnétisme 1 : fondements*.
- [45] C. Kittel, *Physique de l'état solide*.

IDÉES À FAIRE PASSER :

---

Le paramagnétisme est le cas simple, du fait que les particules sont supposées indépendantes. Le ferromagnétisme est un problème nettement plus compliqué que l'on peut traiter en « champ moyen » de sorte que les particules peuvent être considérées, sous l'effet du champ effectif, indépendantes.

---

**Introduction :** L'introduction du chapitre 7 du BFR4 [8], p. 146 est inspirante! Ne pas hésiter à faire une introduction un peu longue qui remet à plat les grandeurs étudiées dans la leçon. Commencer par rappeler le lien entre  $\vec{M}$  et  $\vec{J}$  en classique (rapport gyromagnétique [8], p. 148) et en quantique (facteur de Landé [8], p. 155). Définir ensuite le vecteur aimantation ([8], p. 100) et la susceptibilité magnétique (positive pour les deux cas considérés!) in [32], pp. 48-50 ou [30], p. 310.

Lorsqu'on donnera des ordres de grandeur de  $\chi$ , donner aussi les valeurs de T et n correspondantes!

## 1 Interprétation du paramagnétisme

### 1.1 Hamiltonien décrivant le problème

Définition du paramagnétisme, énergie d'interaction entre un moment magnétique quelconque et le champ  $\vec{B}$ . Hamiltonien du système de particules de moment cinétique total  $\vec{J}$ .

### 1.2 Aimantation et susceptibilité

On se place dans le cas habituel  $J = 1/2$  et on applique le calcul de valeur moyenne de [8], p. 165-166. Tracer l'aimantation en fonction du rapport champ/température et commenter, signaler qu'on trouve  $\tanh(x)$  pour  $J = 1/2$  mais en vrai c'est des fonctions de Brillouin (cf. graphe du Diu). En déduire la susceptibilité, vérifier la loi de Curie.

### 1.3 Paramagnétisme des métaux

*Lorsque j'ai testé cette leçon, j'ai terminé pile dans les temps sans faire cette partie.*

Optionnel mais intéressant pour expliquer le paramagnétisme des métaux, pour lesquels les électrons ne sont plus localisés sur leur atome d'origine mais sont délocalisés dans la mer de Fermi. Voir le chapitre 7 de [32] pour comprendre la nécessité du paramagnétisme de Pauli, et le chapitre 8 ([32], p. 282-283) pour l'argument « avec les mains ».

---

**Transition :** On a retrouvé par interprétation microscopique les résultats constatés par l'expérience dans le cas simple du paramagnétisme où les particules n'interagissent pas. Comment décrire le cas a priori plus général où les moments magnétiques interagissent?

---

## 2 Le ferromagnétisme : origine microscopique

### 2.1 Résultats expérimentaux sur le ferromagnétisme

Bref rappel pour savoir un peu ce qu'on cherche. Voir Trémolet 1 [32], p. 92. *Cette partie n'est pas essentielle à mon avis.*

### 2.2 Formalisme des particules en interaction : le hamiltonien de Heisenberg

On formalise déjà l'interaction entre spin. Dans le cas le plus simple elle s'écrit  $H_{ij} = -J_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j$ , et si on veut favoriser l'alignement des spins il faut  $J_{ij}$  positif. Ensuite il faut sommer, on simplifie en ne prenant en compte que les voisins, et en supposant que  $J_{ij}$  est le même pour tous. Voir [30], p. 450. Le fondamental correspond à l'alignement des spins, mais d'où vient l'interaction ?

### 2.3 Origine de l'interaction

Première hypothèse : c'est une interaction dipôle magnétique / dipôle magnétique. Estimer un ordre de grandeur de l'énergie d'interaction dans ce cas, et trouver la température de Curie associée ([30], p. 450). L'interaction dipôle dipôle ne peut pas suffire.

L'interaction qui fait marcher le truc est d'origine quantique : c'est l'interaction d'échange. Expliquer son origine et des ordres de grandeur de  $J$  in [30], p. 451-453 et [32], notamment p. 128 pour l'aspect expérimental.

---

**Transition :** On se retrouve donc avec un problème à  $N$  particules en interaction impossible à résoudre exactement. Il s'agit donc de se placer dans une configuration approchée dite de champ moyen pour simplifier le problème en le ramenant à un cas sans interaction et en tirer les principales tendances.

---

## 3 Résolution dans l'approximation du champ moyen

### 3.1 Principe de l'approximation

Le principe est bien expliqué dans [30], p. 454 et dans [32], p. 126-128. Aboutir à l'expression du hamiltonien en fonction du champ magnétique moyen. On est alors ramené au cas du paramagnétisme et par analogie on en déduit une équation sur l'aimantation  $\vec{M}$  :

$$M = \frac{g\mu_B N}{2V} \tanh\left(\frac{g\mu_B}{2k_B T}(B_0 + \lambda T)\right)$$

### 3.2 Résolution en l'absence de champ extérieur

Dans le cas où  $B = 0$  on mène proprement la résolution graphique de l'équation. Mettre en évidence l'existence d'une température critique de transition ferro/para, et affirmer (ou démontrer?) le comportement de l'aimantation en fonction de  $T$  en deçà de  $T_C$ . cf. [30], p.456-459.

### 3.3 Comportement sous l'effet d'un champ magnétique

Influence qualitative, sur le graphe, d'un champ non nul. Calcul de la susceptibilité magnétique. Voir [30], à partir de la page 460.

---

**Conclusion :** Ouvrir sur Ising? Ou sur les autres ordres magnétiques (ferri, antiferro, voir [8], p. 190-191).

**BONUS :**

- On peut essayer de discuter des domaines de Weiss quelque part dans cette leçon mais je suis pas sûr qu'il reste du temps à y consacrer...
- Note sur les statistiques utilisées ici : On a utilisé, dans la partie paramagnétisme, la statistique canonique de sorte que la probabilité d'un macro-état est proportionnelle à  $\exp(-W_{\text{micro-état}}/k_B T)$ . Dans le cas du paramagnétisme où les particules sont indépendantes, l'énergie du micro état se factorise en produit des énergies de chaque particule de sorte que la probabilité totale devient produit des probabilités qui sont, dans notre cas, toutes identiques. La statistique qui s'applique alors est la statistique de Boltzmann et la probabilité est proportionnelle à  $\exp(-E_{\text{particule}}/k_B T)$ . Dans le cas du ferromagnétisme, la statistique canonique s'applique toujours mais les particules n'étant plus indépendantes, le problème ne peut évoluer vers la statistique de Boltzmann. C'est toute l'utilité du champ moyen que de pouvoir inclure les interactions dans le champ efficace de manière à permettre la transition vers Boltzmann.

- Garder à l'esprit que l'efficacité de la résolution en champ moyen dépend de la dimension : plus grande est la dimension meilleure est l'approximation (c'est logique!). Pour exemple, dans le modèle d'Ising, le champ moyen en 1D prédit une transition de phase inexistante en réalité, mais à partir de la dimension 4 (je crois...) les exposants critiques en champ moyen sont exacts!



# LP n° 46 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

NIVEAU : LICENCE 3

---

**PRÉREQUIS :** \_\_\_\_\_

- Magnétisme dans les milieux
- Diamagnétisme, paramagnétisme
- Équation de Maxwell dans un milieu magnétique

**PLAN :** \_\_\_\_\_

1. Aimantation d'un ferromagnétique
2. Cycle d'hystérésis d'un ferromagnétique

3. Ferromagnétiques doux et durs : caractéristiques et utilisations

**BIBLIOGRAPHIE :** \_\_\_\_\_

- [45] C. Kittel, *Physique de l'état solide*.
- [8] *Électromagnétisme 4*, BÉrtin-Faroux-Renault
- [22] Physique PSI/PSI\*, nouveau programme

**IDÉES À FAIRE PASSER :** \_\_\_\_\_

Les ferromagnétiques ont des propriétés intéressantes (champ rémanent, aimantation même à champ nul) plus ou moins marquées selon le type de ferromagnétique étudié. Leurs applications sont donc de fait différentes.

**Introduction :** On a déjà étudié les différents milieux magnétiques naturellement à notre disposition, principalement les dia-, para- et ferromagnétiques. On va dans cette leçon s'intéresser aux différentes nuances de ferromagnétiques, à leur caractéristiques respectives et leurs utilisations propres.

## 1 Aimantation d'un ferromagnétique

### 1.1 Courbe de première aimantation

Pour le protocole expérimental de mesure, voir [8], p. 173. Il ne me paraît pas utile d'en parler, mais essentiel de le lire pour les questions - Expliquer qu'on part d'un ferromagnétique sans aimantation et on augmente progressivement  $H$  (où  $\mu_0 B$  ce qui revient au même en géométrie torique). Présenter la courbe sur [slide](#) et interpréter les zone 1, 2 et 3 [8], p. 174. Commenter la valeur de la perméabilité, qui vaut au moins celle à champ nul (en gros).

### 1.2 Canalisation des lignes de champ

Présenter l'aspect énergétique comme dans [22], p. 679. Évoquer (ou garder pour les questions) l'aspect réfraction des lignes de champ à l'interface. Conclure quant à la canalisation des lignes de champ dans le milieu.

### 1.3 Interprétation en domaines de Weiss

Voir [8], p. 176-179 et [22], p. 675-676. Selon le temps on peut éventuellement discuter des phénomènes en équilibre dans les barrières entre domaines, et de la taille typique desdits domaines.

**Transition :** On vient de voir comment l'aimantation réagit à une augmentation du champ magnétique. Comment réagit-elle ensuite si ce champ est modifié, typiquement diminué puis augmenté à nouveau?

---

## 2 Cycle d'hystérésis d'un ferromagnétique

### 2.1 Mise en évidence du cycle d'hystérésis

Faire l'expérience du transformateur démontable (MP16). On veut juste voir le cycle ici, pas forcément faire les mesures (on peut s'y pencher si on a le temps en préparation, notamment pour anticiper les questions qui viendront probablement sur le lien entre les tensions vues à l'oscilloscope et les champs!).

## 2.2 Grandeurs caractéristiques du cycle d'hystérésis

Dessiner le cycle et nommer les différents points d'intérêt. Proposer des interprétations physiques pour chacun. Voir [22], p. 672 et [8], p. 181 et 185-186.

## 2.3 Pertes énergétiques par hystérésis

Remonter au fait que l'énergie perdue sur un cycle correspond à l'aire du cycle d'hystérésis. Le calcul est mené dans [22], p. 682 et dans [8], p. 187-189.

---

**Transition :** On voit donc que le comportement du milieu étudié dépend de la forme de son cycle, notamment l'énergie perdue lors du parcours du cycle, et l'aimantation rémanente lorsque  $H = 0$ . On distingue donc deux types de ferromagnétiques, les doux et les durs, chacun ayant leur propre type d'application.

---

# 3 Ferromagnétiques doux et durs : caractéristiques et utilisations

## 3.1 Les ferromagnétiques doux

Voir [8], p. 182 pour des exemples d'application et des valeurs.

## 3.2 Les ferromagnétiques durs

Voir [8], p. 183 pour des exemples et des valeurs. Voir l'application aux aimants permanents, dans [33], chap. 15, notamment l'application aux moteurs à courant continu, aux nouvelles motricité urbaine (il faudrait trouver des valeurs d'aimantation dans les moteurs de trottinette ou de vélo électrique).

## 3.3 Application au disque dur

[33], p. 302 - Présenter le fonctionnement de l'enregistrement longitudinal PWP, et parler de l'enregistrement numérique (qui est plus simple et dont on se sert aujourd'hui). Ouvrir sur l'enregistrement perpendiculaire pour pallier la limite inférieure de la distance  $d$  et donc de la capacité de la mémoire. Voir cette vidéo pour quelques infos sur les évolutions technologiques.

---

**Conclusion :** Au niveau microscopique, c'est l'intensité de l'interaction d'échange qui fait la différence entre les ferromagnétique doux ou durs (je crois...). Au niveau macroscopique leur différence est flagrante et définit deux grands domaines d'application :

# LP n° 47 : Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.

NIVEAU : LICENCE 3

---

**PRÉREQUIS :**

- Électrocinétique
- Électromagnétisme
- Mécanique quantique (puits, notion de fonction d'onde, Équation de Schrödinger)
- Physique statistique (Théorie cinétique des gaz, Théorème d'équipartition, statistiques quantiques)

**PLAN :**

1. Interprétation mécanique de la conduction : le modèle de Drude
2. Description semi-quantique de la conduction, la mer de Fermi

3. Isolant, conducteur, semi-conducteur : la structure de bande

**BIBLIOGRAPHIE :**

1. [2] Physique des solides, Neil W. Ashcroft et N. David Mermin, édition EDP sciences 2002
2. Cours sur les moteurs de J. Neveu
3. Cours de matière condensée de P. Mendels
4. Cours de l'EPFL, éventuellement
5. [45] *Physique de l'état solide*, C. Kittel (8ème édition)
6. BUP n°550 sur les *Propriétés électriques des solides*

**IDÉES À FAIRE PASSER :**

Définition des grandeurs caractérisant la conduction d'un solide à partir du modèle de Drude (conductivité, résistivité, temps de collision, mobilité des électrons...) et limites du modèle de Drude (nécessité du traitement quantique). Existence d'un gaz de Fermi d'électrons libres dans un solide conducteur. Notions de vitesse et de température de Fermi. Origine des bandes d'énergie dans un solide cristallin, remplissage des bandes. Cas des métaux, des isolants, des semi-conducteurs.

**Introduction :** Dans notre quotidien nous sommes entourés d'appareils qui conduisent le courant. L'objet de cette leçon est de comprendre quels types de matériaux conduisent le courant et quels en sont les mécanismes. Les métaux occupent une place assez particulière dans l'étude des solides conducteurs et partagent de nombreuses propriétés inexistantes dans d'autres solides comme le quartz ou le sel. Dans un premier temps nous allons étudier la théorie de la conduction métallique avancée par Drude en 1900.

## 1 Description classique de la conduction, le modèle de Drude

*Cette partie est rassurante, mais je pense qu'il ne faut pas y passer plus de dix minutes (en gros).*

### 1.1 Position du problème, hypothèses

[2], p. 2 - L'élaboration du modèle de Drude est rendue possible par la découverte de l'électron par Thomson en 1897. Hypothèses à mentionner : neutralité locale du métal (présence de charges positives, au contraire de la théorie cinétique de gaz), délocalisation des électrons DE VALENCE, DITS DE CONDUCTION, dans le métal et immobilité des noyaux et électrons de coeur, et on traite le tout comme un gaz classique. Quelle est sa densité? cf. [2], p. 4.

Voir ensuite les quatre hypothèses fondamentales entre les pages 4 et 7. Faire un schéma au tableau pour expliquer les choses de manière plus naturelles.

### 1.2 Conductivité électrique

Le modèle de Drude étudie le déplacement des électrons dans le métal, soumis à un champ électrique extérieur et aux collisions. Obtenir l'équation, passer en complexe, donner l'équation de la densité d'électrons en déduire la conductivité complexe et définir la conductivité statique (cf. cours Moteur, p. 5) + Ordre de Grandeur de la conductivité résistivité (à définir) p. 5. On retrouve la loi d'Ohm locale, voir [2], p. 8. Calcul de  $\tau$  et du libre parcours moyen, p. 9.

### 1.3 Critiques du modèle

On va regarder la dépendance de la conductivité avec la température et regarder si la prévision du modèle de Drude est cohérente avec l'expérience :

Expérience : Dépendance de la résistance d'un métal (soit la bobine de cuivre dans sa cuve soit résistance de platine, mesure 4 points) avec la température.

## 2 Description semi-quantique de la conduction, la mer de Fermi

### 2.1 La Distribution de Fermi-Dirac

Cours de Mendels, p. 16 & [45], p. 129 - On va prendre en compte l'aspect quantique du phénomène, notamment le fait que les électrons sont des fermions (redonner le principe de Pauli), mais sans considérer l'interaction des électrons avec le réseau (mer d'électrons libres).

Ensuite, le confinement des électrons dans le solide impose les conditions aux limites (périodiques), cf. [2], p. 37 et [45], p. 131. On voit alors apparaître la quantification du vecteur d'onde en modes, on peut donner l'énergie  $\varepsilon(k)$ . Remarque que le mode  $k$  est un état propre pour la quantité de mouvement!

Déterminer la densité d'état dans l'espace des  $k$  puis la densité d'état d'énergie. Les électrons sont des fermions : ne peuvent pas occuper les mêmes états (Pauli). L'état fondamental est l'état du système à  $N$  électrons au zéro absolu. Si la température augmente le taux d'occupation des états d'énergie est donné par la fonction de distribution de Fermi Dirac. La fonction de Fermi Dirac varie dans la bande  $\pm kT$  autour du potentiel chimique + faire le schéma.

Remarque importante sur la limite du modèle de Drude (BUP, p. 293) : - Le fait que les électrons suivent cette statistique de Fermi-Dirac et non la statistique de Maxwell-Boltzmann impose que pour une forte densité d'électrons, les hauts niveaux d'énergie sont atteints quelle que soit la température ce qui correspond à des électrons à forte énergie cinétique et explique quantiquement pourquoi la vitesse mesurée expérimentalement est bien plus importante que celle prévue par le modèle de Drude.

### 2.2 Niveau de Fermi

Cours de Mendels, p. 21 & [45], p. 129 - Définition de l'énergie de Fermi à l'explicitier en fonction du nombre d'onde. Dans l'espace de  $k$ , les états occupés occupent une sphère appelée sphère de Fermi de rayon  $k_F$ . On peut exprimer l'énergie de Fermi en fonction du nombre de particule. On calcule le nombre de particule avec l'intégrale, puis l'énergie totale à 3D. Donner des O.D.G de l'énergie de Fermi, associé à une température de Fermi

[45], p. 130 - **slide** constater qu'à température ambiante on se rapproche de la marche; on peut donc adopter la modélisation de la sphère de Fermi à Tamb. A température nulle, tous les niveaux sont occupés jusqu'à l'énergie  $E_f$ , tous les niveaux d'énergie supérieure à  $E_f$  sont vides.

Cours de Mendels, p. 23 - A température finie, cette distribution s'étale sur une largeur d'ordre  $kBT$  autour de l'énergie  $E_f$  appelée énergie de Fermi. Ces électrons s'appellent électrons de la mer de Fermi. **slide**

Transition : relier ce modèle à la conductivité électrique?

### 2.3 Influence d'un champ électrique sur la mer de Fermi, conductivité électrique

[45], p. 138 - Dans un champ électrique la force qui s'exerce sur un électron s'écrit selon la 2ème loi de Newton. Dans le cas où l'on néglige les collisions entre les électrons et le réseau lors du déplacement de la sphère, celle-ci est déplacée à vitesse constante sous l'effet du champ. Donner l'expression intégrée ainsi que le déplacement  $\delta k$ . **slide** Globalement l'ensemble des électrons se déplacent dans le sens opposé au champ électrique ce qui induit un courant macroscopique : Loi d'Ohm.

Donner la résistivité électrique : ici elle est liée à la collision des électrons de conduction avec les phonons, et à température très faible aux collisions avec les impuretés, les défauts du réseau. C'est pour ça que le libre parcours moyen est bcp plus grand!

**Transition** : Jusqu'ici on a décrit le comportement des électrons d'un cristal et identifier l'origine de la conductivité électrique mais rien ne nous a permis de différencier les isolants des conducteurs, encore moins des semi-conducteurs; pourtant, la résistivité est une des grandeurs physiques dont la dynamique de variation est la plus importante d'un corps à un autre :  $10^{-10} \Omega \cdot \text{cm}$  pour un métal pu à basse température à  $10^{20} \Omega \cdot \text{cm}$  pour un bon isolant. Pour cela il faut regarder les interactions entre les électrons et les ions du réseau.



### 3 Isolant, conducteur, semi-conducteur : la structure de bande

#### 3.1 Potentiel perçu par les électrons, fonctions de Bloch

BUP, p. 306 & [45], p. 156 - Il s'agit de prendre en compte les interactions électrostatiques : électrons-ions qui sont faibles mais peuvent être résonnantes. Décrire le potentiel et répercuter la périodicité sur la fonction d'onde par théorème de Bloch pour tout ramener à la première zone de Brillouin.

#### 3.2 Résonance sur le réseau et structure de bande

[45], pp. 154-155 et [2], p. 190 - Donner l'énergie en fonction de  $k$ , puis préciser l'origine des bandes interdites. Tout ramener à la première zone de Brillouin pour voir apparaître la structure de bande. Comme les électrons sont des fermions Pauli nous impose de pouvoir en mettre au plus deux par état (polarisation). Se pose alors la question du remplissage des bandes. On appelle niveau de Fermi l'énergie du plus haut état occupé à  $T = 0$  K. On distingue alors deux types de bandes : celle de conduction qui contient des états dont l'énergie peut être supérieure à l'énergie de Fermi, et les bandes de valence dont tous les états d'énergie sont inférieurs à  $\epsilon_F$ . Le remplissage des bandes va fixer les propriétés électroniques des différents solides.

#### 3.3 Différents types de matériaux

- Conducteur **slide** remplissage : états disponibles à la conduction électrique. Ok pour appliquer Sommerfeld à la bande de conduction
- Isolant :  $\epsilon_F$  dans la bande interdite, ordre de grandeur de la résistivité  $\approx M\Omega$  et gap  $\approx 6$  eV (!) pour le diamant.
- Semi-conducteur : même schéma que pour isolant mais la taille du gap est beaucoup plus faible  $\approx 1$  eV, par exemple : 0,66 eV pour le germanium Ge, 1,12 eV pour le silicium Si, voire 2,26 eV pour le phosphore de gallium. La conductivité à température ambiante n'est pas négligeable et elle augmente avec la température!

Les SC sont séparés en 2 catégories : intrinsèques/extrinsèques. Les SC intrinsèques ont un gap énergétique de l'ordre de l'eV les électrons à  $T$  ambiante peuvent donc franchir ce gap. Un SC extrinsèque : introduction d'états disponibles dans le gap en dopant à l'aide d'impuretés (chaque impureté peut céder ou capter un électron).

[2], p. 673 - Étude de la résistivité des SC en fonction de la température et du dopage. A  $T$  fixée la résistivité peut varier de  $10^{12}$  alors que la concentration d'impuretés change seulement de  $10^3$ . A remarquer : la résistivité diminue lorsque la température augmente, contrairement aux conducteurs!

Expérience : Dépendance de la conductivité d'un semi-conducteur avec la température. Voir MP18.

**Conclusion :** La conduction est une **manifestation macroscopique de la mécanique quantique!**. C'est bien la statistique de Fermi-Dirac qui explique la conduction dans les solides conducteurs. On a vu qu'il existe différents types de matériaux qui ont des conductivités différentes et que celles-ci peuvent être expliquées grâce à la structure de bandes. On a vu les structures de plusieurs solides et notamment les SC qui peuvent avoir des propriétés très utiles : [2], p. 328 pour l'exemple des jonctions PN qu'on retrouve dans les diodes. Possible aussi d'ouvrir sur la supraconductivité ([45], p. 239)!

#### BONUS :

- Voir définition d'un phonon dans le Kittel : c'est l'onde créée par la vibration du réseau cristallin. Donc à basse température il n'y a pas de collision des électrons avec les phonons mais avec les impuretés.
- Origine des collisions dans le cours de Mendels, p. 34.
- SC : Le dopage de type N consiste à augmenter la densité en électrons dans le semi-conducteur. Pour ce faire, on inclut un certain nombre d'atomes riches en électrons dans le semi-conducteur. Par exemple du phosphore dans le silicium. Le dopage de type P consiste à augmenter la densité en trous dans le semi-conducteur. Pour ce faire, on inclut un certain nombre d'atomes pauvres en électrons dans le semi-conducteur afin de créer un excès de trous. Par exemple le bore dans le silicium.



# LP n° 48 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

## NIVEAU : CPGE

A priori rien d'en cette leçon n'est vraiment pas au programme de CPGE. La première partie relève de la première année, les deux autres ne sont pas vraiment au programme mais peuvent constituer des exercices assez classiques... Par précaution, on pourra décider de mettre cette leçon au niveau Licence (2).

## PRÉREQUIS :

- Mécanique de première année
- Electrocinétique de première année
- Formalisme complexe, RSF
- Interférences à N ondes
- Induction (notamment la mutuelle)
- Eventuellement la différence de marche de la lame d'air

## PLAN :

1. Réponse d'un oscillateur harmonique à un forçage
2. Résonance(s) d'oscillateurs couplés
3. Cavités résonantes

## BIBLIOGRAPHIE :

- [48] *Supermanuel de Physique*, J. Majou & S. Komilikis.
- [19] Hprépa, *Mécanique. Première année*.
- TD de C. Sayrin énoncé et corrigé
- Eventuellement le Taillet [74] et le Pérez d'Optique [58] pour « compléter » le TD de C. Sayrin.
- Eventuellement aussi, pour la partie de mécanique, le BFR de mécanique (tome 1) [9] autour de la page 200.
- [55] *Physique, une approche moderne*. C. Lagoute et coll.

## IDÉES À FAIRE PASSER :

La résonance correspond, de manière élémentaire, à un maximum d'amplitude de la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale. Les résonances ont alors diverses caractéristiques qui nous intéressent selon les systèmes étudiés.

**Introduction :** Définir une résonance : un système admet une résonance lorsque l'amplitude de la réponse étudiée est maximale pour une fréquence d'excitation donnée.

## 1 Réponse d'un oscillateur harmonique à un forçage

Pour cette première partie, voir [48], Chapitre 9 et [19], Chapitre 5 - On s'intéresse à un oscillateur mécanique horizontal amorti par frottements fluides  $-\alpha v$ . Présenter le système, appliquer le principe fondamental de la dynamique sous un forçage  $F = F_0 \cos(\omega t)$  et trouver l'équation mécanique :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F$$

### 1.1 Résonance en vitesse

[19], pp. 105 - 106 - On commence par la résonance en vitesse parce qu'on peut l'interpréter plus simplement. On conçoit bien que (cf. [slide](#)) :

- A très faible fréquence d'excitation, le mobile suit la force excitatrice qui va lentement donc sa vitesse tend vers 0.
- A très haute fréquence d'excitation, le mobile est parfaitement incapable de suivre la force excitatrice de sorte qu'il fait quasiment du surplace. Sa vitesse tend à nouveau vers 0.

Ainsi, il existe forcément une fréquence d'excitation pour laquelle l'amplitude en vitesse est maximale. Introduire les notations  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{k m}$  et réécrire l'équation. Montrer par le calcul que la résonance existe toujours (passer en complexes en posant proprement  $F = F_0 e^{j\omega t}$  et  $x = \text{Re}(x)$  où  $\underline{x} = x_0 e^{j\omega t} = x_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}$  puis traduire l'équation sur la vitesse en remplaçant  $j\omega x$  par  $v$ , et résoudre cf. [19]). Étudier la réponse de la phase pour constater qu'à résonance l'excitation et la vitesse du mobile oscillent en phase, regarder l'influence du facteur de qualité rapidement sur le calcul et surtout sur la représentation graphique, ce sera plus efficace (cf. [slide](#)).

Aspects énergétiques : on repart de l'équation mécanique de l'oscillateur  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$  qu'on multiplie par  $\dot{x}$  pour avoir le théorème énergétique :  $\dot{x}\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}^2 + \omega_0^2 x\dot{x} = \frac{F_0}{m} \dot{x}$  et on réécrit l'équation comme d'habitude :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{F_0}{m} \dot{x} - \frac{\omega_0}{Q} v^2$$

En valeur moyenne sur une période le terme dans la dérivée est constant (ce sont des valeurs moyennes de carrés de fonctions trigonométriques) de sorte que le terme de gauche est nul. Ainsi, on démontre qu'en moyenne (et quelque soit la fréquence d'excitation!) :

$$\langle Fv \rangle = \left\langle \frac{m\omega_0 v^2}{Q} \right\rangle$$

donc la force injectée dans le système par l'excitateur (terme de gauche) et exactement dissipée par les frottements (car  $\frac{m\omega_0}{Q} = \alpha$ ). C'est logique : le système ne stocke pas d'énergie en moyenne donc ce qui est injecté est dissipé.

Regardons maintenant ce qu'il se passe à la résonance. On a démontré que  $F$  et  $v$  sont en phase et  $v_m = F_0/\alpha$  de sorte qu'on a rigoureusement et **à tout instant**  $Fv = \frac{m\omega_0 v^2}{Q}$ . Ainsi, à la résonance, la puissance injectée dans le système par l'excitateur est instantanément dissipée par les frottements : le transfert d'énergie entre l'inertie et l'élasticité du ressort est optimal!

On voit sur la [slide](#) qu'il y a aussi un maximum d'amplitude mais ça n'est pas si évident.

## 1.2 Résonance en position

[48], pp 350 - 352 et [19], pp. 102 - 104. Si on reprend le raisonnement qu'on avait fait pour la vitesse :

- A très faible fréquence d'excitation, le mobile suit la force excitatrice donc l'amplitude de l'excitateur se retrouve exactement sur le résonateur;
- A très haute fréquence d'excitation, le mobile est parfaitement incapable de suivre la force excitatrice de sorte qu'il fait quasiment du surplace. L'amplitude de la position est proche de 0.

On comprend alors que l'amplitude de l'oscillation en position peut rejoindre 0 de manière monotone, ou admettre un maximum entre les deux fréquences limites. Cela va dépendre des caractéristiques du système. Résoudre l'équation mécanique en complexes. Trouver  $x_m$  et étudier proprement et en détail les variations du dénominateur pour trouver la condition de résonance (sur  $Q$  et sur  $\omega$ ). Étude de la phase.

Commentaire : la résonance n'a lieu que pour  $Q = \sqrt{km}/\alpha > 1/\sqrt{2}$  c'est-à-dire qu'il faut que les frottements ne soit pas trop fort (c'est logique!). On comprend aussi pourquoi, à la résonance en position, l'excitateur et le résonateur ne sont pas en phase. Avec les mains : si on commence à tirer sur le résonateur quand il est en bout de course on n'exploite pas correctement le délai dû à l'inertie du ressort; il faut que l'excitateur commence à tirer un peu plus tôt pour que le ressort agisse sur le résonateur au moment exact où celui-ci arrive en bout de course. De la même manière on peut peut-être essayé de comprendre pourquoi la fréquence de résonance en tension n'est pas exactement la fréquence propre mais c'est pas trivial...

## 1.3 Régime libre

Voir [48], à partir de la page 339 - Commencer la résolution analytique pour voir apparaître les trois régimes limites et donner quelques caractéristiques pour chacun d'entre eux :

- Régime aperiodique ( $Q < 1/2$ ) : Existence eventuelle d'un extremum, donner la condition et opposer aux systèmes du premier ordre - pp. 340 - 342.
- Régime pseudo-périodique ( $Q > 1/2$ ) : Décroissance exponentielle, nombre d'oscillations en fonction de  $Q$ . Donner les formules pour le temps caractéristique et la pseudo-pulsation - pp. 342 - 343.
- Régime critique ( $Q = 1/2$ ).

On peut aussi présenter le lien entre le nombre d'oscillation du régime libre et  $Q$ .

## 1.4 Universalité du modèle

On fait l'analogie avec le RLC série en tension ou intensité : appliquer la loi des mailles rapidement pour trouver l'équation sur la tension aux bornes du condensateur et sur l'intensité, voir [19], pp. 108 - 110.

Expérience : On peut avoir préparé quelques diagrammes de Bode pour différentes valeur de  $R$  (donc de  $Q$ ) en tension et en intensité (l'amplitude suffit) pour voir que dans un cas il n'y a pas toujours résonance, contrairement au cas en intensité! Devant le jury, on peut mettre en évidence expérimentalement les différents régimes libres.

On peut citer d'autres exemples de systèmes dont la résonance est décrite par un oscillateur harmonique amorti : l'amortisseur de voiture (exo classique de prépa), l'électron élastiquement lié permettant d'expliquer la polarisabilité électronique - cf. LP28) ou encore la résonance magnétique. D'ailleurs la résonance magnétique permet de faire une bonne transition avec la partie précédente (cf singulet pour les protons seuls et multiplet avec des protons équivalents) mais faut avoir envie de rentrer un peu dans le détail... à voir!

**Transition :** Que se passe-t-il si on approche un deuxième RLC du premier circuit?

**Expérience :** Le faire sur la paillasse. On voit apparaître, en wobulation, une deuxième fréquence de résonance. L'écart entre les deux fréquences de résonance dépend de la distance entre les bobines (donc du couplage).

Peut-on l'expliquer?

## 2 Résonance(s) d'oscillateurs couplés

On traite l'exemple de deux oscillateurs couplés. Il faut insister sur le fait que la résonance correspond en fait à un mode propre du système, symétrique ou anti-symétrique, comme le montre le calcul en introduisant les grandeurs somme  $s$  et différence  $d$ .

Étudions cela concrètement avec un modèle simple : deux circuits RLC couplés. (Exp)

$$\Delta i_2 = - \frac{dq_2}{dt} = -C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

2) Exemple : circuits RLC couplés

$$\begin{cases} e = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_{C_1} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = M \frac{di_1}{dt} + R i_2 + L \frac{di_2}{dt} - u_{C_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = u_{C_1} + R C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + L C \frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2} - M C \frac{d^2 u_{C_2}}{dt^2} \\ 0 = u_{C_2} + R C \frac{du_{C_2}}{dt} + L C \frac{d^2 u_{C_2}}{dt^2} - M C \frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2} \end{cases}$$

Soit  $s = u_{C_1} + u_{C_2}$  et  $d = u_{C_1} - u_{C_2}$

$$\begin{cases} e = s + R C \frac{ds}{dt} + (L - M) C \frac{d^2 s}{dt^2} \\ 0 = d + R C \frac{dd}{dt} + (L + M) C \frac{d^2 d}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L - M) C}} \\ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L + M) C}} \end{cases}$$

On peut aussi faire l'analogie avec les pendules couplés par torsion. Éventuellement indiquer qu'il y a deux types de couplage : en position (pendules) ou inertiel (RLC). Ça peut être utile de se renseigner sur comment coupler des RLC en position (cf. lien).

Remarque : J'ai lu quelque part une remarque intéressante sur les avantages et inconvénients des couplage en position ou inertiel mais pas moyen de retrouver où, ni ce qu'elle disait exactement...

**Transition :** Si on regarde la réponse de la chaîne de 8 oscillateurs on voit 8 fréquences de résonance apparaître (slide). Si on regarde un spectre RMN on voit l'influence du couplage des protons : on voit des doublet, triplet, etc... C'est donc un phénomène général : lorsqu'on couple N oscillateurs on obtient N fréquences de résonance. Un moyen de faire tendre N vers l'infini est de coupler un oscillateur avec lui-même ; c'est le principe des cavités résonantes.

## 3 Système avec un nombre infini de degrés de liberté, cavité résonante

Traiter l'interféromètre de Fabry-Pérot à partir du TD de C. Sayrin énoncé et corrigé (on peut voir aussi le Taillet [74] pour compléments et éventuellement le Pérez d'Optique [58]).

### 3.1 Cavité Fabry-Pérot

Il faut TORCHER le calcul de la différence de marche (voir le mettre en prérequis si on n'a pas le temps de le faire) puis exprimer les vibrations lumineuses des différents rayons en sortie en fonction des coefficients de réflexion et de transmission et du nombre d'aller-retour effectué par le rayon dans la cavité.

### 3.2 Intensité de l'onde transmise

Sommer le tout et aboutir à l'expression de l'intensité

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\varphi/2)}$$

Tracer grâce au [programme python « Fabry\\_Perot »](#) (ou mettre sur [slide](#)) pour différentes valeurs du coefficient de réflexion : plus le coefficient de réflexion est proche de 1 plus il y a d'ondes qui interfèrent (plus il y a d'oscillateur couplés) donc meilleure est la cavité!

### 3.3 Pouvoir de résolution

On peut faire le calcul de la largeur des pics et établir l'expression de la finesse. Faire le lien avec le facteur de qualité des résonances du I.!

On connaît d'autres exemples de cavités résonantes que l'on peut choisir d'évoquer ou pas. Par exemple les tuyaux sonores (cf. [39]) dont les conditions limites imposent  $L = n \frac{\lambda}{2}$  (ouvert/ouvert) ou  $L = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$  (ouvert/fermé), le premier étant strictement analogue à la corde de Melde (qui peut être vue comme une chaîne d'oscillateurs). Un autre exemple plus exotique est celui de la baie de Fundy (Nouvelle-Ecosse), voir [39], p. 53.

**Conclusion :** Ouvrir sur les résonances paramétriques, par exemple la balançoire (pendule simple dont la longueur varie). On voit alors apparaître des phénomènes non linéaires et apparition de nouvelles harmoniques.

**BONUS :**

- Quelques ordres de grandeur du facteur de qualité  $Q$  : de quelques unités pour les systèmes mécaniques courants jusqu'à 100 pour le RLC. En acoustique, le facteur de qualité d'une corde de piano ou de violon est typiquement de l'ordre de 1000, voire  $10^4$  pour un diapason. A l'extrême on a un facteur  $Q = 10^6$  pour les quartz à piézoélectriques et même  $10^8$  pour les horloges atomiques!
- Quelques interprétations du facteur de qualité : il s'interprète comme le décrétement logarithmique de l'énergie, la largeur de la résonance ( $Q = \omega_0 / \Delta\omega$ ), le nombre d'oscillations avant l'amortissement du régime libre, le rapport entre l'élongation à résonance et l'amplitude de l'excitateur, ...

# LP n° 49 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

NIVEAU : LICENCE 3

PRÉREQUIS :

- Oscillateur harmonique (amorti, libre, Régime Sinusoïdal Forcé)
- Analyse de Fourier
- Électronique (AO, lois des circuits)

PLAN :

1. Étude des oscillateurs conservatifs

2. Oscillateurs amortis, oscillateurs entretenus

BIBLIOGRAPHIE :

- BUP n°744 sur *Le portrait de phase des oscillateurs*
- [15] *Mécanique. PCSI-MPSI*. P. Brasselet.
- [46] *Électronique expérimentale*, Krob (un peu)
- Polycoché de TP de Montrouge *Physique non linéaire*.

IDÉES À FAIRE PASSER :

L'étude des oscillateurs ouvre un vaste champ d'étude de la physique : linéaires et non linéaires, amortis et entretenus, leur résolution exacte est souvent compliquée. Sur des systèmes simples, on introduit ici un outil d'étude graphique généralisable aux systèmes les plus compliqués : le portrait de phase.

**Introduction :** Définir un oscillateur comme un système physique oscillant de part et d'autre d'une position d'équilibre stable - par exemple cœur qui bat, horloge. Dans cette leçon on prendra pour définition d'un système non-linéaire un système pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas ; il a notamment pour propriété de pouvoir modifier la fréquence des signaux d'entrée.

## 1 Étude des oscillateurs conservatifs

### 1.1 Le portrait de phase illustré sur l'exemple de l'oscillateur harmonique

*Il va sans dire que vu l'intérêt physique à peu près nul de cette partie, qui n'a sa place dans cette leçon que d'un point de vue pédagogique, il faut être efficace.*

Poser l'équation d'un oscillateur harmonique (éventuellement donner quelques exemples physiques) et résoudre en exprimant position et vitesse **sans oublier les constantes d'intégration!** Définir le portrait de phase (BUP, p. 719) en insistant sur le rôle des conditions initiales (BUP, p. 720) et démontrer que **les trajectoires de l'OH dans le plan de phase sont des cercles centrés sur O et dont le rayon dépend des conditions initiales**. Tracer le portrait de phase de l'oscillateur harmonique (à tracer vite fait au tableau) et expliquer dans quel sens on tourne.

### 1.2 L'influence des non linéarités illustrée sur l'exemple du pendule simple

On s'intéresse à un pendule simple. Faire très rapidement (ou admettre) la mise en équation : schéma, système, référentiel, bilan des forces. On a un système conservatif à un degré de liberté donc conservation de l'énergie mécanique et on choisit  $E_p$  nulle pour  $\theta = 0$  pour aboutir à

$$\frac{1}{2} m(\dot{\theta})^2 + mgl \sin(\theta) = E(\theta_0, \dot{\theta}_0)$$

Rappeler qu'on a déjà vu un moyen de prévoir le mouvement adopté par le pendule en fonction de l'énergie mécanique associée aux conditions initiales. L'énergie cinétique étant toujours positive cela implique comme d'habitude une valeur maximale pour  $E_p$ . On trace le potentiel, et différentes valeurs d'énergie et on interprète :

- si  $E$  est faible le système est cantonné à  $\theta$  petit devant 1 on peut linéariser et on retrouve l'oscillateur harmonique dont on a déjà vu les trajectoires dans l'espace des phases.
- pour  $E$  un peu plus grand on a une déformation du cercle.
- dans le cas limite  $E = E_{max}$  on oscille entre  $-\pi$  et  $\pi$ .
- dans le cas d'énergie supérieure on fait des tours : mouvement révolitif.

L'équation du mouvement est compliquée à résoudre de manière analytique mais on peut avoir rapidement accès à la forme des trajectoires en établissant le portrait de phase de manière numérique. Voir BUP, p. 721. Tracer les trajectoire et le portrait de phase avec le [programme python Portrait\\_Phase\\_Pendule](#) et prendre le temps de retrouver les quatre mouvements précédents sur le portrait de phase.

### 1.3 Non-linéarités et aspect fréquentiel

Voir [15], pp. 124 - 126 : Linéarisation du sinus à l'ordre supérieur et résolution en perturbation. On obtient l'apparition d'harmoniques impaires, et la modification de la période du pendule (pert d'isochronisme). On se sert du [programme python Pendule\\_NonLineaire](#) pour ajouter aux graphes du programme précédent celui de la transformée de fourier des signaux. Aux petites amplitudes on a bien un unique pic à la fréquence attendue, puis au fur et à mesure qu'on s'éloigne de cette approximation on observe deux phénomènes :

- La modification de la fréquence centrale par la formule de Borda;
- L'apparition d'harmoniques impaires à des fréquences plus élevées.

---

**Transition :** Puissance du portrait de phase : on ne résout pas d'équation mais on a des informations sur le mouvement quand même! Problème : on a ici des oscillations qui finissent par s'amortir, pas comme le cœur ou les horloges!

---

## 2 Oscillateurs amortis, oscillateurs entretenus

### 2.1 Considérations générales

Jusque là on n'a pas pris en compte de terme proportionnel à la dérivée, mais l'équation générale du mouvement est de la forme  $\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  et l'oscillateur est amorti ou amplifié selon le signe de  $A$ . Dans la suite on va regarder deux modèles simples :

- Un exemple d'oscillateur amorti avec  $A$  constante et négatif;
- Un exemple d'oscillateur avec  $A(x) = a + bx^2 = \varepsilon(x^2 - 1)$  amplifié pour  $x < 1$  et amorti lorsque  $x > 1$  (pas de terme en  $x$  pour conserver la parité)?

### 2.2 Application à l'étude des oscillateurs amortis

Voir le BUP, p. 722. On donne l'équation dans le cas de l'amortissement fluide, donner l'expression de  $Q$  et prévoir qualitativement comment il va influencer sur le mouvement. On peut déjà dire que l'oscillateur va perdre de l'énergie donc d'un tour sur l'autre il atteindra des vitesses plus faibles et des angles moins importants. Simulation numérique par le [programme python Oscillateur\\_Amorti\\_Fluide](#) : on voit comme attendu des spirales sur le portrait de phase convergeant plus ou moins rapidement vers l'origine qui apparaît comme un point attracteur. *Pour le pendule amorti on a une infinité de points attracteurs multiples de  $2\pi$ .*

On peut éventuellement mentionner les oscillateurs amortis par frottements solides et lancer le [programme python Oscillateur\\_Amorti\\_Solide](#) pour montrer que la décroissance n'est pas de même nature et surtout qu'il n'y plus un point attracteur mais une plage de points attracteurs du fait que l'oscillateur s'arrête non pas lorsque  $v = 0$  mais lorsque  $v$  n'est plus suffisante pour lutter contre les frottements.

### 2.3 Oscillateur entretenu, le modèle de Van der Pol

Introduire les oscillateurs entretenus à partir du BUP, p. 727 - Donner l'équation générale  $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  puis le schéma du circuit sur [slide](#) et remplacer  $\varepsilon$  par sa valeur en fonction des composants. Intuiter le comportement de l'oscillateur pour  $x$  petit ou grand devant 1.

**Expérience :** On regarde successivement :

- Commencer par vérifier l'intuition qu'on a eu sur le modèle : si  $x$  petit les oscillations croissent, au contraire si  $x$  grand elles décroissent. Faire apparaître un cycle attracteur de rayon  $x = 1$ .
- Les oscillations semblent (quasi-)sinusoïdales si  $\varepsilon \ll 1$ . Pour le vérifier il faut regarder le portrait de phase qui doit être un cercle. Tracer le portrait de phase et constater effectivement le cycle limite (nouveau cas particulier d'attracteur). Bien remarquer que LE CYCLE ATTRACTEUR EST INDÉPENDANT DES CONDITIONS INITIALES ET NE DÉPEND QUE DE L'OSCILLATEUR LUI MÊME, C'EST-À-DIRE DE LA VALEUR DE  $\varepsilon$ .
- Comment expliquer le démarrage des oscillations? On a l'impression de voir une exponentielle croissante. Peut-on le démontrer?

Regardons plus précisément le démarrage des oscillations. Si  $x \ll 1$  on linéarise l'équation, on résout en  $x(t) = Ae^{\varepsilon t} \cos(\omega t)$  et on vérifie effectivement la croissance exponentielle de l'amplitude. Si on est exactement à l'origine on y reste mais au moindre bruit c'est perdu!

Voir ce site pour les calculs et la phénoménologie sur Van der Pol.



- Si enfin  $\epsilon \gg 1$  on a affaire à des oscillations de relaxation. On perd complètement l'aspect sinusoïdal mais on garde quoiqu'il arrive un cycle attracteur.

**Conclusion :** Sensibilité aux conditions initiales et transition vers le chaos. On peut par exemple évoquer l'attracteur de Lorenz.

**BONUS :**

---

1. Autres domaines d'utilisation du portrait de phase? Quasiment tous les systèmes dynamiques, en particulier ceux régis par des équations différentielles dont les coefficients dépendent du point où on les applique.
2. Dans quel domaine de valeur peut-on linéariser le  $\sin(\theta)$  sans commettre une trop grande erreur? En général, au-delà de  $20^\circ$  il faut ajouter le terme en cube, puis à  $40^\circ$  le terme en puissance 5 et après il faut très vite rajouter beaucoup de termes.
3. Voir la page Wikipédia sur les oscillations de relaxation !
4. Peut-être que l'on peut introduire plus tôt le modèle électrique et s'en servir pour vérifier qu'on raconte prouver qu'on raconte pas n'importe quoi dans la partie I.



# Bibliographie

- [1] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. *Les milieux granulaires. Entre fluide et solide*. EDP Sciences, 2011.
- [2] N. I. Ashcroft and D. Mermin. *Physique des solides*. EDP Sciences, 2002.
- [3] C. Aslangul. *Mécanique quantique*, volume 1. Fondements et premières applications. de Boeck, 2007.
- [4] J.-L. Basdevant, J. Rich, and M. Spiro. *Energie nucléaire*. Les éditions de l'école polytechnique, 2006.
- [5] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Thermodynamique*. Dunod, 1979.
- [6] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Electromagnétisme 1*. Dunod, 1984.
- [7] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Electromagnétisme 3*. Dunod, 1984.
- [8] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Electromagnétisme 4 : milieux diélectriques et milieux aimantés*. Dunod, 1984.
- [9] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Mécanique 1 : mécanique classique de systèmes de points et notions de relativité*. Dunod, 1984.
- [10] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Mécanique 2 :*. Dunod, 1984.
- [11] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Optique et Physique ondulatoire*. Dunod, 1984.
- [12] W. Bertozzi. Speed and kinetic energy of relativistic electrons. *American Journal of Physics*, 32 :551, 1964.
- [13] L. Bocquet, J.-P. Faroux, and J. Renault. *Toute la mécanique*. Dunod, 2002.
- [14] A. Boussié. Presses Universitaires de France, 2001.
- [15] P. Brasselet. *Mécanique. PCSI - MPSI*. Presses Universitaires de France, 2000.
- [16] J.-M. Brébec. volume II. Hachette, 1997.
- [17] J.-M. Brébec. *Ondes. 2nde année PC-PC\*, PSI-PSI\**. Hachette Supérieur, 1997.
- [18] J.-M. Brébec and al. *Thermodynamique. 2de année MP-MP\* & PT-PT\**. Hachette, 1996.
- [19] J.-M. Brébec, T. Desmarais, and M. Ménétrier. *Ondes. 1ere année MPSI-PCSI-PTSI*. Hachette Supérieur, 2003.
- [20] B. Cagnac, L. Tchang-Brillet, and J.-C. Pebay-Pérouta. *Physique atomique*, volume 1. Atomes et rayonnement : interactions électromagnétiques. Dunod, 2005.
- [21] B. Cagnac, L. Tchang-Brillet, and J.-C. Pebay-Pérouta. *Physique atomique*, volume 1. Atomes et rayonnement : interactions électromagnétiques. Dunod, 2005.
- [22] S. Cardini, E. Ehrhard, A. Guerillot, T. Guillot, B. Morvan, and M.-N. Sanz. *Physique, tout-en-un. PSI/PSI\**. Dunod, 2014.
- [23] A. Chaigne. *Ondes acoustiques*. Les éditions de l'école polytechnique, 2011.
- [24] R.-J. Champeau, R. Carpentier, and I. Lorgeré. *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*. de Boeck, 2009.
- [25] N. Choimet. *Thermodynamique. PC-PSI*. Bréal, 2004.
- [26] N. Choimet. *Thermodynamique. PCSI*. Bréal, 2004.
- [27] C. Cohen-Tannousji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*, volume I. Hermann, 1973.
- [28] F. Cottet. *Traitement des signaux et acquisition des données*. Dunod, 1997.
- [29] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [30] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique Statistique*. Hermann, 2001.
- [31] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Thermodynamique*. Hermann, 2007.
- [32] E. du Trémolet de la Lacheisserie. *Magnétisme*, volume I - Fondements. EDP Sciences, 2000.
- [33] E. du Trémolet de la Lacheisserie. *Magnétisme*, volume II - Matériaux et applications. EDP Sciences, 2000.
- [34] J.-P. Faroux and J. Renault. *Mécanique 1. Cours et exercices corrigés*. Dunod, 11=995.

- [35] B. Fosset, J.-B. Baudin, and Lahitète F. *Chimie, tout-en-un. PC/PC\**. Dunod, 2014.
- [36] M Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M Champion, and A. Le Diffon. *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*. De Boeck, 2016.
- [37] C. Garing. *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*. Ellipses, 1998.
- [38] C. Garing. *Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques*. Ellipses, 1998.
- [39] C. Garing. *Ondes mécaniques et diffusion*. Ellipses, 1998.
- [40] H. Gié, J.P. Sarmant, S. Olivier, and C. More. *Physique Spé. MP\*, MP et PT\*, PT*. Tec & Doc, 2000.
- [41] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
- [42] D. Hennequin, V. Zehnlé, and D. Dangoisse. *Les Lasers. Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2013.
- [43] J. Hladik and M. Chrysos. *Introduction à la relativité restreinte*. Dunod, 2001.
- [44] S. Houard. *Optique. Une approche expérimentale et pratique*. De Boeck, 2011.
- [45] C. Kittel. *Physique de l'état solide*. Dunod, 1998.
- [46] M. Krob. *Electronique expérimentale*. Ellipses, 2002.
- [47] C. Le Sech and C. Ngô. *Physique nucléaire. Des quarks aux applications. 2e édition*. Dunod, 2014.
- [48] J. Majou and S. Komilikis. *Supermanuel de Physique. Tout-en-un MPSI/PCSI/PTSI*. Bréal, 2013.
- [49] A. Marchand, J. Weijs, J. Snoeijer, and B. Andreotti. Why is surface tension a force parallel to the interface. *arXiv 1211.3854v1*, 2012.
- [50] D. Mauras. *Électromagnétisme. 2e année*. Presses Universitaires de France, 1999.
- [51] D. Mauras. *Optique Physique, et électronique*. Presses Universitaires de France, 2001.
- [52] S. Olivier. *Physique. PC, PC\**. Lavoisier Tec & Doc, 2009.
- [53] S. Olivier, H. Gié, and J.P. Sarmant. *Physique Spé. PC\*, PC*. Tec & Doc, 2000.
- [54] B. Portelli and J. Barthes. *La physique par la pratique. 2e édition*. H&K Éditions, 2005.
- [55] J.-P. Pérez, C. Lagoute, and O. Pujol. *Physique : Une approche moderne. Première année*. De Boeck, 2011.
- [56] J.P. Pérez. *Electromagnétisme*. 1990.
- [57] J.P. Pérez. *Mécanique*. 1990.
- [58] J.P. Pérez. *Optique*. 1990.
- [59] J.P. Pérez. *Relativité : fondements et applications*. Dunod, 1999.
- [60] J.P. Pérez. *Thermodynamique : fondements et applications*. Dunod, 2011.
- [61] J.-M. Raimond. *Electromagnétisme et Relativité*. 2006.
- [62] F. Reif. *Le cours de Physique de Berkeley. Tome 5 : Physique statistique*. Armand Colin, 1972.
- [63] B Salamito, S. Cardini, D. Jurine, and M.-N. Sanz. *Physique, tout-en-un. PCSI*. Dunod, 2013.
- [64] B. Salamito, M.-N. Sanz, F. Vandenbrouck, and M. Tuloup. *Physique, tout-en-un. MP/MP\**. Dunod, 2014.
- [65] M.-N. Sanz. *Physique, tout-en-un. MP/MP\**. Dunod, 2004.
- [66] M.-N. Sanz. *Physique, tout-en-un. PC/PC\**. Dunod, 2004.
- [67] M.-N. Sanz, A.-E. Badel, and F. Clausser. *Physique, tout-en-un. MPSI-PCSI-PTSI*. Dunod, 2004.
- [68] M.-N. Sanz and B. Salamito. *Physique, tout-en-un. PC/PSI*. Dunod, 2004.
- [69] M.-N. Sanz and B. Salamito. *Physique, tout-en-un. PSI/PSI\**. Dunod, 2006.
- [70] M.-N. Sanz and B. Salamito. *Physique, tout-en-un. PC/PSI*. Dunod, 2014.
- [71] M.-N. Sanz, F. Vandenbrouck, B. Salamito, and D. Chardon. *Physique, tout-en-un. PC/PC\**. Dunod, 2014.
- [72] C. Semay and B. Silvestre-Brac. *Relativité restreinte : bases et applications*. Dunod, 2016.
- [73] Sextant. *Optique Expérimentale*. Hermann, 1997.
- [74] R. Taillet. *Optique physique*. De Boeck, 2015.
- [75] J.-C. Tisserand and coll. *Les nouveaux précis bréal. Physique, PSI/PT*. Bréal, 2014.
- [76] L. Valentin. *Le monde subatomique. Des quarks aux applications*. Hermann, 1986.
- [77] G. Wastiaux. *La microscopie optique moderne*. Tec & Doc, Lavoisier, 1994.
- [78] E. H. Wichmann. *Le cours de Physique de Berkeley. Tome 4 : Mécanique quantique*. Armand Colin, 1974.